

УДК 532.5.011.12

© 2006 г. В. А. ГУЩИН, П. В. МАТЮШИН

**МЕХАНИЗМЫ ФОРМИРОВАНИЯ ВИХРЕЙ В СЛЕДЕ  
ЗА СФЕРОЙ ПРИ  $200 < Re < 380$** 

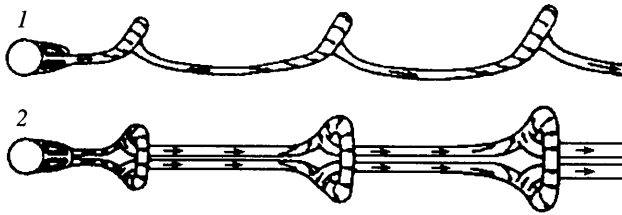
При помощи прямого численного моделирования и визуализации пространственных отрывных течений однородной несжимаемой вязкой жидкости около сферы дано детальное описание различных механизмов формирования вихрей в следе за сферой при умеренных числах Рейнольдса ( $200 \leq Re \leq 380$ ). При  $200 < Re \leq 270$  формируется стационарный прямолинейный двухнитевой след. При  $Re > 270$  – цепочка вихревых петель. Три нестационарных периодичных режима течения при  $270 < Re \leq 290$ ,  $290 < Re \leq 320$  и  $320 < Re \leq 380$  характеризуются различными механизмами формирования вихрей. При  $290 < Re \leq 320$  обнаружен ранее неизвестный режим течения. Для прямого численного моделирования реализован метод расщепления по физическим факторам “Меранж” с явной, гибридной конечно-разностной схемой, обладающей следующими свойствами: второй порядок аппроксимации по пространственным переменным, минимальная схемная вязкость и дисперсия, монотонность. Для визуализации вихревых структур в следе использованы две различные методики идентификации вихрей.

*Ключевые слова:* несжимаемая вязкая жидкость, сфера, механизмы формирования вихрей, след, численное моделирование, визуализация.

Изучение пространственных следов за телами конечных размеров в потоке однородной жидкости – традиционная задача гидродинамики. При обтекании реальных пространственных тел, как правило, возникают трехмерные и нестационарные формы отрыва, изучение которых и представляет значительный интерес. Учитывая высокую стоимость лабораторных экспериментов, множество дополнительных осложняющих исследование факторов, влияющих на конфигурацию течения (неоднородность набегающего потока, шероховатость поверхности), а также продолжающиеся положительные тенденции в развитии вычислительной техники (повышение производительности и увеличение памяти) позволяют надеяться на расширение и углубление знаний об отрывных течениях, получаемых путем численного моделирования на основе полных уравнений гидродинамики.

В настоящей работе численно моделируется течение однородной несжимаемой вязкой жидкости в следе за простейшим трехмерным телом (сферой) при умеренных числах Рейнольдса ( $200 < Re \leq 380$ ) ( $Re = W_0 d / \nu$ ,  $W_0$  – скорость набегающего потока,  $d$  – диаметр сферы,  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости). Многие годы главной целью большинства экспериментов по обтеканию сферы являлось определение сопротивления сферы как функции числа  $Re$  [1]. Детальное экспериментальное исследование структуры течения в следе за сферой начато в [2] и продолжено в [3–12]. И тем не менее, исчерпывающего описания механизмов формирования вихрей в следе за сферой при умеренных числах  $Re$  все еще нет. В настоящей статье делается попытка дать такое описание.

В иллюстрациях, приведенных в [2], отчетливо видны следующие основные элементы следа: 1) рециркуляционная область следа (непосредственно за сферой); 2) сдвиговый слой между этой областью и внешним течением – продолжение в течение пограничного слоя; 3) вихревые структуры следа. В [2] получена классификация режимов течений в следе за сферой: 1)  $0 < Re < 210$  – одноструйный след (осесимметричный



Фиг. 1. Схематическое представление цепочки вихревых петель в следе за сферой при  $300 < Re < 420$ , полученное в эксперименте [4]; 1, 2 – вид сбоку и сверху

рециркуляционная (застойная) область); 2)  $210 < Re < 270$  – прямолинейный двухнитевой след; 3)  $270 < Re < 290$  – волнообразный двухнитевой след; 4)  $290 < Re < 410$  – цепочка вихревых петель; 5)  $290 < Re < 700$  – двойной ряд вихревых колец (при  $290 < Re < 410$  разные серии экспериментов давали различную структуру следа). В [2] при  $Re < 270$  сформировались стационарные течения, а при  $Re > 270$  – нестационарные.

Переход из осесимметричного однонитевого следа в стационарный неосесимметричный двухнитевой след в эксперименте [3] установлен при  $Re = 190$ . Переход от двухнитевого следа к нестационарному режиму течения варьируется у разных авторов в диапазоне  $270 \leq Re \leq 400$ . Например, в [4] отмечается следующее: 1) при  $Re > 300$  шпилькообразные вихревые петли (фиг. 1) начинают периодически отделяться с регулярностью в силе и частоте, образуя ламинарные вихри вплоть до  $Re = 800$  (диапазон числа Струхала  $0.15 < St < 0.21$ ,  $St = fd/W_0$ , где  $f$  – частота отрыва вихрей); 2) при  $300 < Re < 420$  все петли ориентированы в одну сторону (вверх) и наблюдается плоскостная симметрия следа, которая теряется при  $Re > 420$ , и тогда петли в следе направлены то влево, то вправо.

Для случая равномерного набегающего на сферу потока при  $280 < Re < 300$  в [5] констатируется попеременное нерегулярное появление в следе двух вихревых структур: пары волнообразных нитей и шпилькообразных петель. Диапазон числа Струхала  $0.125 < St < 0.141$  при  $300 < Re < 400$  (для случая равномерного набегающего потока) в [5] уже, чем в [4] ( $0.15 < St < 0.17$ ). В [5] для случая сдвинутого в вертикальном направлении набегающего на сферу потока при помощи визуализации сдвигового слоя и вихревых структур следа описывается механизм формирования вихрей в следе при  $Re = 375$ . В течении естественно выделяются верхняя (там, где скорость больше) и нижняя части сдвигового слоя, окружающую рециркуляционную область. Механизм формирования новой шпилькообразной петли разбивается на три стадии. Сначала верхняя часть сдвигового слоя растягивается вниз по течению, намного быстрее нижней части, потом ее край свертывается вокруг двух вихревых нитей (ножек первой петли следа) и далее она трансформируется в новую шпилькообразную петлю.

Таким образом, экспериментальное исследование внесло большой вклад в изучение режимов течений жидкости в следе за сферой при  $Re \leq 380$ . В 80-х годах для более детального изучения вихревых следов за сферой стало применяться математическое моделирование [6, 7]. Вычислители здесь столкнулись с проблемой визуализации вихревых структур в следе. В [6], например, использована специальная техника визуализации, основанная на мгновенных линиях завихренности; для  $Re = 500$  и для конечно-разностной сетки  $50 \times 100 \times 50$  дано схематическое представление деформации осесимметричного вихревого кольца рециркуляционной области в замкнутую петлю, уносимую далее вниз по течению. В [13] предложено идентифицировать сердцевинки вихревого течения при помощи построения изоповерхностей  $\text{Im}(\sigma_{1,2}) = 0$ , где  $\text{Im}(\sigma_{1,2})$  – мнимая часть комплексно-сопряженных собственных значений тензора градиента скорости.

В 90-х годах появились новые способы визуализации сердцевинки вихревого течения [14] и происходило дальнейшее уточнение классификации режимов течений около сфе-

ры. В [14] предложено идентифицировать сердцевину вихревого течения при помощи построения изоповерхностей  $\lambda_2 = 0$ , где  $\lambda_2$  – второе собственное значение симметричного тензора, являющегося суммой квадратов симметричной и антисимметричной частей тензора градиента скорости. В [8, 9, 15–17] переход к двухнитевому следу наблюдался при  $Re = 211, 210.5, 212, 210, 250$  соответственно, а дальнейший переход к нестационарному течению – при  $Re = 270, 297, 270 \leq Re \leq 285, Re = 277.5, 375$  соответственно. В [8, 9] отмечен малоизвестный нетривиальный факт, что нестационарный режим течения (при  $270 < Re < 300$  в [8] и при  $297 < Re < 603$  в [9]) характеризуется не равным нулю осредненным по времени коэффициентом суммарной боковой силы. В [8] при помощи построения изоповерхностей  $\lambda_2 = 0$  при  $Re = 300$  показано, что каждая шпилькообразная петля, наблюдаемая в эксперименте [4] (фиг. 1), на самом деле состоит из двух петель. Разделите пополам ножки петли на фиг. 1. Тогда правые половины этих ножек будут принадлежать основной петле (ориентированной вверх), а левые половины – индуцированной петле (направленной вниз). При этом головная часть индуцированной петли, расположенная ниже воображаемой границы раздела ножек шпилькообразной петли на фиг. 1, не видна при помощи визуализации, использованной в [4]. В [18] при  $Re = 350$  в следе за сферой, так же как и на фиг. 1, показаны только петли, ориентированные вверх; для визуализации строилась изоповерхность  $\text{Im}(\sigma_{1,2}) \neq 0$  (значение  $\text{Im}(\sigma_{1,2})$  в [18] не упоминается). В [10–12] использовалась  $\lambda_2$ -методика идентификации вихрей [14]; при  $1 \leq Re \leq 20.5$  и  $20.5 < Re \leq 200$  численно моделировались безотрывное и отрывное осесимметричные течения около сферы соответственно; при  $200 < Re \leq 270$  – прямолинейный двухнитевой след; при  $270 < Re < 400$  – отрыв фиксированного края вихревой оболочки (окружающей рециркуляционную область), который при  $360 < Re < 400$  сопровождается медленным регулярным вращением этой оболочки вокруг линии движения сферы; при  $400 \leq Re \leq 600$  – поочередный отрыв противоположных краев вихревой оболочки.

На основании вышеприведенного можно сделать вывод о том, что при  $Re \leq 380$  результаты математического моделирования отрывных течений в следе за сферой довольно хорошо согласуются с экспериментом, разработаны различные методики визуализации вихрей, но все еще отсутствует ясное понимание детальных механизмов формирования вихревых петель в следе за сферой. Поэтому в настоящей статье делается попытка прийти к такому пониманию.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается задача об обтекании сферы равномерным на бесконечности потоком однородной несжимаемой вязкой жидкости. Система уравнений Навье-Стокса, описывающих течение, имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{2}{Re} \Delta \mathbf{v} \quad (1.1)$$

$$\nabla \mathbf{v} = 0$$

где  $\mathbf{v}$  – нормированный (на  $W_0$ ) вектор скорости,  $p$  – нормированное (на  $\rho W_0^2$ ) давление,  $\rho$  – плотность жидкости.

Пусть  $x, y, z$  – декартовы координаты и  $(U, V, W)$  – составляющие вектора скорости  $\mathbf{v}$  вдоль направлений  $x, y, z$ . Предполагается, что вектор скорости набегающего потока  $(0, 0, W_0)$  параллелен оси  $z$ . Уравнения (1.1) записываются в сферической системе координат  $R, \theta, \varphi$  ( $x = R \sin \theta \cos \varphi, y = R \sin \theta \sin \varphi, z = R \cos \theta$ ). Пусть  $u, v, w$  – составляющие вектора скорости  $\mathbf{v}$  вдоль направлений  $R, \theta, \varphi$ . На поверхности сферы ставятся граничные условия прилипания  $v = 0, w = 0$  и непротекания  $u = 0$ . На внешней границе расчетной области (сферической поверхности с радиусом  $R_N$ ) при  $z < 0$  задаются граничные условия невозмущенного потока:  $u = \cos \theta, v = -\sin \theta, w = 0$ ; а при  $z \geq 0$ :  $u = \cos \theta, v = -\sin \theta, dw/dR = 0$ .

Для корректного моделирования отрывных течений необходимо сгущать конечно-разностную сетку к поверхности тела (разрешать пограничный слой). Поэтому в радиальном направлении вводится преобразование

$$R_i = R(r_i) = 1 + \frac{i}{N_0} \sqrt{\frac{2}{\text{Re}}} + \left( \frac{i}{N} r_{\max} \right)^m, \quad i = 1 : N$$

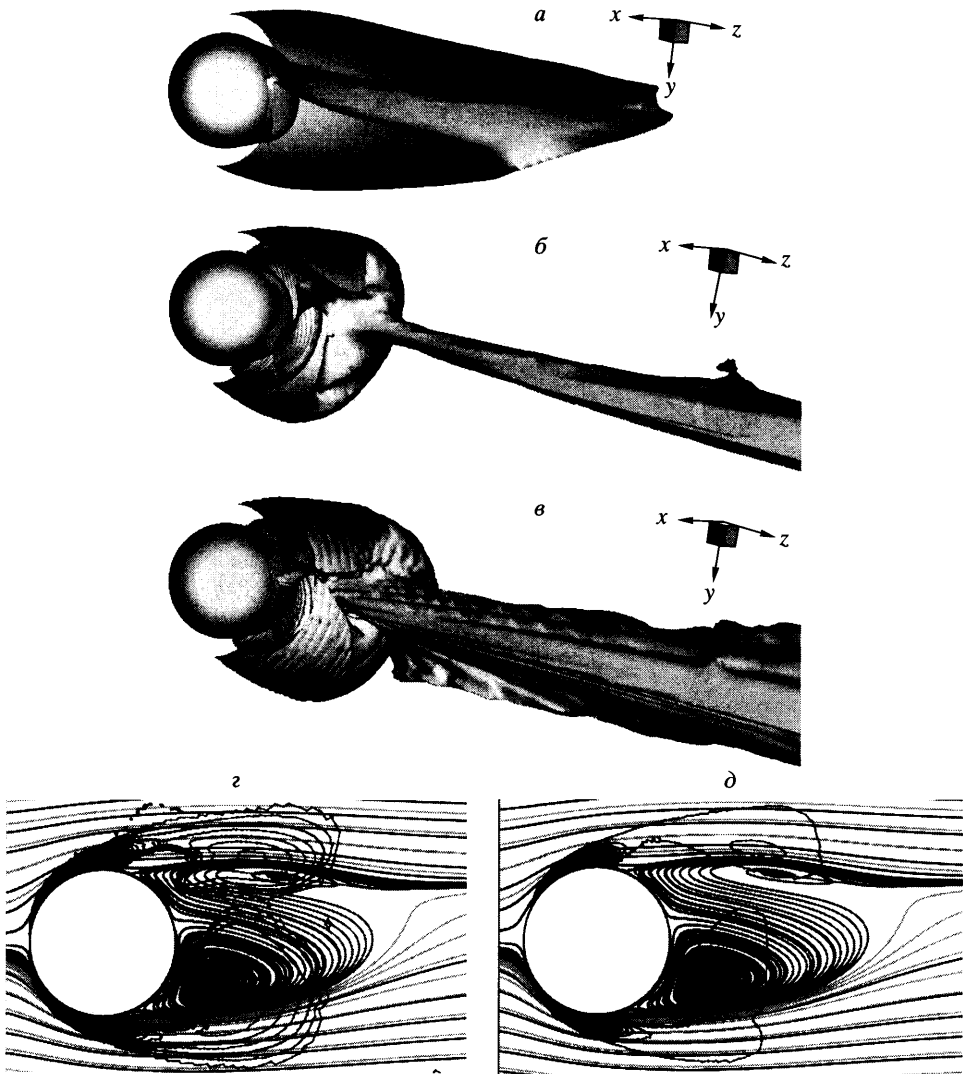
где  $N_0$  – число ячеек расчетной сетки, помещенных в пограничный слой толщиной  $\delta = \sqrt{2/\text{Re}}$ . Для всех расчетов настоящей работы:  $m = 3$ ,  $r_{\max} = 3$ , следовательно  $R_N \approx 14.5d$ . Таким образом, исследуемая расчетная область отображается на прямоугольный параллелепипед  $(r, \theta, \varphi)$ :  $0 \leq r \leq r_{\max}$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , с равномерной сеткой  $N \times M \times L$  внутри него.

Для моделирования отрывных течений однородной несжимаемой вязкой жидкости, описываемой уравнениями (1.1), используется метод расщепления по физическим факторам “Меранж” с явной, гибридной конечно-разностной схемой для аппроксимации конвективных членов уравнений, обеспечивающей второй порядок аппроксимации по пространственным переменным, минимальные схемные вязкость и дисперсию, работоспособность в широком диапазоне чисел Рейнольдса, монотонность [19–22].

Эффективность метода моделирования “Меранж” и возросшая мощность суперкомпьютеров позволила адекватно моделировать пространственные отрывные течения несжимаемой вязкой жидкости около сферы при умеренных числах Рейнольдса. Вычисления проводились на многопроцессорном вычислительном комплексе МВС-1000 (42 процессора “Intel Xeon”, 1.7 ГГц).

**2. Визуализация вихревых структур в следе за сферой.** Для понимания динамики и механизмов отрыва вихревых структур несжимаемой вязкой жидкости в следе за сферой не достаточно трех общеизвестных интуитивных индикаторов вихрей (минимум давления, линии тока и изоповерхности завихренности). Например, для простейшего случая осесимметричного обтекания сферы при  $\text{Re} = 100$  в следе можно выделить две вихревые структуры: кольцо в рециркуляционной области и оболочку вокруг кольца [9–12]. В то же время линии тока в системе отсчета, связанной со сферой, визуализируют только кольцо, изолинии завихренности  $\omega = 0.5 \text{rot } v$  – только оболочку, а изолинии давления не визуализируют ни того, ни другого [9–12]. Аналогично, для сложного пространственного течения изоповерхности модуля завихренности показывают не все вихревые структуры течения, а только часть из них (фиг. 2, а). Поэтому были предложены специальные методы визуализации, позволяющие идентифицировать большую часть вихрей следа. Опишем кратко суть двух методов [13, 14], которые используются в этой работе (фиг. 2, б, в).

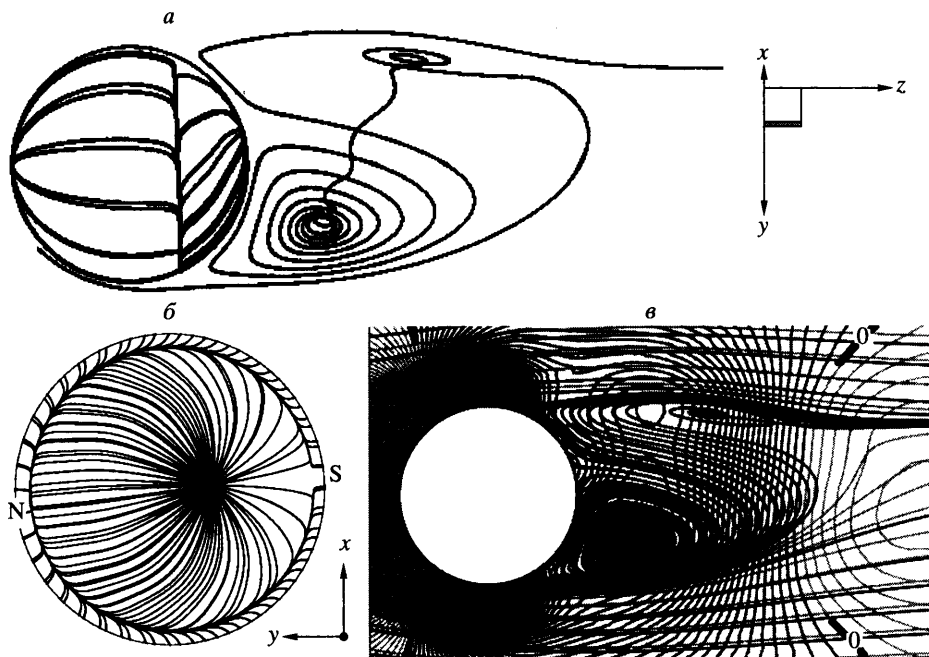
Зафиксируем некоторую точку в поле течения и исследуем, как ведут себя линии тока в декартовой системе координат  $x = (x, y, z)$  с началом в этой точке и движущейся со скоростью этой точки. В окрестности этой точки  $(0, 0, 0)$  в линейном приближении можно записать  $v = dx/dt \approx T x$ , где  $T$  – тензор градиента скорости ( $T_{ij} = v_{i,j} = \partial v_i / \partial x_j$ ). Если два собственных значения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  тензора  $T$  – комплексно-сопряженные, т.е.  $\sigma_1 = \alpha - i\beta$ ,  $\sigma_2 = \alpha + i\beta$  ( $\beta = \text{Im}(\sigma_1) > 0$ ), то из курса обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что могут быть выбраны соответствующие им два комплексно-сопряженных собственных вектора  $0.5(\mathbf{h}_1 \pm i\mathbf{h}_2)$ , составленные из двух действительных векторов  $\mathbf{h}_1$  и  $\mathbf{h}_2$ , образующих плоскость, фазовыми траекториями в которой будут либо замкнутые овальные траектории с центром в зафиксированной точке (при  $\alpha = 0$ ), либо спирали с фокусом в этой точке, что означает наличие вихря в этой точке (см. [23], с. 119–122). При этом угловая скорость вращения жидкости вокруг этой зафиксированной точки равна  $\beta$ . Поэтому было введено определение сердцевин вихревого течения как совокупности подобластей течения с комплексно-сопряженными собственными



Фиг. 2. Двухнитевой след,  $Re = 250$ : *a–в* – изоповерхности  $|\omega| = 0.2$  ( $\omega = 0.5 \text{rot } v$ ),  $\lambda_2 = -2 \cdot 10^{-5}$  и  $\text{Im}(\sigma_{1,2}) = 0.005$ ; *г–д* – изолинии  $\text{Im}(\sigma_{1,2}) > 0$  (шаг 0.06) и  $\lambda_2 < 0$  (шаг 0.02) на фоне линий тока в плоскости симметрии следа (сетка  $180 \times 90 \times 180$ )

значениями тензора градиента скорости [13] (см. изолинии  $\text{Im}(\sigma_{1,2}) > 0$  на фиг. 2, *г* и изоповерхность  $\text{Im}(\sigma_{1,2}) = 0.005$  на фиг. 2, *в*, где в силу плоскостной симметрии течения показана только одна ее половина).

В [14] сердцевина вихревого течения определяется как совокупность подобластей течения с отрицательным вторым собственным значением тензора  $S^2 + \Omega^2$  в них ( $\lambda_2 < 0$ , фиг. 2, *б, д*), где  $S$  и  $\Omega$  – это симметричная и антисимметричная части тензора градиента скорости ( $S_{ij} = 0.5(v_{i,j} + v_{j,i})$  – компоненты тензора скоростей деформаций,  $\Omega_{ij} = 0.5(v_{i,j} - v_{j,i})$  – тензора завихренности; у симметричного тензора  $S^2 + \Omega^2$  – три действительных собственных значения  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ ). В [14] показывается работоспособность этого определения для визуализации некоторых реальных пространственных течений несжимаемой жидкости.



Фиг. 3. Двухнитевой след,  $Re = 250$ : *a* – пространственная линия тока, стартующая в плоскости симметрии следа; *б* – линии трения на тыльной части поверхности сферы; *в* – изолинии давления (шаг 0.01) на фоне линий тока в плоскости симметрии следа

Для плоских течений  $\sigma_{1,2} = \pm \sqrt{\lambda_2}$ , поэтому определения сердцевин вихревого течения, предложенные в [13, 14], эквивалентны. В то же время, для осесимметричных течений (в следе за сферой) изоповерхность  $\text{Im}(\sigma_{1,2}) = 0$  охватывает больший объем, чем изоповерхность  $\lambda_2 = 0$ , но топологии этих изоповерхностей близки. При этом экстремумы функций  $\lambda_2$  и  $\text{Im}(\sigma_{1,2})$  в рециркуляционной области примерно совпадают с особой точкой (центром) в картине линий тока в системе отсчета, связанной со сферой.

**3. Методические и тестовые расчеты.** Первоначально для всех рассматриваемых здесь чисел Рейнольдса ( $Re \leq 380$ ) рассчитывается осесимметричное течение в силу осесимметричных граничных условий. Для того, чтобы получить неосесимметричное решение системы уравнений (1.1) при выбранном числе  $Re$ , надо ввести кратковременное возмущение в рассчитанное осесимметричное поле течения, полученное при этом  $Re$ . Было использовано возмущение в виде сдвига набегающего на сферу потока, после введения которого в следе за сферой формируется плоскостная симметрия. При этом плоскость симметрии следа проходит через линию движения тела и прямую, вдоль которой был равномерно сдвинут набегающий на сферу поток. Таким образом, можно задавать любую начальную ориентацию этой плоскости. Со временем плоскость симметрии может развернуться на произвольный угол вокруг оси  $z$  и ее положение можно отслеживать, например, при помощи линий трения на тыльной части поверхности сферы (фиг. 3, б). На линии первичного отрыва на фиг. 3, б хорошо видны седловая  $S$  и узловая  $N$  критические точки, через которые и проходит плоскость симметрии следа.

Программный комплекс обтекания сферы однородной несжимаемой вязкой жидкостью был всесторонне протестирован [10, 11, 22], и результаты этого тестирования хорошо согласуются с экспериментальными данными и расчетами других авторов. Прове-

денные в [11] методические расчеты на различных сетках  $60 \times 36 \times 72$ ,  $120 \times 60 \times 120$  и  $180 \times 90 \times 180$  для  $Re = 250$  показали сохранение топологии течения (фиг. 2).

**4. Прямолинейный двухнитевой след ( $200 < Re \leq 270$ ).** При  $20.5 < Re \leq 200$  в следе за сферой формируется осесимметричная стационарная рециркуляционная область (в картине линий тока в системе отсчета, связанной со сферой), которой соответствует вихревое кольцо в картинах изолиний  $Im(\sigma_{1,2}) > 0$  и  $\lambda_2 < 0$ . В свою очередь, с вихревой оболочкой следа в этих же картинах соотносится рециркуляционная зона в картине линий тока в системе отсчета, связанной с набегающим потоком. При возрастании  $Re$  от 20.5 до 200 кольцо укрупняется; вихревая оболочка приближается к кольцу, вытягивается вдоль линии движения сферы и соединяется с ним [10, 11]. При этом увеличивается скорость частиц жидкости в кольце и формируется локальный минимум давления в рециркуляционной области. При  $Re = 200$  локальные минимум давления, максимум  $Im(\sigma_{1,2})$  и минимум  $\lambda_2$  в рециркуляционной области примерно совпадают между собой и с особой точкой (центром) в картине линий тока в системе отсчета, связанной со сферой. После введения в рассчитанное осесимметричное течение малого кратковременного возмущения в виде сдвига набегающего на сферу потока вдоль вертикальной оси  $x$  ( $\partial W/\partial x > 0$ ) при  $Re \leq 200$  течение остается осесимметричным, а при  $Re > 200$  давление вдоль сердцевин вихревого кольца перераспределяется таким образом, что в нижней его части оно становится меньше, чем в верхней. При этом молекулы жидкости в сердцевине кольца движутся по спирали сверху вниз, а на его периферии – снизу вверх.

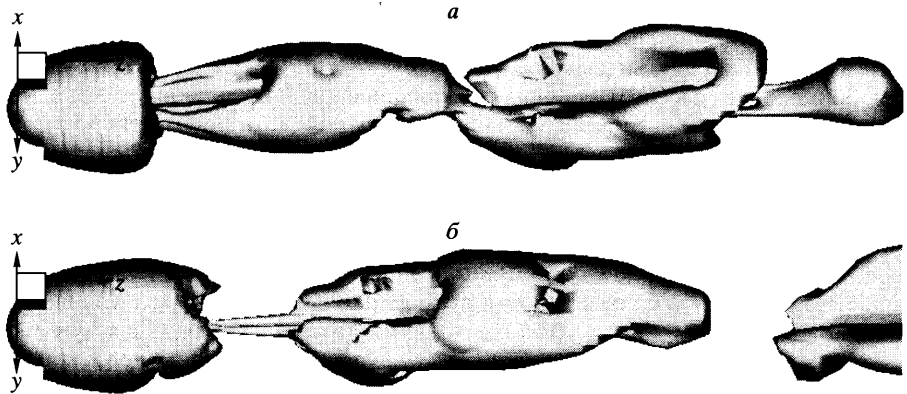
Далее кольцо наклоняется и устойчивый верхний фокус на фиг. 3, а (соответствующий верхней части кольца) начинает подпитываться жидкостью из набегающего потока, прошедшей под сферой. (В устойчивом фокусе линия тока скручивается к его центру, а в неустойчивом – раскручивается от центра фокуса.) Из верхнего фокуса на фиг. 3, а жидкость идет далее по сердцевине кольца в нижний неустойчивый фокус, потом, раскручиваясь, уходит вниз по течению, огибая верхний фокус слева и сверху. Линии тока, отличные от линии тока на фиг. 3, а, берущие свое начало из набегающего на сферу потока и проходящие около линии первичного отрыва (на сфере), огибают сердцевину кольца по спирали несколько раз, поднимаясь вверх, и уходят вниз по течению, образуя две вихревые нити (фиг. 2, б, в). Следовательно, можно утверждать, что эти нити связаны с кольцом.

Далее процесс трансформации следа при  $200 < Re \leq 211$  прекращается, а при  $211 < Re \leq 270$  продолжается (происходят затухающие азимутальные колебания в рециркуляционной области (см. разд. 5)). Таким образом, при  $200 < Re \leq 270$  осесимметричный след трансформируется в стационарный прямолинейный двухнитевой след (фиг. 2, 3), характеризующийся наличием плоскости симметрии и отличными от нуля

коэффициентами суммарной боковой силы  $C_l$  и вращательных моментов ( $C_l = \sqrt{C_x^2 + C_y^2}$ ,  $C_x$  и  $C_y$  – коэффициенты сил действующих на сферу вдоль осей  $x$  и  $y$ ). Зависимости  $C_l$  и коэффициента сопротивления сферы  $C_d$  от  $Re$  даются ниже

Re	200	203	210	220	230	250	270
$C_l$	0.000	0.029	0.045	0.058	0.064	0.065	0.076
$C_d$	0.772	0.768	0.758	0.747	0.734	0.702	0.691

Рассмотрим на фиг. 2 различные способы визуализации вихревой структуры двухнитевого следа. Иповерхность модуля завихренности (фиг. 2, а) не выделяет в следе ни нитей, ни деформированного кольца. Из сравнения изолиний  $\lambda_2$  и линий тока в плоскости симметрии следа (фиг. 2, д) ясно, что верхний локальный минимум  $\lambda_2$  не соответствует верхнему устойчивому фокусу в картине линий тока, а принадлежит оболочке



Фиг. 4. Цепочка вихревых петель в следе за сферой при  $Re = 280$ ; изоповерхности  $Im(\sigma_{1,2}) = 0.02$  в течение периода:  $a-b - t = 1496.4, 1504.4$  (сетка  $120 \times 60 \times 120$ )

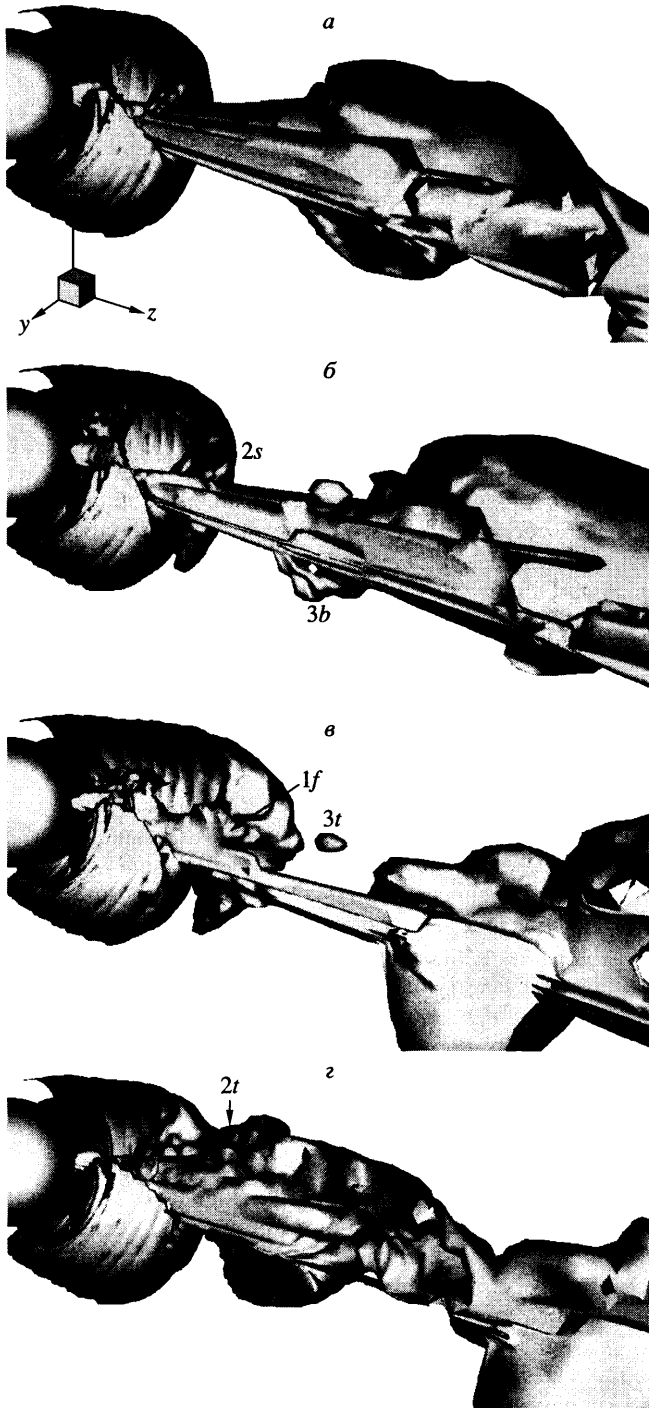
следа. Поэтому для корректного восприятия вихревой структуры следа, визуализированной при помощи изоповерхности  $\lambda_2 = -2 \cdot 10^{-5}$  на фиг. 2, б, надо мысленно разрезать эту изоповерхность на две части плоскостью тока, выходящей из линии первичного отрыва (фиг. 2, д, 3, б). Одна часть будет соответствовать оболочке следа, а другая часть – деформированному кольцу. При этом линия разреза довольно четко просматривается на изоповерхностях  $\lambda_2$  и  $Im(\sigma_{1,2})$  (фиг. 2, б, в).

Изоповерхность  $Im(\sigma_{1,2}) = 0.005$  на фиг. 2 охватывает больший объем, чем изоповерхность  $\lambda_2$ . При этом вскрывается более сложная топология вихревой структуры рециркуляционной области (фиг. 2, в, з). На фиг. 2, з в плоскости симметрии следа наблюдаются три локальных максимума  $Im(\sigma_{1,2})$ , два из которых лежат на верхней и нижней границах рециркуляционной области, а третий примерно совпадает с нижним фокусом в картине линий тока и с нижним локальным минимумом давления (фиг. 3, в). На фиг. 2, д – два локальных минимума  $\lambda_2$ , верхний принадлежит оболочке, а нижний примерно соответствует нижнему фокусу в картине линий тока. Следовательно, топологии изоповерхностей  $Im(\sigma_{1,2})$  и  $\lambda_2$  на фиг. 2 не совпадают. Так как функция  $Im(\sigma_{1,2})$  имеет ясный физический смысл (см. разд. 2), в отличие от функции  $\lambda_2$ , то предпочтительнее использовать именно  $Im(\sigma_{1,2})$  для визуализации пространственных вихревых структур в следе.

**5. Нестационарный “волнообразный” двухнитевой след ( $270 < Re \leq 290$ ).** При  $200 < Re \leq 270$  через некоторое время после введения возмущения в рассчитанное осесимметричное течение устанавливается равновесие между количествами жидкости, подпитывающей верхний фокус и проходящей по сердцевине деформированного кольца и далее вниз по течению (фиг. 3, а) (см. разд. 4). При  $Re > 270$  такого равновесия не наступает, а наблюдается установившийся периодический процесс формирования новых звеньев цепочки вихревых петель в следе за сферой (фиг. 4,  $\langle C_D \rangle = 0.683$ ,  $St = 0.133$ ,  $\langle C_L \rangle = 0.079$ , амплитуда колебаний  $\Delta C_L = 0.0042$ ).

Рассмотрим этот процесс в течение одного периода. Начнем с момента времени  $t = 1496.4$ , при котором  $C_L$  близок к своему минимальному значению. На фиг. 4, а в вихревой структуре течения можно выделить оболочку (окружающую рециркуляционную область), две основные петли (ориентированные вверх) и одну индуцированную петлю (направленную вниз). Надо проследить, как в течение одного периода появляются новые индуцированная и основная петли. Сначала две ножки первой основной петли (две нити, выходящие из рециркуляционной области и связанные с ее кольцом) генерируют во внешнем течении головную часть новой индуцированной петли и вытягивают вниз по течению боковые края оболочки (фиг. 5, б (3b и 2s)). В то же время в рециркуляцион-





Фиг. 5. Ближний след при  $Re = 280$ ; изоповерхности  $\text{Im}(\sigma_{1,2}) = 0.005$  в течение периода:  $a-g - t = 1496.4, 1500.4, 1504.4, 1507.4$ ; помечены области течения, где работают основные механизмы формирования вихрей:  $1f, 2s, 2t, 3t/b$

ной области из-за сдвиговой неустойчивости Кельвина – Гельмгольца зарождается новое кольцо R1 (фиг. 5, 6, а), верхняя часть которого при  $t = 1498.4$  исчезает, а при  $t = 1498.9$  появляется вновь (фиг. 5, 6, б).

Далее обновленное новое кольцо развивается и встает на место постепенно исчезающего предыдущего кольца рециркуляционной области (фиг. 5, 6, в, г). Этот процесс в картине мгновенных линий тока характеризуется увеличением верхнего фокуса (верхней части нового кольца) за счет дополнительной подпитки его жидкостью, прошедшей над сферой (фиг. 6, г, а). В то же время развитие обновленного нового кольца сопровождается образованием новых нитей, связанных с ним (фиг. 5, в (1f)), и генерацией во внешнем течении (над ножками первой петли) зародыша головной части нарождающейся (новой основной) петли (фиг. 5, в (3t)). По мере развития новых нитей, соединенных с новым кольцом, связь ножек первой петли с исчезающим предыдущим кольцом рециркуляционной области пропадает (фиг. 5, в). Затем верхний край оболочки свертывается, отрывается и исчезает (фиг. 5, г (2t), б, в, г), и завершается формирование новой основной петли (фиг. 5, г, а).

В описанном периодическом процессе можно выделить пять основных механизмов формирования вихрей, которые работают в трех различных областях течения (рециркуляционной области (D1), оболочке (D2) и внешнем течении (D3)):

1k) генерация кольца (или полукольца) в D1 у поверхности сферы из-за сдвиговой неустойчивости Кельвина-Гельмгольца (фиг. 5, 6, а);

1f) образование в D1 двух нитей (ножек нарождающейся петли), связанных с этим кольцом (фиг. 5, в, г);

2s) вытягивание боковых краев оболочки D2 вниз по течению (фиг. 5, б);

2t/b) свертывание и отрыв верхнего или нижнего краев D2 (фиг. 5, 6, в, г);

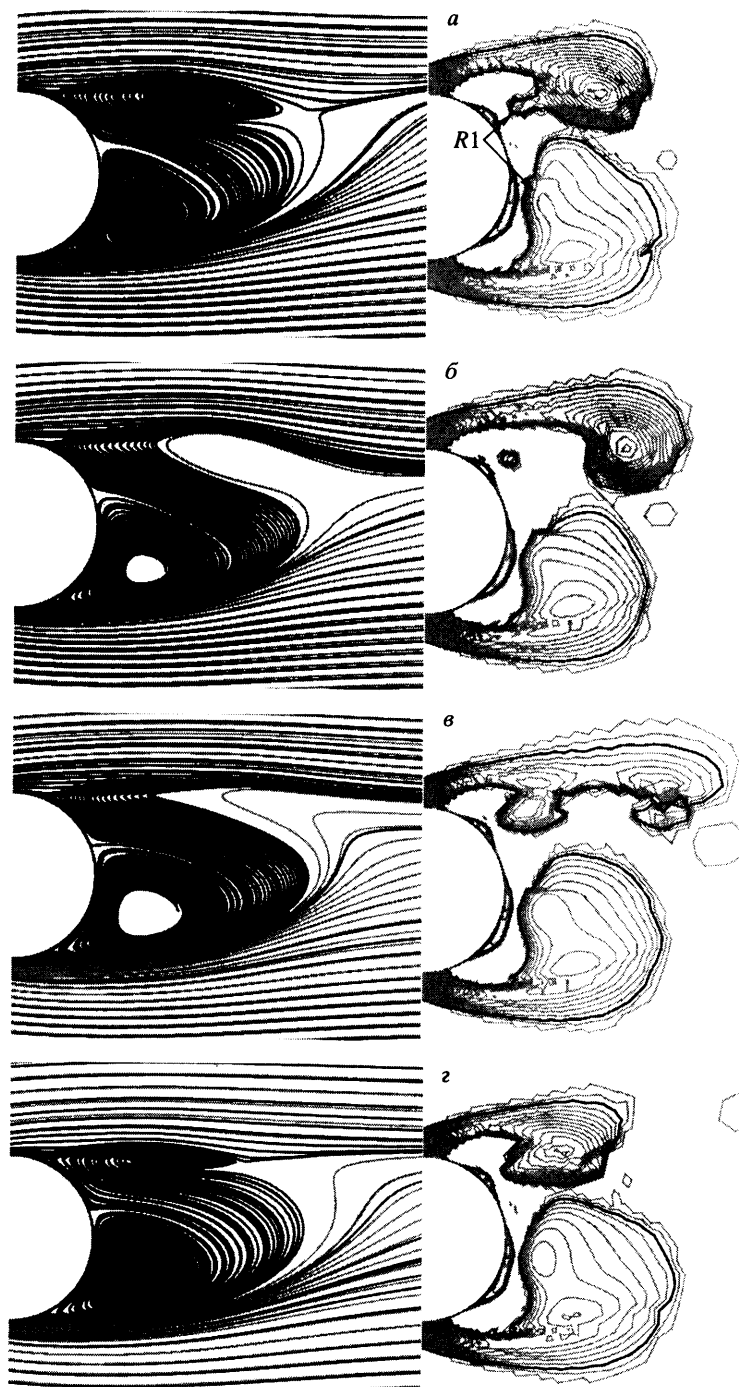
3t/b) генерация в D3 головной части петли, ориентированной вверх или вниз (фиг. 5, в и б); процессы 2s, 2t, 2b, 3t, 3b индуцированы нитями, выходящими из D1.

Таким образом, детальный механизм формирования вихрей в следе за сферой в течение одного периода при  $270 < Re \leq 290$  можно символически записать как  $M\{1k-2s-1k-3b\}-\{1f-3t-2t\}$  (где фигурными скобками выделены механизмы, происходящие в первой и второй половинах периодов). В рассматриваемом диапазоне чисел  $Re$  в экспериментах [2, 5] наблюдался “волнообразный” двухнитевой след, который соответствует нитям на фиг. 4, 5. Головные части петель следа не видны в экспериментах [2, 5] (при помощи частиц краски, стартующих с поверхности сферы), так как они были индуцированы во внешнем течении, а не отрывались от краев оболочки.

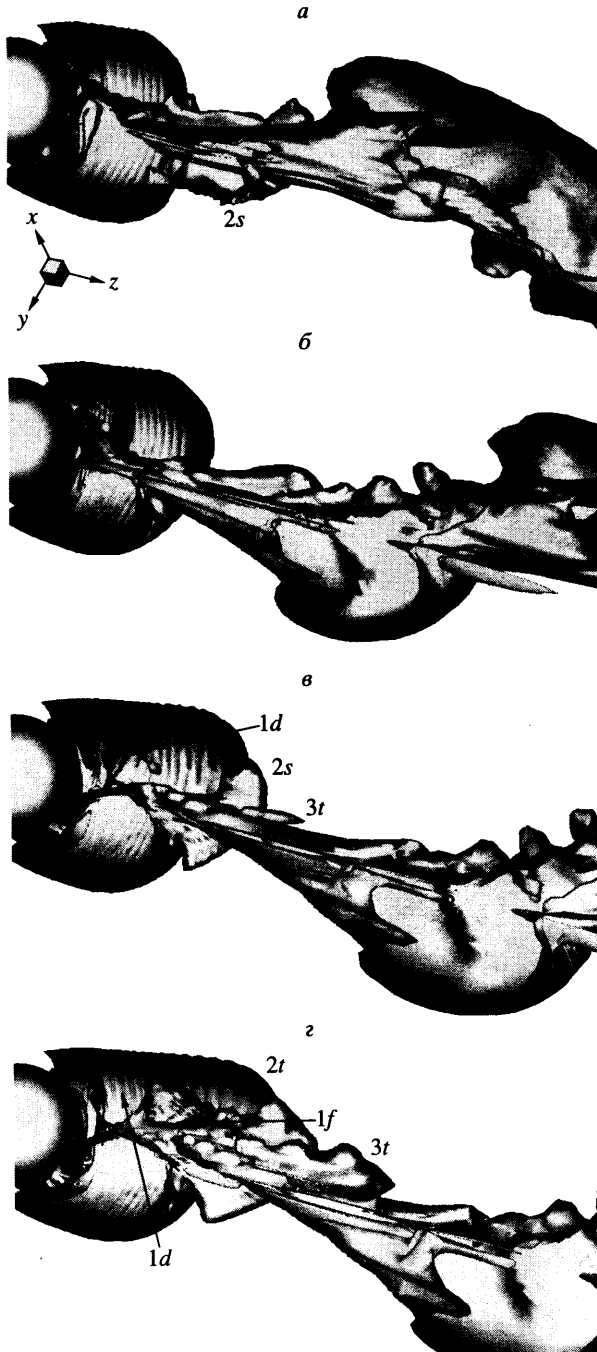
Возвращаясь к сравнению двух методов визуализации вихрей в следе, стоит отметить, что при  $270 < Re \leq 290$   $\lambda_2$ -методика не идентифицирует верхнюю часть кольца R1 [11].

Вернемся теперь к прямолинейному двухнитевому следу, а точнее к процессу его формирования (см. разд. 4). Если при  $200 < Re \leq 211$  после введения возмущения осесимметричное кольцо деформируется и структура течения далее не меняется со временем, то при  $211 < Re \leq 270$  после первоначальной деформации осесимметричного кольца в рециркуляционной области генерируется ряд новых колец. Этот периодический процесс затухает со временем и его можно описать как  $M\{1k-2s-1k-3b\}-\{1f-3t\}$  (так как не наблюдается отрыв верхнего края оболочки). Продолжительность этого процесса усталовления растет с увеличением  $Re$  (при  $Re = 250$  зарождается три новых кольца, а при  $Re = 270 - 35$  колец).

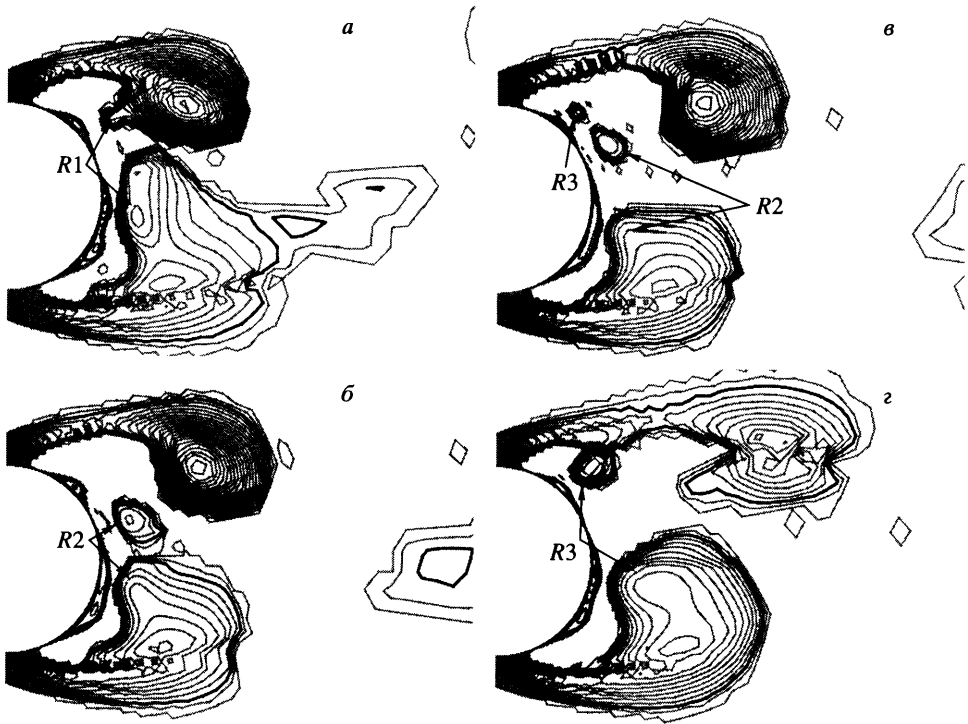
**6. Детальный механизм формирования вихрей при  $Re = 350$ .** Рассмотрим теперь детальный механизм формирования новых индуцированной и основной петель в течение одного периода при  $Re = 350$  (фиг. 7,  $\langle C_d \rangle = 0.627$ ,  $St = 0.133$ ,  $\langle C_l \rangle = 0.068$ ,  $\Delta C_l = 0.033$ ). Здесь также начнем рассмотрение с такого момента времени  $t = 882$ , при котором  $C_l$  близок к своему минимальному значению. В силу схожести на большей части периода



Фиг. 6. Мгновенные линии тока и изолинии  $\text{Im}(\sigma_{1,2}) > 0$  (шаг 0.04) при  $\text{Re} = 280$  в плоскости симметрии следа:  $a-g - t = 1496.4, 1500.4, 1504.4, 1507.4$



Фиг. 7. Ближний след при  $Re = 350$ ; изоповерхности  $Im(\sigma_{1,2}) = 0.02$  в течение периода:  $a-t = 882, 886.5, 889.5, 891$  (сетка  $180 \times 90 \times 180$ ); помечены основные механизмы:  $1d, 1f, 2s, 2t, 3t$



Фиг. 8. Ближний след за сферой при  $Re = 320$ ; изолинии  $Im(\sigma_{1,2}) > 0$  (шаг 0.04) в плоскости симметрии следа в течение периода:  $a-g - t = 453, 455, 456.5, 460$  (сетка  $120 \times 60 \times 120$ )

механизмов формирования петель при  $Re = 320$  и  $350$  используем фиг. 8 ( $Re = 320$ ) для дополнительной иллюстрации процессов, происходящих при  $Re = 350$ .

При  $t = 882$  зарождается новое кольцо R1 (фиг. 7, 8,  $a$  (1k)), верхняя часть которого исчезает уже при  $t = 883.5$ . При  $Re = 350$  размеры верхнего и нижнего фокусов в картине мгновенных линий тока в плоскости симметрии следа естественно увеличиваются по сравнению с  $Re = 280$  (фиг. 6,  $a$ ). Кроме того, при  $t = 882$  нет притока в рециркуляционную область жидкости, прошедшей под сферой, что связано с формированием в этой области второго нового кольца R2 (фиг. 8,  $б$ ), соединенного с ножками первой основной петли. Эти ножки формируют новую индуцированную петлю, вытягивая боковые края оболочки вниз по течению (фиг. 7,  $a$  (2s)). При этом ножки новой индуцированной петли связаны с основным кольцом рециркуляционной области (фиг. 7,  $б$ ).

Далее верхняя часть кольца R2 генерирует третье новое полукольцо R3 в верхней части рециркуляционной области и исчезает (фиг. 7,  $б$ , 8,  $в$ ). Затем, полукольцо R3 соединяется с оболочкой (фиг. 7,  $в$ ), а ножки индуцированной петли формируют во внешнем течении зародыш головной части нарождающейся (новой основной) петли и вытягивают боковые края оболочки вниз по течению (фиг. 7,  $в$ ,  $г$  ( $3t$  и  $2s$ )); а верхняя часть основного кольца рециркуляционной области расщепляется на две части, левая часть сдвигается к сфере и соединяется с оболочкой (фиг. 7,  $в$ ,  $г$  (1d)), превращаясь в четвертое новое кольцо. При этом ножки новой индуцированной петли связаны уже с правой частью основного кольца, а развитие четвертого нового кольца сопровождается образованием нитей (ножек нарождающейся (новой основной) петли), связанных с четвертым коль-

Re	M1	M2	№ фигуры
[270, 290]	$\langle 1k-2s-1k \rangle - 3b$	$\langle 1f-3t-2t \rangle$	5, 6
290	$\langle 1k \rangle - 1k - \langle 2s-1k \rangle - 3b$	$\langle 1f-3t-2t \rangle$	-
[290, 320]	$\langle 1k \rangle - 2s - 1k - \langle 1k \rangle$	$\langle 2s \rangle - \langle 1f-3t-2t \rangle$	8
[320, 380]	$\langle 1k \rangle - 2s - 1k - \langle 1k \rangle$	$\langle 2s \rangle - 1d - \langle 1f-3t-2t \rangle$	7

цом (фиг. 7,  $z$  (1f)). В то же время наблюдается свертывание и отрыв верхнего края обложки (фиг. 7,  $z$  (2t)).

Таким образом, детальный механизм формирования вихрей в следе за сферой в течение одного периода при  $Re = 350$  можно символически записать как  $M\{\langle 1k \rangle - 2s - 1k - \langle 1k \rangle\} - \{\langle 2s \rangle - 1d - \langle 1f-3t-2t \rangle\}$  (в угловых скобках помещены те механизмы, которые наблюдались и при  $Re = 280$ ). Использование  $\lambda_2$ -методики для визуализации динамики вихревых структур следа при  $Re = 350$  дает тот же самый детальный механизм [10, 11]. Здесь появился новый (шестой) основной механизм формирования вихрей:

1d) сдвиг основного кольца рециркуляционной области к сфере (фиг. 7,  $v$ ,  $z$ ).

Несмотря на многочисленные сложные процессы, происходящие при  $Re = 350$  в рециркуляционной области, картина мгновенных линий трения на тыльной части поверхности сферы слабо меняется в течение периода. Происходят лишь незначительные колебания задней критической точки (фиг. 3, б). Проведенные методические расчеты при  $Re = 350$  на различных сетках  $60 \times 36 \times 72$ ,  $120 \times 60 \times 120$  и  $180 \times 90 \times 180$  показали сохранение топологии течения и детального механизма формирования вихрей.

В эксперименте [4] при  $300 < Re < 420$  (фиг. 1) не визуализируются головные части индуцированных петель (ориентированных вниз на фиг. 7, б), а ножки этих петель принимаются за продолжение ножек основных петель (направленных вверх на фиг. 7, б). Примерно такой же эффект наблюдается и в настоящей работе при рассмотрении изоповерхностей с большим значением  $\text{Im}(\sigma_{1,2}) = 0.05$ . С учетом этого замечания, полученная топология вихревого течения в следе за сферой при  $Re = 350$  совпадает с представленной на фиг. 1. Интегральные характеристики течения при  $Re = 350$  также хорошо согласуются с [1, 4, 5].

**7. Три нестационарных режима течений при  $270 < Re \leq 380$ .** При увеличении числа Рейнольдса с 270 до 380 механизм формирования вихрей сильно изменяется (см. таблицу). При  $Re = 290$  в зачаточном состоянии в течение  $\Delta t \approx 1$  наблюдается существование второго нового кольца. При дальнейшем возрастании числа Рейнольдса (вплоть до  $Re = 320$ ) верхняя часть второго нового кольца увеличивается и генерирует третье новое кольцо, которое превращается потом в основное кольцо (фиг. 8,  $v$ ,  $z$ ). При этом, механизм 3b заменяется на 2s, так как индуцированная петля при  $270 < Re \leq 290$  начинает формироваться со своей головной части (см. разд. 5), а при  $290 < Re \leq 320$  – с ножек (см. раздел 6). При  $Re = 320$  в зачаточной стадии уже наблюдается сдвиг левой части основного кольца к сфере (механизм 1d) (фиг. 8,  $z$ ).

Таким образом, механизмы формирования вихрей при  $270 < Re \leq 290$ ,  $290 < Re \leq 320$  и  $320 < Re \leq 380$  существенно различаются. Иными словами, при  $290 < Re \leq 320$  обнаружен новый режим течения, так как ранее считалось, что при  $290 < Re \leq 380$  реализуется один режим течения [2, 4, 5]. Новый режим течения характеризуется периодическим формированием второго нового кольца в рециркуляционной области. Это кольцо связано с ножками первой основной петли следа, а ножки формирующейся индуцированной петли связаны с основным кольцом рециркуляционной области. Следовательно, начиная с  $Re = 290$ , периодически наблюдаются четыре нити, выходящие из рециркуляционной

области (фиг. 7, б); тогда как при  $270 < Re \leq 290$  визуализируются только две нити (фиг. 5). При  $320 < Re \leq 380$  периодически происходит сдвиг части основного кольца к сфере; а при дальнейшем увеличении числа Рейнольдса индуцированные петли становятся “двойниками” основных петель (механизмы их формирования становятся одинаковыми, т.е. в течение периода реализуется механизм  $M\{\langle 2s \rangle - 1d - 1k - \{1f - 3b - 2b\}\} - \{\langle 2s \rangle - 1d - 1k - \{1f - 3t - 2t\}\}$ ).

При  $270 < Re < 375$  в следе за сферой наблюдается плоскостная симметрия. При этом осредненные по времени коэффициенты суммарной боковой силы  $\langle C_l \rangle$  и вращательного момента  $\langle C_{T,y} \rangle$  вокруг прямой, проходящей через центр сферы и перпендикулярной плоскости симметрии следа, отличны от нуля (например, при  $Re = 360$   $\langle C_l \rangle = 0.084$ ,  $\langle C_{T,y} \rangle = 0.0068$ ). При  $375 \leq Re \leq 380$  возникает медленное вращение оболочки вокруг линии движения сферы ( $St_{tot} = 0.0054, 0.0088$  для  $Re = 375, 380$ , соответственно). Аналогичное вращение с  $St_{tot} = 0.0067$  численно моделировалось в [24] при  $Re = 400$ . Таким образом, плоскостная симметрия следа теряется при  $Re = 375$ , тогда как в экспериментах [4, 5] – при  $Re = 420$ . Поэтому при  $Re < 375$  можно говорить о схожести полученных топологий вихревой структуры следа с экспериментальными [4, 5] (фиг. 1). Значения осредненных по времени коэффициентов  $C_d, C_l$  и числа  $St$  при  $Re < 375$  также хорошо согласуются с [1, 4, 5]

Re	270	280	290	300	320	350	360	375	380
St	0.125	0.133	0.140	0.145	0.148	0.133	0.150	0.183	0.183
$\langle C_l \rangle$	0.076	0.079	0.082	0.084	0.086	0.068	0.084	0.082	0.083
$\langle C_d \rangle$	0.691	0.683	0.675	0.669	0.654	0.627	0.630	0.622	0.619

При этом расчеты на более мелкой сетке  $180 \times 90 \times 180$  при  $Re = 350$  дают более точное совпадение с экспериментом. Полученное увеличение числа Струхала до 0.183 при  $375 \leq Re \leq 380$  связано с равномерным вращением оболочки (т.е. с потерей плоскостной симметрии следа). Аналогичное резкое возрастание числа  $St$  наблюдается и в экспериментах [4, 5] при потере плоскостной симметрии следа при  $Re > 420$ .

**Заключение.** Проведено математическое моделирование обтекания сферы равномерным на бесконечности потоком однородной несжимаемой вязкой жидкости при умеренных числах Рейнольдса ( $200 \leq Re \leq 380$ ). Система уравнений Навье – Стокса, описывающих течение, решалась при помощи конечно-разностного явного метода “Меранж”. Для визуализации вихревой структуры следа строились изоповерхности двух функций: 1) мнимой части комплексно-сопряженных собственных значений тензора градиента скорости  $T$ , 2) второго собственного значения симметричного тензора, состоящего из суммы квадратов симметричной и антисимметричной частей тензора  $T$ .

Подробно описаны различные механизмы формирования вихрей в следе за сферой. При  $200 < Re \leq 270$  образуется стационарный прямолинейный двухнитевой след, при  $Re > 270$  – цепочка вихревых петель. Три нестационарных периодичных режима течения при  $270 < Re \leq 290$ ,  $290 < Re \leq 320$  и  $320 < Re \leq 380$  характеризуются различными механизмами формирования вихрей. При этом основные отличия наблюдаются в рециркуляционной области следа. При  $290 < Re \leq 320$  обнаружен новый режим течения, так как ранее считалось, что при  $290 < Re \leq 380$  реализуется один режим течения. Процесс формирования вихрей в течение периода представлен в виде определенной последовательности шести основных механизмов, работающих в трех различных областях течения (рециркуляционной области (D1), вихревой оболочке (D2) (окружающей D1) и внешнем течении (D3)): 1) генерация кольца (или полукольца) в D1; 2) образование в D1 двух нитей, связанных с этим кольцом; 3) сдвиг основного кольца в D1 к сфере; 4) вытягивание

боковых краев оболочки D2 вниз по течению; 5) отрыв верхнего или нижнего краев D2; 6) генерация в D3 головной части петли, ориентированной вверх или вниз.

Рассматриваемые течения характеризуются наличием плоскостной симметрии (при  $200 < Re < 375$ ) и отличными от нуля осредненными по времени коэффициентами суммарной боковой (подъемной) силы и вращательного момента вокруг прямой, проходящей через центр сферы и перпендикулярной плоскости симметрии следа. Это уникальное свойство течения может быть использовано на практике. По мере увеличения числа Рейнольдса с 270 до 380 растет амплитуда периодических азимутальных колебаний в рециркуляционной области, что приводит к потере плоскостной симметрии следа при  $Re = 375$ . Результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными и расчетами других авторов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00496, 04-01-08021), программы “Математическое моделирование” Президиума РАН и программы № 3 фундаментальных исследований ОМН РАН.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Roos F.W., Willmarth W.W.* Some experimental results on sphere and disk drag // *AIAA Journal*. 1971. V. 9. № 2. P. 285–291.
2. *Magarvey R.H., Bishop R.L.* Transition ranges for three-dimensional wakes // *Canad. J. Phys.* 1961. V. 39. № 10. P. 1418–1422.
3. *Nakamura I.* Steady wake behind a sphere // *Phys. Fluids*. 1976. V. 19. № 1. P. 5–8.
4. *Sakamoto H., Haniu H.* A study on vortex shedding from spheres in a uniform flow // *Trans. ASME: J. Fluids Engng.* 1990. V. 112. № 4. P. 386–392.
5. *Sakamoto H., Haniu H.* The formation mechanism and shedding frequency of vortices from a sphere in uniform shear flow // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 287. P. 151–171.
6. *Shirayama S., Kuwahara K.* Patterns of three-dimensional boundary layer separation // *AIAA Paper*. 1987. № 87–0461.10p.
7. *Dallmann U., Schulte-Werning B.* Topological changes of axisymmetric and non-axisymmetric vortex flows // *IUTAM Symposium on Topological Fluid Mech.*, August, 1989. Cambridge, UK.
8. *Johnson T.A., Patel V.C.* Flow past a sphere up to a Reynolds number of 300 // *J. Fluid Mech.* 1999. V. 378. P. 19–70.
9. *Gushchin V.A., Kostomarov A.V., Matyushin P.V., Pavlyukova E.R.* Direct numerical simulation of the transitional separated fluid flows around a sphere and a circular cylinder // *J. Wind Eng. Industr. Aerodynamics*. 2002. V. 90 № 4–5. P. 341–358.
10. *Гуцин В.А., Матюшин П.В.* Классификация режимов отрывных течений жидкости около сферы при умеренных числах Рейнольдса // *Математическое моделирование: проблемы и результаты*. М.: Наука, 2003. С. 199–235.
11. *Матюшин П.В.* Численное моделирование пространственных отрывных течений однородной несжимаемой вязкой жидкости около сферы: Дис. ... соиск. ученой степени канд. физ.-мат. наук. М., 2003. 194 с.
12. *Gushchin V.A., Kostomarov A.V., Matyushin P.V.* 3D Visualization of the Separated Fluid Flows // *J. Visualization*. 2004. V. 7. № 2. P. 143–150.
13. *Chong M.S., Perry A.E., Cantwell B.J.* A general classification of three-dimensional flow field // *Phys. Fluids*. 1990. V. A 2. № 5. P. 765–777.
14. *Jeong J., Hussain F.* On the identification of a vortex // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 285. P. 69–94.
15. *Tomboulides A.G.* Direct and large-eddy simulation of wake flows: flow past a sphere. PhD Thesis. Princeton, № 5. Princeton Univ., 1993.
16. *Natarajan R., Acrivos A.* The instability of the steady flow past spheres and disks // *J. Fluid Mech.* 1993. V. 254. P. 323–344.
17. *Lee S.* A numerical study of the unsteady wake behind a sphere in a uniform flow at moderate Reynolds numbers // *Computers and Fluids*. 2000. V. 29. № 6. P. 639–667.
18. *Mittal R., Najjar F.M.* Vortex dynamics in the sphere wake // *AIAA Paper*. 1999. 3806–99.



19. Белоцерковский О.М., Гуцин В.А., Коньшин В.Н. Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1987. V. 27. № 4. С. 594–609.
20. Gushchin V.A., Konshin V.N. Computational aspects of the splitting method for incompressible flow with a free surface // J. Computers and Fluids. 1992. V. 21. № 3. P. 345–353.
21. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Физматлит., 1994. 442 с.
22. Гуцин В.А., Матюшин П.В. Численное моделирование пространственных отрывных течений около сферы // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1997. V. 37. № 9. С. 1122–1137.
23. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. 331 с.
24. Kalro V., Tezduyar T. 3D computation of unsteady flow past a sphere with a parallel finite element method // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1998. V. 151. № 1/2. P. 267–276.

Москва  
Институт автоматизации проектирования РАН

Поступила в редакцию  
1.II.2006