

УДК 532.529

© 2006 г. В. М. АЛИПЧЕНКОВ, Л. И. ЗАЙЧИК

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ В ВЕРТИКАЛЬНОМ КАНАЛЕ

Представлены результаты моделирования статистических характеристик турбулентного движения частиц в вертикальном плоском канале. Модель основана на кинетическом уравнении для функции плотности вероятности скорости частиц. Выполнено сопоставление с данными прямых численных расчетов.

Ключевые слова: турбулентность, частицы, кинетическое уравнение, функция плотности вероятности, вертикальный канал, эффект аккумуляирования.

Существующие методы расчета двухфазных дисперсных турбулентных течений можно разделить на две группы. К первой группе относятся работы, основанные на лагранжевом траекторном описании дисперсной фазы – решении уравнений движения вдоль траекторий отдельных частиц. Учет в рамках такого подхода случайного характера движения частиц, обусловленного взаимодействием с турбулентными вихрями несущего потока, путем интегрирования динамических стохастических уравнений типа Ланжевена вдоль индивидуальных траекторий с последующим осреднением решений по ансамблю начальных данных приводит к существенному увеличению объема вычислений, так как для получения статистически достоверной информации необходимо использовать достаточно представительный ансамбль реализаций. Детерминированное лагранжево описание движения дисперсной фазы в турбулентном потоке на основе решения уравнений только для средних величин, т.е. без учета взаимодействия со случайными полями пульсаций скорости сплошной фазы, может быть оправданным (хотя и не всегда) только для очень инерционных частиц, время релаксации которых намного больше интегрального масштаба турбулентности и которые поэтому слабо вовлекаются в турбулентное движение. С уменьшением размера частиц репрезентативное число реализаций должно возрастать, так как увеличивается вклад взаимодействия частиц с вихрями все меньших размеров. Трудоемкость динамического лагранжева моделирования в значительной степени увеличивается в высококонцентрированных дисперсных потоках вследствие возрастания “запутанности” траекторий из-за столкновений частиц, а также при изменении числа (рождения или исчезновения) частиц в результате коагуляции, дробления, спонтанного зародышеобразования и т.д. Лагранжев траекторный подход позволяет получать детальную информацию о взаимодействии частиц с турбулентными вихрями, со стенками и друг с другом, однако требует очень больших затрат времени при расчете сложных течений, встречающихся в природных или промышленных условиях.

Другой метод моделирования основан на эйлеровом континуальном описании обеих фаз – на так называемых двухжидкостных моделях в рамках механики взаимопроникающих гетерогенных сред. Существенным преимуществом эйлерова континуального подхода по сравнению с лагранжевым траекторным моделированием является использование балансных уравнений одного типа для обеих фаз и соответственно единого алгоритма решения всей системы уравнений. Кроме того, описание динамики очень мелких частиц не вызывает никаких принципиальных трудностей, так как при стремлении

массы частицы к нулю осуществляется предельный переход к задаче о турбулентной диффузии безынерционной (пассивной) примеси. И, наконец, учет столкновений и изменения числа частиц в рамках континуального подхода не приводит к такому значительному росту объема и усложнению вычислений, как при лагранжевом моделировании.

В целом лагранжев траекторный и эйлеров континуальный методы моделирования дополняют друг друга, каждый из них имеет свои преимущества и недостатки и, следовательно, свои области приложения. Лагранжев метод применим для существенно неравновесных течений (крупные инерционные частицы, разреженные дисперсные среды), а эйлеров справедлив в условиях, близких к равновесным (мелкие малоинерционные частицы, концентрированные дисперсные среды). Ситуация с этими двумя подходами несколько напоминает известный дуализм “волна–частица” в микромире, поэтому в [1] был даже предложен гибридный лагранжево-эйлеров метод, сочетающий детальность лагранжева и эффективность эйлерова подходов к описанию дисперсной фазы.

Наиболее точная и детальная информация о структуре турбулентного двухфазного потока может быть получена на основе применения метода прямого численного моделирования (DNS) для несущей сплошной среды в сочетании с лагранжевым стохастическим подходом для дисперсной фазы. При прямом численном моделировании описывается весь спектр турбулентных вихрей, включая мелкомасштабные, ответственные за диссипацию энергии турбулентности. Однако DNS требует больших затрат времени даже при привлечении самых быстродействующих компьютеров и поэтому используется, главным образом, как численный эксперимент для валидации или калибровки более экономичных методов расчета турбулентных течений. В методе крупных вихрей (LES) проводится прямое моделирование только крупных вихрей, пространственный масштаб которых превышает размер численной сетки, а мелкомасштабные (подсеточные) моды оказываются вне пределов разрешимости и описываются полуэмпирическим путем. Метод LES применим для моделирования поведения частиц, время динамической релаксации которых много больше временного масштаба турбулентности [2–5]. Это ограничение вытекает из требования, чтобы вклад подсеточных флуктуаций (т.е. мелкомасштабной турбулентности) в статистику дисперсной фазы был пренебрежимо мал и определяющую роль играло взаимодействие частиц с крупномасштабными энергосодержащими турбулентными вихрями. Однако даже применение LES для сплошной среды в сочетании с лагранжевым стохастическим подходом для дисперсной фазы все равно может оказаться слишком дорогостоящим инструментом для практических приложений, поэтому в [6–10] развиваются перспективные методы, основанные на использовании DNS и LES в рамках континуального двухжидкостного подхода.

Наиболее последовательным методом построения континуальных моделей, т.е. получения системы уравнений гидродинамики для дисперсной фазы, является статистический подход на основе кинетических уравнений для функции плотности вероятности (ФПВ) скорости частиц в турбулентном потоке. Впервые такой подход для описания псевдотурбулентного течения дисперсной среды, флуктуации параметров которой обусловлены случайной конфигурацией частиц, был применен, по-видимому, в [11] на основе классического уравнения Фоккера–Планка. Кинетические уравнения для моделирования движения инерционных частиц в турбулентной сплошной среде были построены в [12–20]. Введение ФПВ позволяет сформулировать статистическое описание ансамбля частиц вместо динамического описания отдельных частиц на основе уравнений движения типа Ланжевена. Естественно, при статистическом моделировании на основе ФПВ происходит некоторая потеря информации в отношении индивидуальных особенностей поведения отдельных частиц. Однако эта “неполнота” динамической информации в поведении отдельных частиц компенсируется увеличением информации о статистических закономерностях движения коллектива частиц (дисперсной фазы в целом).

В [21] на основе кинетического уравнения построена статистическая континуальная модель движения и дисперсии инерционных частиц, учитывающая анизотропию лагранжевых автокорреляционных функций и временных масштабов турбулентности, и выполнено ее тестирование в однородном неограниченном турбулентном потоке с постоянной скоростью сдвига. В настоящей статье на основе развиваемой модели исследуется более сложное по сравнению с однородным потоком движение частиц – неоднородное ограниченное турбулентное течение в вертикальном плоском канале. Полученные результаты сравниваются с данными DNS и LES.

1. Уравнения для ФПВ и моментов. В результате моделирования турбулентного поля скорости несущего потока гауссовым случайным процессом с известными корреляционными моментами получено следующее кинетическое уравнение для одноточечной ФПВ распределения скорости частиц в сдвиговом турбулентном потоке [21]:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + v_i \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial v_i} \left[\left(\frac{U_i - v_i}{\tau_p} + F_i \right) P \right] = \lambda_{ij} \frac{\partial^2 P}{\partial v_i \partial v_j} + \mu_{ij} \frac{\partial^2 P}{\partial x_j \partial v_i} \quad (1.1)$$

$$\lambda_{ij} = \langle u'_i u'_k \rangle \left(\frac{f_{ukj}}{\tau_p} + l_{ukn} \frac{\partial U_j}{\partial x_n} + \tau_p m_{ukl} \frac{\partial U_n}{\partial x_l} \frac{\partial U_j}{\partial x_n} \right) - \frac{1}{2} \frac{D_p}{Dt} \langle u'_i u'_k \rangle \left(f_{u1kj} + \tau_p l_{u1kn} \frac{\partial U_j}{\partial x_n} \right) \quad (1.2)$$

$$\mu_{ij} = \langle u'_i u'_k \rangle \left(g_{ukj} + \tau_p h_{ukn} \frac{\partial U_j}{\partial x_n} \right) - \frac{\tau_p D_p}{2} \frac{\langle u'_i u'_k \rangle}{Dt} g_{u1kj} \quad (1.3)$$

$$\frac{D_p \langle u'_i u'_k \rangle}{Dt} = \frac{\partial \langle u'_i u'_k \rangle}{\partial t} + V_n \frac{\partial \langle u'_i u'_k \rangle}{\partial x_n} + \frac{\partial \langle u'_i u'_k v'_n \rangle}{\partial x_n}$$

где t – время, x_i – пространственная координата, v_i – скорость частиц, U_i – осредненная скорость сплошной несущей среды, τ_p – время динамической релаксации частиц, F_i – ускорение внешней силы (например, силы тяжести), $\langle u'_i u'_k \rangle$ – турбулентные напряжения в сплошной среде.

Коэффициенты $f_{u ij}$, $g_{u ij}$, $l_{u ij}$, $h_{u ij}$, $m_{u ij}$, $f_{1u ij}$, $g_{1u ij}$, $l_{1u ij}$ характеризуют степень вовлечения частиц в турбулентное движение сплошной среды. При использовании матричных обозначений эти коэффициенты записываются как

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_u &= \mathbf{M}_{u0}, \quad \mathbf{g}_u = \mathbf{N}_{u0} - \mathbf{f}_u, \quad \mathbf{f}_{u1} = \mathbf{M}_{u1}, \quad \mathbf{l}_u = \mathbf{g}_u - \mathbf{f}_{u1}, \quad \mathbf{h}_n = \mathbf{N}_{n1} + \mathbf{M}_{u1} - 2\mathbf{g}_u \\ \mathbf{m}_u &= \mathbf{N}_{u1} + 2\mathbf{M}_{u1} + \mathbf{M}_{u2} - 3\mathbf{g}_u, \quad \mathbf{g}_{u1} = \mathbf{N}_{u1} - \mathbf{f}_{u1}, \quad \mathbf{f}_{u2} = 2\mathbf{M}_{u2}, \quad \mathbf{l}_{u1} = \mathbf{g}_{u1} - \mathbf{f}_{u2} \\ \mathbf{M}_{un} &= \frac{1}{n! \tau_p^{n+1}} \int_0^\infty \Psi_{Lp}(\tau) \tau^n \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_p} \mathbf{I}\right) d\tau = \frac{(-1)^n}{n! \tau_p^{n+1}} \frac{d^n \mathbf{F}(s)}{ds^n} \\ \mathbf{N}_{un} &= \frac{1}{n! \tau_p^{n+1}} \int_0^\infty \Psi_{Lp}(\tau) \tau^n d\tau = \frac{(-1)^n}{n! \tau_p^{n+1}} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^n \mathbf{F}(s)}{ds^n} \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\mathbf{F}(s)$ обозначает преобразование Лапласа от автокорреляционной матрицы $\Psi_{Lp}(\tau)$ пульсаций скорости сплошной среды, определенной вдоль траектории частицы; \mathbf{I} – единичная матрица; $s = \tau_p^{-1}$.

Члены в левой и правой частях (1.1) описывают соответственно конвекцию и диффузию ФПВ в фазовом пространстве. Моделирование турбулентности при помощи гауссова процесса позволило выразить взаимодействие частицы с турбулентными вихрями в виде дифференциального (диффузионного) оператора второго порядка. Этот диффузионный оператор учитывает анизотропию временных масштабов турбулентности через коэффициенты вовлечения. Если пренебречь анизотропией масштабов турбулентности и вкладом в (1.2) и (1.3) транспортных членов, содержащих $D_p \langle u'_i u'_j \rangle / Dt$, то (1.1) переходит в кинетическое уравнение [16]. Эти транспортные члены, введенные впервые в [19], учитывают эффект переноса пульсаций скорости сплошной среды вследствие нестационарности, а также конвекции и диффузии вдоль траектории частицы. Без учета также членов с градиентами осредненных скоростей из (1.1) следует уравнение для ФПВ распределения скорости частиц в однородном бессдвиговом турбулентном потоке [12]. Следует отметить, что в некоторых исследованиях взаимодействие частиц с турбулентными вихрями сплошной среды описывалось таким же диффузионным оператором в подпространстве скоростей, как и в теории броуновского движения, а кинетическое уравнение по существу совпадало с классическим уравнением Фоккера–Планка. Однако это уравнение справедливо для описания δ -коррелированных во времени марковских процессов и, следовательно, действительно для моделирования движения частиц под действием случайной силы в виде так называемого белого шума. Таким образом, использование уравнения Фоккера–Планка оправдано только для очень инерционных частиц, время динамической релаксации которых значительно превышает временной макромасштаб турбулентности.

Кинетическое уравнение (1.1) получено при помощи функционального формализма, основанного на формуле Фурутцу–Донскера–Новикова для гауссова случайного поля. Для решения подобных задач этот метод применялся в [12, 15, 16, 17, 19, 21]. Некоторое различие подходов заключается в способе решения системы интегральных уравнений для функциональных производных. Если для получения (1.1) с учетом (1.2) и (1.3) используется метод итераций, что позволяет получить кинетическое уравнение в явной замкнутой форме, то в [15, 17] задача замыкания кинетического уравнения сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения для функции Грина. Оба подхода оказываются эквивалентными при больших временах по сравнению с интегральным временным масштабом турбулентности для квазиоднородных течений.

В литературе известны также другие методы построения кинетических уравнений для ФПВ распределений скорости и температуры частицы. Так, в [13] кинетическое уравнение построено с использованием принципа инвариантности к случайному галилееву преобразованию. В [14] получено кинетическое уравнение, описывающее движение частиц в неоднородной турбулентности, на основе суммирования прямых взаимодействий лагранжевым методом ренормализационной теории возмущений. Этот метод был использован также в [20] для вывода уравнения для совместной ФПВ распределений скорости и температуры частицы. Альтернативный метод построения замкнутого кинетического уравнения на основе разложения характеристического функционала в ряд по кумулянтам развит в [18]. При моделировании турбулентности гауссовыми случайными полями все три метода (функциональный формализм с учетом формулы Фурутцу–Донскера–Новикова, суммирование прямых взаимодействий и разложение по кумулянтам) приводят к эквивалентным кинетическим уравнениям для частиц.

Непосредственное решение кинетического уравнения представляет собой сложную задачу вследствие большой размерности фазового пространства. Более целесообразно, с вычислительной точки зрения, решение уравнений для нескольких первых моментов кинетического уравнения, хотя при этом, естественно, происходит некоторая потеря статистической информации о поведении частиц. Путем интегрирования (1.1) по подпространству скоростей может быть получена система континуальных уравнений для

осредненных одноточечных гидродинамических характеристик дисперсной фазы. Отметим, что определение осредненных характеристик дисперсной фазы путем интегрирования ФПВ в подпространстве скоростей подобно известному в теории однофазных сжимаемых турбулентных течений осреднению Фавра с учетом плотности в качестве весовой функции.

Соответствующие (1.1) уравнения для концентрации Φ , осредненной скорости V_i и вторых моментов пульсаций скоростей (турбулентных напряжений) $\langle v_i'v_j' \rangle$ дисперсной фазы имеют вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi V_k}{\partial x_k} = 0 \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = - \frac{\partial \langle v_i'v_k' \rangle}{\partial x_k} + \frac{U_i - V_i}{\tau_p} + F_i - \frac{D_{pik} \partial \ln \Phi}{\tau_p \partial x_k} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle v_i'v_j' \rangle}{\partial t} + V_k \frac{\partial \langle v_i'v_j' \rangle}{\partial x_k} + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi \langle v_i'v_j'v_k' \rangle}{\partial x_k} = \\ = - (\langle v_i'v_k' \rangle + \mu_{ik}) \frac{\partial V_j}{\partial x_k} - (\langle v_j'v_k' \rangle + \mu_{jk}) \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \lambda_{ij} + \lambda_{ji} - \frac{2 \langle v_i'v_j' \rangle}{\tau_p} \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} D_{pij} = \tau_p (\langle v_i'v_j' \rangle + \mu_{ij}) = \\ = \tau_p (\langle v_i'v_j' \rangle + \langle u_i'u_k' \rangle g_{ukj}) + \tau_p^2 \langle u_i'u_k' \rangle h_{ukn} \frac{\partial U_j}{\partial x_n} - \frac{\tau_p^2 D_p \langle u_i'u_k' \rangle}{2} \frac{D_t}{Dt} g_{u1kj} \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\Phi = \int P dv, \quad V_i = \frac{1}{\Phi} \int v_i P dv, \quad \langle v_i'v_j' \rangle = \frac{1}{\Phi} \int (v_i - V_i)(v_j - V_j) P dv$$

где $D_{p\ ij}$ – коэффициент турбулентной диффузии частиц.

С целью замыкания системы уравнений (1.5)–(1.8) привлекается градиентная алгебраическая аппроксимация для третьих моментов [22], вытекающая из соответствующего дифференциального уравнения при пренебрежении в нем транспортными членами и градиентами осредненной скорости, а также при использовании квазигатуссовой гипотезы для четвертых моментов

$$\langle v_i'v_j'v_k' \rangle = -\frac{1}{3} \left(D_{pin} \frac{\partial \langle v_i'v_k' \rangle}{\partial x_n} + D_{pjn} \frac{\partial \langle v_i'v_k' \rangle}{\partial x_n} + D_{pkn} \frac{\partial \langle v_i'v_j' \rangle}{\partial x_n} \right) \quad (1.9)$$

Третьи моменты, входящие в транспортный член $D_p \langle u_i'u_j' \rangle / Dt$, представляются как

$$\langle u_i'u_j'v_k' \rangle = -\frac{T_L}{3} \left(\langle u_i'u_n' \rangle \frac{\partial \langle u_j'u_l' \rangle f_{ulk}}{\partial x_n} + \langle u_j'u_n' \rangle \frac{\partial \langle u_i'u_l' \rangle f_{ulk}}{\partial x_n} + \langle u_k'u_l' \rangle f_{ulin} \frac{\partial \langle u_i'u_j' \rangle}{\partial x_n} \right) \quad (1.10)$$

где T_L – лагранжев интегральный масштаб турбулентности.

2. Система уравнений для вертикального канала. К настоящему времени выполнено довольно большое количество численных исследований дисперсных турбулентных течений в каналах (например, [23–26]). В этих исследованиях обнаружено образование повышенной концентрации частиц в пристеночной зоне турбулентного потока, теоретически предсказанное в [27]. В [28] показана определяющая роль когерентных турбулентных структур в аккумуляровании частиц и проанализированы механизмы

сегрегации в турбулентном пограничном слое. Возникает вопрос, возможен ли в рамках статистического континуального подхода эффективный учет вклада этих механизмов и взаимодействия частиц с когерентными структурами в явление аккумуляции.

Рассмотрим гидродинамически развитое течение в вертикальном плоском канале. Все характеристики сплошной и дисперсной фаз предполагаются автомодельными относительно продольной координаты x_1 и считаются зависимыми только от нормальной к стенке координаты $x_2 = y$. Стенки канала непроницаемы, а осаждение частиц отсутствует. Следовательно, нормальные компоненты осредненных скоростей обеих фаз равны нулю ($U_2 = V_2 = 0$), а уравнения баланса количества движения в продольном и нормальном направлениях, получающиеся из (1.6) и (1.8), запишутся в виде

$$\frac{V_1 - U_1}{\tau_p} + g + \frac{d\langle v_1' v_2' \rangle}{dy} + (\langle v_1' v_2' \rangle + \mu_{12}) \frac{d \ln \Phi}{dy} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{d\langle v_2'^2 \rangle}{dy} + (\langle v_2'^2 \rangle + \mu_{22}) \frac{d \ln \Phi}{dy} = 0 \quad (2.2)$$

где g – ускорение силы тяжести ($g > 0$ для восходящего движения и $g < 0$ для опускного движения). Последние два члена в левой части (2.1) учитывают вклад турбулентных напряжений и турбулентной диффузии в баланс сил в вертикальном направлении. Уравнение (2.2) выражает баланс силы турбофореза и диффузионной силы, уравновешивающей миграцию частиц поперек канала в направлении уменьшения интенсивности поперечной компоненты пульсаций скорости.

Из (1.7) с учетом (1.9) получается система уравнений для ненулевых компонент турбулентных напряжений дисперсной фазы

$$\frac{1}{3\Phi} \frac{d}{dy} \left\{ \Phi \tau_p \left[(\langle v_2'^2 \rangle + \mu_{22}) \frac{d\langle v_1'^2 \rangle}{dy} + 2(\langle v_1' v_2' \rangle + \mu_{12}) \frac{d\langle v_1' v_2' \rangle}{dy} \right] \right\} - \quad (2.3)$$

$$- 2(\langle v_1' v_2' \rangle + \mu_{12}) \frac{dV_1}{dy} + 2\lambda_{11} - \frac{2\langle v_1'^2 \rangle}{\tau_p} = 0$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d}{dy} \left[\Phi \tau_p (\langle v_2'^2 \rangle + \mu_{22}) \frac{d\langle v_2'^2 \rangle}{dy} \right] + 2\lambda_{22} - \frac{2\langle v_2'^2 \rangle}{\tau_p} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{3\Phi} \frac{d}{dy} \left[\Phi \tau_p (\langle v_2'^2 \rangle + \mu_{22}) \frac{d\langle v_3'^2 \rangle}{dy} \right] + 2\lambda_{33} - \frac{2\langle v_3'^2 \rangle}{\tau_p} = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{3\Phi} \frac{d}{dy} \left\{ \Phi \tau_p \left[2(\langle v_2'^2 \rangle + \mu_{22}) \frac{d\langle v_1' v_2' \rangle}{dy} + (\langle v_1' v_2' \rangle + \mu_{12}) \frac{d\langle v_2'^2 \rangle}{dy} \right] \right\} - \quad (2.6)$$

$$- (\langle v_2'^2 \rangle + \mu_{22}) \frac{dV_1}{dy} + \lambda_{12} + \lambda_{21} - \frac{2\langle v_1' v_2' \rangle}{\tau_p} = 0$$

Далее с целью упрощения лагранжей временной макромасштаб предполагается изотропным $T_{Lij} = T_L \delta_{ij}$, хотя имеются теоретические и численные исследования, свидетельствующие о довольно существенной анизотропии T_{Lij} в каналах (например, [29, 30]). Однако будет учитываться различие во времени взаимодействия частиц с турбулентными

вихрями T_{Lp} в разных направлениях, обусловленное “эффектом пересечения траекторий” [31, 32]. В результате появляется различие между продольной (в направлении x_1) T_{Lp}^l и поперечными (в направлениях x_2 и x_3) T_{Lp}^n компонентами T_{Lij} . С учетом принятых допущений величины λ_{ij} и μ_{ij} в (1.2) и (1.3) представляются как

$$\begin{aligned}
 \lambda_{11} &= \frac{f_u^l \langle u_1'^2 \rangle}{\tau_p} + f_u^n \langle u_1' u_2' \rangle \frac{dU_1}{dy} - \frac{1}{2} \left(f_{u_1}^l \frac{D_p \langle u_1'^2 \rangle}{Dt} + \tau_p f_{u_1}^n \frac{D_p \langle u_1' u_2' \rangle}{Dt} \frac{dU_1}{dy} \right) \\
 \lambda_{12} &= \frac{f_u^n \langle u_1' u_2' \rangle}{\tau_p} - \frac{f_{u_1}^n D_p \langle u_1' u_2' \rangle}{2 Dt} \\
 \lambda_{21} &= \frac{f_u^l \langle u_1' u_2' \rangle + f_u^n \langle u_2'^2 \rangle}{\tau_p} \frac{dU_1}{dy} - \frac{1}{2} \left(f_{u_1}^l \frac{D_p \langle u_1' u_2' \rangle}{Dt} + \tau_p f_{u_1}^n \frac{D_p \langle u_2'^2 \rangle}{Dt} \frac{dU_1}{dy} \right) \\
 \lambda_{22} &= \frac{f_u^n \langle u_2'^2 \rangle}{\tau_p} - \frac{f_{u_1}^n D_p \langle u_2'^2 \rangle}{2 Dt}, \quad \lambda_{33} = \frac{f_u^n \langle u_3'^2 \rangle}{\tau_p} - \frac{f_{u_1}^n D_p \langle u_3'^2 \rangle}{2 Dt} \\
 \mu_{11} &= g_u^l \langle u_1'^2 \rangle + \tau_p h_u^n \langle u_1' u_2' \rangle \frac{dU_1}{dy} - \frac{\tau_p g_{u_1}^l D_p \langle u_1'^2 \rangle}{2 Dt} \\
 \mu_{12} &= g_u^n \langle u_1' u_2' \rangle - \frac{\tau_p g_{u_1}^n D_p \langle u_1' u_2' \rangle}{2 Dt} \\
 \mu_{21} &= g_u^l \langle u_1' u_2' \rangle + \tau_p h_u^n \langle u_2'^2 \rangle \frac{dU_1}{dy} - \frac{\tau_p g_{u_1}^l D_p \langle u_1' u_2' \rangle}{2 Dt} \\
 \mu_{22} &= g_u^n \langle u_2'^2 \rangle - \frac{\tau_p g_{u_1}^n D_p \langle u_2'^2 \rangle}{2 Dt}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Производные $D_p \langle u_i' u_j' \rangle / Dt$, входящие в транспортные члены, в рассматриваемом случае, согласно (1.10), равны

$$\begin{aligned}
 \frac{D_p \langle u_1'^2 \rangle}{Dt} &= \frac{d \langle u_1'^2 v_2' \rangle}{dy} = -\frac{1}{3} \frac{d}{dy} \left[T_L \left(f_u^n \langle u_2'^2 \rangle \frac{d \langle u_2'^2 \rangle}{dy} + 2 \langle u_1' u_2' \rangle \frac{d f_u^n \langle u_1' u_2' \rangle}{dy} \right) \right] \\
 \frac{D_p \langle u_1' u_2' \rangle}{Dt} &= \frac{d \langle u_1' u_2' v_2' \rangle}{dy} = \\
 &= -\frac{1}{3} \frac{d}{dy} \left[T_L \left(f_u^n \langle u_2'^2 \rangle \frac{d \langle u_1' u_2' \rangle}{dy} + \langle u_1' u_2' \rangle \frac{d f_u^n \langle u_2'^2 \rangle}{dy} + \langle u_2'^2 \rangle \frac{d f_u^n \langle u_1' u_2' \rangle}{dy} \right) \right] \\
 \frac{D_p \langle u_2'^2 \rangle}{Dt} &= \frac{d \langle u_2'^2 v_2' \rangle}{dy} = -\frac{1}{3} \frac{d}{dy} \left[T_L \left(f_u^n \langle u_2'^2 \rangle \frac{d \langle u_2'^2 \rangle}{dy} + 2 \langle u_2'^2 \rangle \frac{d f_u^n \langle u_2'^2 \rangle}{dy} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\frac{D_p \langle u_3^2 \rangle}{Dt} = \frac{d \langle u_3^2 v_2' \rangle}{dy} = -\frac{1}{3} \frac{d}{dy} \left(T_{Lp} f_u^n \langle u_2^2 \rangle \frac{d \langle u_3^2 \rangle}{dy} \right)$$

В качестве граничных условий для компонент турбулентных напряжений на стенке канала зададим [19, 33, 34]

$$\tau_p \frac{d \langle v_1'^2 \rangle}{dy} = 3 \frac{1 - e_x^2 \left(\frac{2}{1 + e_x^2 (\pi \langle v_2'^2 \rangle)} \right)^{1/2} \langle v_1'^2 \rangle}{1 + e_x^2 \left(\frac{2}{\pi \langle v_2'^2 \rangle} \right)^{1/2}}, \quad \tau_p \frac{d \langle v_2'^2 \rangle}{dy} = 2 \frac{1 - e_y^2 \left(\frac{2 \langle v_2'^2 \rangle}{\pi} \right)^{1/2}}{1 + e_y^2 \left(\frac{2 \langle v_2'^2 \rangle}{\pi} \right)^{1/2}}, \quad \frac{d \langle v_3'^2 \rangle}{dy} = 0 \quad (2.9)$$

$$\langle v_1' v_2' \rangle = -\mu_x \langle v_2'^2 \rangle \quad \text{при } y = 0$$

На оси канала выполняются условия симметрии

$$\frac{d\Phi}{dy} = \frac{d \langle v_1'^2 \rangle}{dy} = \frac{d \langle v_2'^2 \rangle}{dy} = \frac{d \langle v_3'^2 \rangle}{dy} = \langle v_1' v_2' \rangle = 0, \quad y = R \quad (2.10)$$

где R – полуширина канала.

Для определения коэффициентов вовлечения в (2.7), (2.8), согласно (1.4), необходимо задать автокорреляционную функцию $\Psi_{Lp}(\tau)$. Наиболее часто автокорреляционная функция задается в виде экспоненциальной зависимости $\Psi_{Lp}(\tau) = \exp(-\tau T_{Lp}^{-1})$, хорошо аппроксимирующей экспериментальные данные и результаты прямого численного моделирования при относительно больших числах Рейнольдса за исключение области малых значений τ . С учетом того обстоятельства, что даже при больших значениях средне-массового числа Рейнольдса вблизи стенки (в области вязкого подслоя) число Re всегда небольшое, для вычисления коэффициентов вовлечения частиц в турбулентное движение жидкости используется двухмасштабная биекспоненциальная автокорреляционная функция, предложенная в [35]

$$\Psi_{Lp}^\zeta(\tau) = \frac{1}{2Z} \left\{ (1 + Z) \exp \left[-\frac{2\tau}{(1 + Z) T_{Lp}^\zeta} \right] - (1 - Z) \exp \left[-\frac{2\tau}{(1 - Z) T_{Lp}^\zeta} \right] \right\} \quad (2.11)$$

$$Z = (1 - 2z_\zeta^2)^{1/2}, \quad z_\zeta = \frac{\tau_T}{T_{Lp}^\zeta}, \quad \zeta = l, n$$

В (2.11) учитывается влияние инерционности частиц только на интегральные временные масштабы T_{Lp}^ζ , а дифференциальный масштаб принимается равным тейлоровскому временному масштабу τ_T . Тейлоровский микромасштаб τ_T предполагается изотропным и вычисляется на основе соотношений [36]

$$\tau_T = \left(\frac{2Re_\lambda}{15^{1/2} a_0} \right)^{1/2} \tau_k, \quad a_0 = \frac{a_{01} + a_{0\infty} Re_\lambda}{a_{02} + Re_\lambda}, \quad a_{01} = 11, \quad a_{02} = 205, \quad a_{0\infty} = 7$$

Здесь $Re_\lambda \equiv (20k^2/3\varepsilon v)^{1/2}$ – число Рейнольдса, основанное на тейлоровском пространственном микромасштабе; $k \equiv \langle u_n' u_n' \rangle / 2$ – кинетическая энергия турбулентности; $\tau_k \equiv (v/\varepsilon)^{1/2}$ – колмогоровский временной микромасштаб, ε – скорость диссипации турбулентной энергии; v – коэффициент кинематической вязкости. Правомочность использования изотропных соотношений для определения τ_T подтверждается данными DNS

для турбулентного течения в канале [29], свидетельствующими, что амплитуда флуктуаций ускорения a_0 практически изотропна.

Согласно (1.4), автокорреляционная функция (2.11) порождает коэффициенты вовлечения

$$\begin{aligned} f_u^\zeta &= \frac{2\Omega_\zeta + z_\zeta^2}{2\Omega_\zeta + 2\Omega_\zeta^2 + z_\zeta^2}, & g_u^\zeta &= \frac{1}{\Omega_\zeta} - f_u^\zeta \\ f_{u1}^\zeta &= \frac{(2\Omega_\zeta + z_\zeta^2)^2 - 2\Omega_\zeta^2 z_\zeta^2}{(2\Omega_\zeta + 2\Omega_\zeta^2 + z_\zeta^2)^2}, & l_u^\zeta &= g_u^\zeta - f_{u1}^\zeta \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $\Omega_\zeta \equiv \tau_p/T_{Lp}^\zeta$ – параметр инерционности частиц. При больших числах Рейнольдса ($z_\zeta \rightarrow 0$ при $Re_\zeta \rightarrow \infty$) коэффициенты вовлечения (2.12) переходят в соотношения [21], соответствующие экспоненциальной автокорреляционной функции.

Интегральные временные масштабы взаимодействия частиц с турбулентными вихрями определяются при помощи модели [37], основанной на известной гипотезе Коррсины о возможности независимого осреднения эйлеровых пульсаций скорости сплошной среды и смещений частиц [38]

$$\begin{aligned} T_{Lp}^l &= \left[J + \left(\frac{1}{1+m\gamma} - J \right) I \right] T_E \\ T_{Lp}^n &= \left[\frac{6(1+\gamma^2)^{1/2} + m(4+3\gamma^2)}{[6(1+\gamma^2)^{1/2}(1+m(1+\gamma^2)^{1/2})^2]^2} + \left(\frac{1}{1+m\gamma} - J \right) I \right] T_E \\ J &= \frac{3(1+\gamma^2)^{1/2} + m(2+3\gamma^2)}{3(1+\gamma^2)^{1/2}(1+m(1+\gamma^2)^{1/2})^2}, & I &= \frac{St_E}{1+St_E} - \frac{0.9mSt_E^2}{(1+St_E)^2(2+St_E)} \\ T_E &= \frac{3(1+m)^2}{3+2m} T_L, & \gamma &= \frac{|V_1 - U_1|}{(2k/3)^{1/2}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $St_E \equiv \tau_p/T_E$ – число Стокса, T_E – эйлеров интегральный временной масштаб турбулентности, $m \equiv u'T_E/L$ – структурный параметр турбулентности, $u' \equiv (2k/3)^{1/2}$ интенсивность пульсаций скорости, L – пространственный макромасштаб. Зависимости (2.13) описывают влияние эффекта пересечения траекторий, характеризуемого параметром дрейфа γ , и инерционности частиц, характеризуемого числом Стокса, на T_{Lp} . Нужно отметить, что влияние параметров γ и St_E на T_{Lp} , предсказываемое моделями [32] и [37] при $m = 1$, достаточно близкое. Однако модель [37] позволяет дополнительно учитывать влияние параметра m и столкновения частиц. Лагранжев интегральный временной масштаб задается аппроксимацией

$$T_L = \left(\frac{A^2 v^2}{u_*^4} + \frac{C_\mu k^2}{\varepsilon^2} \right)^{1/2}, \quad A = 10, \quad C_\mu = 0.09 \quad (2.14)$$

где u_* – динамической скорости (скорости трения), C_μ – постоянная Прандтля–Кармана. Как следует из (2.14), в вязком подслое $T_L = 10\nu/u_*^2$, что было получено в [39] и других

работах в результате анализа характеристик пристеночной турбулентности. По мере удаления от стенки (2.14) переходит в известное соотношение $T_L = C_\mu^{1/2} k/\epsilon$.

Время релаксации частицы определяется соотношениями

$$\tau_p = \frac{\tau_{p0}}{\Phi(\text{Re}_p)}, \quad \tau_{p0} = \frac{\rho_p d_p^2}{18\rho_f \nu}, \quad \Phi(\text{Re}_p) = \begin{cases} 1 + 0.15\text{Re}_p^{0.687}, & \text{Re}_p \leq 10^3 \\ 0.11\text{Re}_p/6, & \text{Re}_p > 10^3 \end{cases}$$

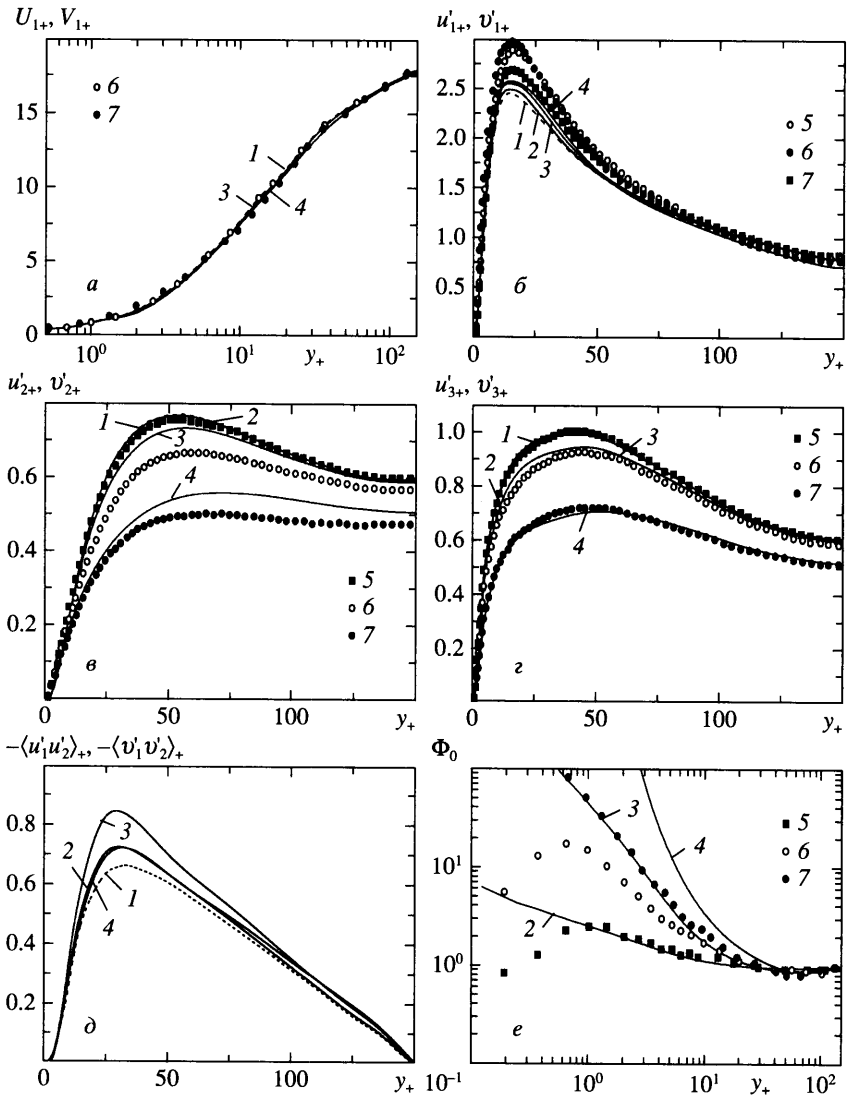
где τ_{p0} – время релаксации в стоксовом приближении ($\text{Re}_p \rightarrow 0$), d_p – диаметр частицы, ρ_f и ρ_p – плотности сплошной среды и материала частиц. Число Рейнольдса обтекания частицы $\text{Re}_p \equiv d_p |\mathbf{u} - \mathbf{v}_p|/\nu$ оценивается как

$$\text{Re}_p = \frac{d_p}{\nu} [(U_1 - V_1)^2 + 2(k + k_p - 2f_u^m k)]^{1/2}, \quad f_u^m = \frac{1}{3}(f_u^l + 2f_u^n)$$

Следует отметить, что если пренебречь эффектом пересечения траекторий (т.е. зависимостью временных масштабов взаимодействия частиц с турбулентными вихрями от параметра дрейфа γ) и влиянием числа Re_p на время релаксации частицы (т.е. принять $\tau_p = \tau_{p0}$), при отсутствии влияния частиц на характеристики несущей жидкости задача (2.1)–(2.10) расщепляется. В этом случае величины $\langle v_2'^2 \rangle$, $\langle v_3'^2 \rangle$ и Φ могут быть определены независимо от V_1 , $\langle v_1'^2 \rangle$ и $\langle v_1' v_2' \rangle$.

3. Результаты моделирования. Ниже представлены результаты численного решения системы уравнений (2.1)–(2.6) с граничными условиями (2.9) и (2.10). Рассмотрено влияние инерционности частиц и коэффициентов в граничных условиях. Во всех расчетах структурный параметр m принимался равным 0.5. С целью сравнения с данными DNS и LES проведены две серии расчетов: для малодисперсных частиц – сопоставление с [26] и для высокодисперсных частиц – [23–25]. В [26] сила тяжести отсутствовала, а расчеты [23–25] выполнены с учетом силы тяжести для опускного течения; обратное влияние частиц на турбулентность не учитывалось. Поскольку взаимодействие частиц со стенкой в этих работах считалось упругим, при сопоставлении с данными DNS и LES для коэффициентов в граничных условиях (2.9) принимались следующие значения: $e_x = e_y = 1$ и $\mu_x = 0$. Безразмерные переменные определены с помощью коэффициента кинематической вязкости жидкости ν и динамической скорости u_* : $U_{1+} = U_1/u_*$, $V_{1+} = V_1/u_*$, $u'_{i+} = \langle u_i'^2 \rangle^{1/2}/u_*$, $v'_{i+} = \langle v_i'^2 \rangle^{1/2}/u_*$, $y_+ = y u_*/\nu$, $\tau_+ = \tau_{p0} u_*^2/\nu$; концентрация частиц отнесена к своему значению на оси канала $\Phi^0 \equiv \Phi/\Phi(R)$.

Фигура 1 представляет собой распределения осредненной продольной скорости, всех ненулевых компонент турбулентных напряжений и концентрации частиц по сечению канала при относительно небольших значениях параметра инерционности τ_+ . Из фиг. 1, а видно, что осредненная скорость частиц V_1 даже при $\tau_+ = 25$ незначительно отличается от скорости несущей среды U_1 . В соответствии с [26] в области $1 < y_+ < 10$ скорость частиц немного превышает скорость жидкости, а при $10 < y_+ < 60$ имеет место обратная ситуация. Продольная компонента пульсаций скорости частиц v'_{1+} в пристеночной области превосходит интенсивность пульсаций скорости жидкости u'_{1+} и возрастает с увеличением τ_+ , хотя и не так значительно, как при прямом численном моделировании (фиг. 1, б). Нужно подчеркнуть, что, как следует из уравнений (2.3) и (2.6), имеются два механизма порождения продольной и касательной компонент турбулентных напряжений частиц: 1) генерация пульсаций за счет градиентов осредненных скоростей дисперс-



Фиг. 1. Распределения характеристик малоинерционных частиц (а-е) по сечению канала: 1 – жидкость; 2–7 – частицы; 2–4 – решения уравнений (2.1)–(2.6); 5–7 – [26]; 2, 5 – $\tau_+ = 1$; 3, 6 – $\tau_+ = 5$; 4, 7 – $\tau_+ = 25$

ной и сплошной фаз и 2) генерация в результате непосредственного взаимодействия частиц с турбулентными вихрями, учитываемая последними членами в уравнениях. Рост v'_{1+} с увеличением τ_+ объясняется градиентным механизмом порождения из осредненного движения. Напротив, поперечная v'_{2+} и трансверсальная v'_{3+} компоненты пульсаций снижаются по всему сечению канала с увеличением τ_+ (фиг. 1, в, г). Это обусловлено, согласно (2.4) и (2.5), с одной стороны, отсутствием градиентного механизма порождения поперечной и трансверсальной пульсаций, а с другой – уменьшением степени вовлечения частиц в пульсационное движение с ростом их инерционности. Абсолютное

значение касательной компоненты напряжений, как видно на фиг. 1, δ , с увеличением τ_+ вначале возрастает по всему сечению канала, благодаря вкладу генерации пульсаций за счет градиентов осредненных скоростей, а далее снижается вследствие уменьшения вовлечения частиц в пульсационное движение. Фигура 1, e свидетельствует об увеличении концентрации инерционных частиц в области вязкого подслоя вблизи стенки, где имеет место наиболее резкое изменение интенсивностей пульсаций скорости несущего потока. Как видно, теоретическая модель предсказывает, что поведение Φ при $y \rightarrow 0$ для не очень инерционных частиц может иметь сингулярный характер, что свидетельствует об аккумуляции частиц в области вязкого подслоя. Полученное в [26] падение Φ при $y \rightarrow 0$ для $\tau_+ = 1$ и 5 физически не очень понятно и, возможно, связано с недостаточным временем расчета для установления стационарного профиля концентрации частиц.

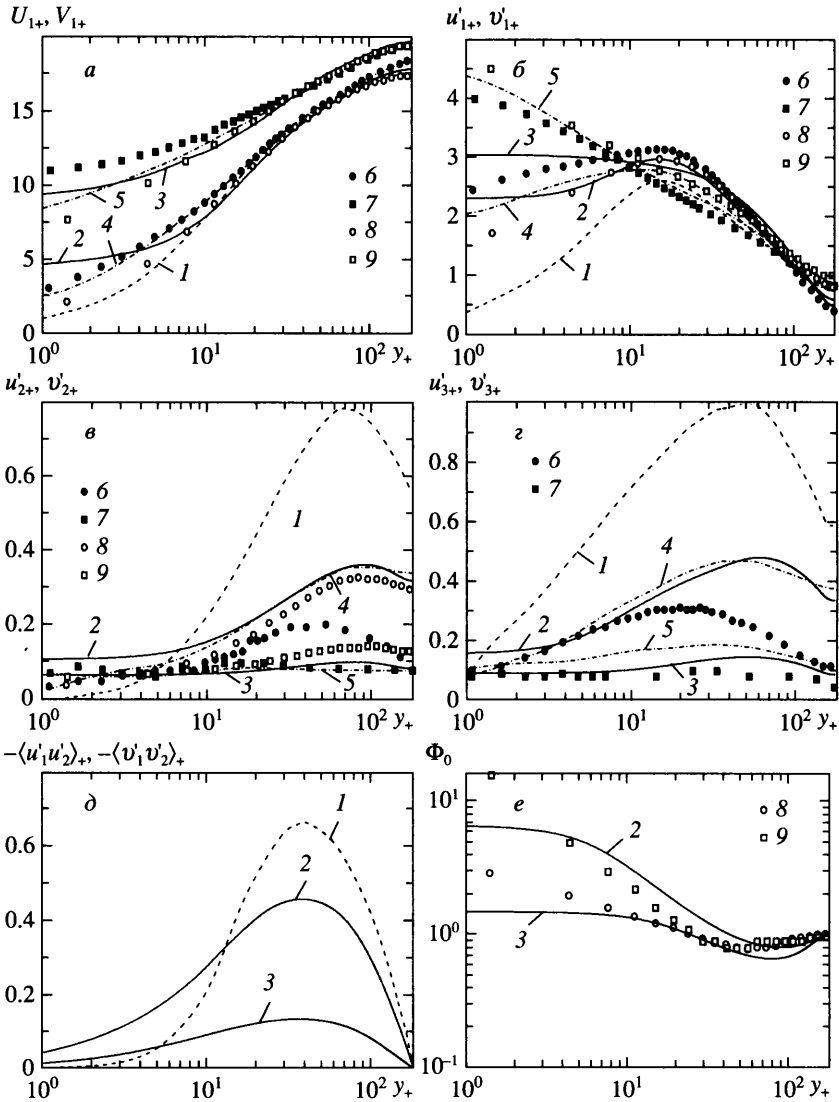
На фиг. 2 показаны распределения характеристик дисперсной фазы по сечению канала при больших значениях параметра инерционности τ_+ . Главной особенностью в поведении профиля осредненной скорости является его выполаживание с ростом инерционности частиц (фиг. 2, a), что отмечалось во многих экспериментальных и численных исследованиях. Из фиг. 2, b видно, что с увеличением τ_+ максимум v'_{1+} сдвигается к стенке, а интенсивность продольной компоненты пульсаций скорости на стенке возрастает. Для высокоинерционных частиц ($\tau_+ = 810$) наблюдается монотонное увеличение v'_{1+} в направлении от оси канала к стенке и максимум v'_{1+} расположен на самой стенке (хотя теоретическая модель (2.1)–(2.6) не дает таких больших значений максимума на стенке, как получены при численном моделировании). С ростом τ_+ профили v'_{2+} и v'_{3+} становятся более пологими и, благодаря интенсивному диффузионному переносу пульсаций скорости в поперечном направлении, стремятся к однородным распределениям. Асимптотические распределения поперечной и трансверсальная компонент пульсаций скорости в случае упругого взаимодействия частиц со стенкой, как следует из (2.4) и (2.5), при $\tau_+ \rightarrow \infty$ имеют вид

$$\langle v'_{i+} \rangle = \frac{1}{R} \int_0^R \frac{T_{LP}^n \langle u_i^2 \rangle}{\tau_p} dy, \quad i = 2, 3$$

Касательное напряжение снижается по всему сечению канала с увеличением τ_+ (фиг. 2, δ), что объясняется как снижением роли градиентного механизма порождения вследствие выполаживания осредненного профиля скорости, так и уменьшением вовлечения частиц в турбулентное движение. Фигура 2, e свидетельствует о снижении эффекта аккумуляции у стенки с ростом τ_+ для высокоинерционных частиц вследствие выполаживания профиля пульсаций скорости и соответственно уменьшения силы турбофореза.

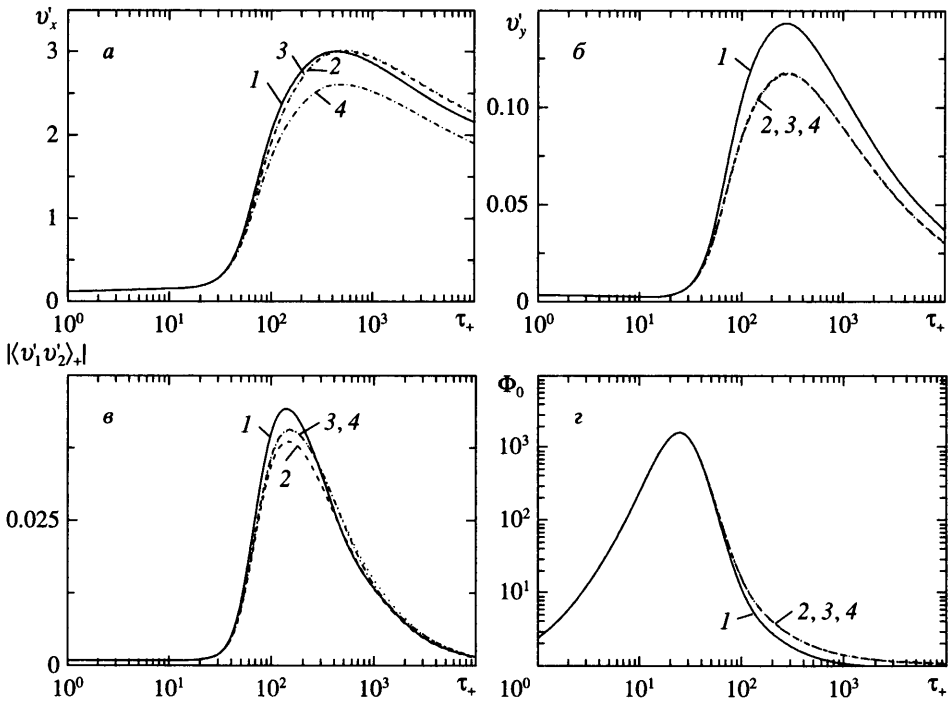
В целом, как следует из фиг. 1 и 2, модель (2.1)–(2.6) воспроизводит все эффекты, обнаруженные в численных экспериментах, как для малоинерционных, так и для высокоинерционных частиц.

Фигура 3 демонстрирует влияние параметра инерционности τ_+ на турбулентные напряжения и концентрацию частиц в вязком подслое при $y_+ = 1$. Видно, что все компоненты напряжений характеризуются наличием максимумов. Возрастание v'_{1+} , v'_{2+} и $|\langle v'_1 v'_2 \rangle_+|$ с ростом τ_+ объясняется увеличивающейся ролью диффузионного переноса пульсаций из области с высоким уровнем турбулентности в зону вязкого подслоя. Падение v'_{2+} с ростом τ_+ после достижения максимума связано со снижением интенсивности пульсаций скорости дисперсной фазы, так как более инерционные частицы меньше во-



Фиг. 2. Распределения характеристик высокоинерционных частиц (а-е) по сечению канала: 1 – жидкость; 2–9 – частицы; 2, 3 – решения уравнений (2.1)–(2.6); 4, 5 – [24]; 6, 7 – [23]; 8, 9 – [25]; 2, 4, 6, 8 – $\tau_+ = 117$; 3, 5, 7, 9 – $\tau_+ = 810$

влекаются в турбулентное движение сплошной среды. Уменьшение v'_{1+} и $|\langle v'_1 v'_2 \rangle_+|$ после достижения соответствующих максимумов дополнительно обусловлено выполаживанием профиля осредненной скорости, приводящим к уменьшению градиентного механизма порождения пульсаций. Безынерционные и очень инерционные частицы распределены в пространстве однородно с концентрацией, равной единице. Зависимость $\Phi^0(\tau_+)$ имеет максимум, однако он находится при меньших значениях τ_+ по сравнению с максимумами турбулентных напряжений.



Фиг. 3. Влияние инерционности на турбулентные напряжения (а-в) и концентрацию (г) частиц при $y_+ = 1$: 1 - $e_x = e_y = 1, \mu_x = 0$; 2 - $e_x = 1, e_y = 0.8, \mu_x = 0$; 3 - $e_x = 1, e_y = 0.8, \mu_x = 0.2$; 4 - $e_x = 5/7, e_y = 0.8, \mu_x = 0.2$

На фигуре 3 также показано влияние коэффициентов восстановления импульса e_x, e_y и трения μ_x на пульсации скорости и концентрацию частиц вблизи стенки. Прежде всего нужно отметить, что для малоинерционных частиц ($\tau_+ \leq 10$) влияние всех коэффициентов в граничных условиях отсутствует, поскольку в этом случае реализуются условия прилипания. Как видно из фиг. 3, а, вследствие потери импульса в продольном направлении v'_{1+} при столкновениях без скольжения ($e_x = 5/7$) оказывается меньшим, чем при столкновениях со скольжением и отсутствием трения ($e_x = 1$). Снижение коэффициента восстановления импульса в поперечном направлении e_y приводит к небольшому снижению v'_{1+} для среднеинерционных частиц и увеличению для высокоинерционных, а влияние коэффициента трения μ_x незначительно. Поскольку при отсутствии столкновений частиц поперечная компонента пульсаций скорости довольно слабо связана с другими переменными, то v'_{2+} сильно зависит только от e_y , а влияние e_x и μ_x слабое (фиг. 3, б). Очевидно снижение v'_{2+} с увеличением потери импульса сталкивающихся со стенкой частиц, т.е. с падением коэффициента восстановления e_y . Касательное напряжение довольно существенно зависит от коэффициентов e_y и μ_x , снижаясь с уменьшением e_y и увеличиваясь с ростом μ_x , а влияние e_x слабое (фиг. 3, в). Концентрация частиц вблизи стенки чувствительна, в первую очередь, к параметру e_y , определяющему взаимодействие частиц со стенкой в поперечном направлении. Из фиг. 3, г следует, что при наличии потери импульса сталкивающихся со стенкой частиц ($e_y < 1$) концентрация высоко-

инерционных частиц вблизи стенки может возрастать по сравнению со случаем упругого взаимодействия со стенкой. Увеличение аккумуляирования высокоинерционных частиц при неупругих соударениях по сравнению с упругими отмечено в [40] и объясняется накапливанием частиц в пристеночной области в результате потери импульса.

С целью некоторого упрощения представленной модели можно пренебречь вкладом “транспортных членов”, содержащих $D_p \langle u_i' u_k' \rangle / Dt$, в соотношениях (2.7). Расчеты показывают, что роль опущенных членов крайне мала и ее можно не учитывать.

Заключение. На основе кинетической модели в широком диапазоне изменения инерционности частиц проведен анализ статистических характеристик турбулентного движения дисперсной фазы в вертикальном плоском канале. Результаты сравнения с данными прямых численных расчетов позволяют сделать вывод, что представленная модель адекватно описывает как статистику поля скорости, так и эффект аккумуляирования частиц.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-08-01292).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pialat X., Simonin O., Villedieu P. Direct coupling between Lagrangian and Eulerian approaches in turbulent gas-particle flows // Proc. ASME Fluids Engineering Summer Conference. 2005, FEDS2005-77078. Houston, USA.
2. Armenio M., Piomelli U., Fiorotto V. Effect of subgrid scales on particle motion // Phys. Fluids. 1999. V. 11. № 10. P. 3030–3042.
3. Boivin M., Simonin O., Squires K.D. On the prediction of gas-solid flows with two-way coupling using large eddy simulation // Phys. Fluids. 2000. V. 12. № 8. P. 2080–2090.
4. Yamamoto Y., Potthoff M., Tanaka T., Kajishima T., Tsuji Y. Large-eddy simulation of turbulent gas-particle flow in a vertical channel: effect of considering inter-particle collisions // J. Fluid Mech. 2001. V. 442. P. 303–334.
5. Kuerten J.G.M., Vreman A.W. Can turbophoresis be predicted by large-eddy simulation? // Phys. Fluids. 2005. V. 17. № 1. P. 011701–1–011701–4.
6. Druzhinin O.A., Elghobashi S.E. Direct numerical simulation of bubble-laden turbulent flows using the two-fluid formulation // Phys. Fluids. 1998. V. 10. № 3. P. 685–697.
7. Ferry J., Balachandar S. A fast Eulerian method for disperse two-phase flow // Int. J. Multiphase Flow. 2001. V. 27. P. 1199–1226.
8. Pandya R.V.R., Mashayek F. Two-fluid large-eddy simulation approach for particle-laden turbulent flows // Int. J. Heat Mass Transfer. 2002. V. 45. P. 4753–4759.
9. Février P., Simonin O., Squires K.D. Partitioning of particle velocities in gas-solid turbulent flows into a continuous field and a spatially-uncorrelated random distribution: theoretical formalism and numerical study // J. Fluid Mech. 2005. V. 533. P. 1–46.
10. Moreau M., Bedat B., Simonin O. From Euler-Lagrange to Euler-Euler large-eddy simulation approaches for gas-particle turbulent flows // Proc. ASME Fluids Engineering Summer Conference. 2005, FEDS2005-77306. Houston, USA.
11. Buyevich Y.A. Statistical hydromechanics of disperse systems. Pt 1. Physical background and general equations // J. Fluid Mech. 1971. V. 49. № 3. P. 489–507.
12. Деревич И.В., Зайчик Л.И. Уравнение для плотности вероятности скорости и температуры частиц в турбулентном потоке, моделируемом гауссовым случайным полем // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 767–774.
13. Reeks M.W. On a kinetic equation for the transport of particles in turbulent flows // Phys. Fluids A. 1991. V. 3. № 3. P. 446–456.
14. Reeks M.W. On the continuum equation for dispersed particles in nonuniform flows // Phys. Fluids A. 1992. V. 4. № 6. P. 1290–1303.
15. Swailes D.C., Darbyshire K.F.F. A generalized Fokker-Plank equation for particle transport in random media // Physica A. 1997. V. 242. P. 38–48.
16. Зайчик Л.И. Моделирование движения частиц в неоднородном турбулентном потоке на основе уравнения для функции плотности вероятности // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 1. С. 132–138.

17. Hyland K.E., McKee S., Reeks M.W. Deviation of a pdf kinetic equation for the transport of particles in turbulent flows // J. Phys. A: Math. Gen. 1999. V. 32. P. 6169–6190.
18. Pozorski J., Minier J.-P. Probability density function modeling of dispersed two-phase turbulent flows // Phys. Rev. E. 1999. V. 59. № 1. P. 855–863.
19. Derevich I.V. Statistical modelling of mass transfer in turbulent two-phase dispersed flows. 1. Model development // Int. J. Heat Mass Transfer. 2000. V. 43. № 19. P. 3709–3723.
20. Pandya R.V.R., Mashayek F. Non-isothermal dispersed phase of particles in turbulent flow // J. Fluid Mech. 2003. V. 475. P. 205–245.
21. Алипченков В.М., Зайчик Л.И. Статистическая модель движения и дисперсии частиц в анизотропном турбулентном потоке // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 5. С. 70–83.
22. Zaichik L.I. A statistical model of particle transport and heat transfer in turbulent shear flows // Phys. Fluids. 1999. V. 11. № 6. P. 1521–1534.
23. Rouson D.W.I., Eaton J.K. Direct numerical simulation of particles interacting with a turbulent channel flow // Proc. 7th Workshop on Two-Phase Flow Predictions. 1994. Erlangen, Germany.
24. Wang Q., Squires K.D. 1996. Large eddy simulation of particle-laden turbulent channel flow // Phys. Fluids. V. 8. № 5. P. 1207–1223.
25. Fukagata K., Zahrai S., Bark F.H. Force balance in a turbulent particulate channel flow // Int. J. Multiphase Flow. 1998. V. 24. P. 867–887.
26. Picciotto M., Marchioli C., Reeks M.W., Soldati A. Statistics of velocity and preferential concentration of micro-particles in boundary layer turbulence // Nuclear Eng. and Design. 2005. V. 235. P. 1239–1249.
27. Reeks M.W. The transport of discrete particles in inhomogeneous turbulence // J. Aerosol Sci. 1983. V. 14. № 6. P. 729–739.
28. Marchioli C., Soldati A. Mechanisms for particle transport and segregation in a turbulent boundary layer // J. Fluid Mech. 2002. V. 468. P. 283–315.
29. Choi J., Yeo K., Lee C. Lagrangian statistics in turbulent channel flow // Phys. Fluids. 2004. V. 16. P. 779–793.
30. Oesterlé B., Zaichik L. I. On Lagrangian time scales and particle dispersion modeling in equilibrium turbulent shear flows // Phys. Fluids. 2004. V. 16. № 9. P. 3374–3384.
31. Csanady G.T. Turbulent diffusion of heavy-particles in the atmosphere // J. Atmos. Sci. 1963. V. 20. P. 201–208.
32. Wang L.-P., Stock D. E. Dispersion of heavy particles in turbulent motion // J. Atmos. Sci. 1993. V. 50. № 13. P. 1897–1913.
33. Sakiz M., Simonin O. Development and validation of continuum particle wall boundary conditions using Lagrangian simulation of a vertical gas-solid channel flow // Proc. 7th Int. Symp. on Gas-Solid Flows. ASME / FED. 1999. Paper № 7898.
34. Алипченков В.М., Зайчик Л.И., Симонин О. Сопоставление двух подходов к построению граничных условий для континуальных уравнений движения частиц в турбулентном потоке // Теплофизика высоких температур. 2001. Т. 39. № 1. С. 108–114.
35. Sawford B.L. Reynolds number effects in Lagrangian stochastic models of turbulent dispersion // Phys. Fluids A. 1991. V. 3. P. 1577–1586.
36. Zaichik L.I., Simonin O., Alipchenkov V.M. Two statistical models for predicting collision rates of inertial particles in homogeneous isotropic turbulence // Phys. Fluids. 2003. V. 15. № 10. P. 2995–3005.
37. Зайчик Л.И., Алипченков В.М. Время взаимодействия сталкивающихся частиц с турбулентными вихрями // Теплофизика и аэромеханика. 1999. Т. 6. № 4. С. 529–537.
38. Corrsin S. Progress report on some turbulent diffusion research // Advances in Geophysics. N.Y.: Acad. Press, 1959. V. 6. P. 161–184.
39. Kallio G.A., Reeks M.W. A numerical simulation of particle deposition in turbulent boundary layer // Int. J. Multiphase Flow. 1989. V. 15. № 3. P. 433–446.
40. Fukagata K., Zahrai S., Bark F.H., Kondo S. Influences of the near-wall drag correction in a Lagrangian simulation of particulate turbulent channel flow // Proc. 1st Int. Symposium on Turbulence and Shear Flow. 1999. Santa Barbara, USA. N.Y.: Begel House, p. 259–264.