МЕХАНИКА

ЖИДКОСТИ И ГАЗА

№ 4 • 2006

УДК 533.6.011.55

© 2006 г. И. Г. БРЫКИНА

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТОНКОГО ВЯЗКОГО УДАРНОГО СЛОЯ В РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ ДЛЯ ХОЛОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Исследуется обтекание затупленных тел гиперзвуковым потоком разреженного газа в переходном от континуального к свободномолекулярному течении. Путем асимптотического анализа выявлены три режима течения разреженного газа в зависимости от соотношения между определяющими параметрами задачи. Для первого режима, соответствующего холодной поверхности, получены асимптотические решения уравнений тонкого вязкого ударного слоя при малых числах Рейнольдса для осесимметричной и плоской задачи. Простые аналитические выражения для давления и коэффициентов теплопередачи и трения получены в зависимости от газодинамических параметров набегающего потока и геометрических параметров обтекаемого тела. Значения этих коэффициентов с уменьшением числа Рейнольдса приближаются к своим значениям в свободномолекулярном потоке. Найден параметр подобия гиперзвукового обтекания тел разреженным газом в рассматриваемом режиме. Проведены сравнения асимптотических решений с численными решениями и результатами расчета методом прямого статистического моделирования Монте-Карло.

Ключевые слова: гиперзвуковое течение, разреженный газ, малые числа Рейнольдса, коэффициенты трения и теплопередачи, тонкий вязкий ударный слой, асимптотическое решение.

Задачи гиперзвукового обтекания тел разреженным газом в переходном от континуального к свободномолекулярному режиме течения возникают при полете космических аппаратов в верхних слоях атмосферы Земли на высотах ~100 км и выше, а также при движении метеороидов, и характеризуются малыми числами Рейнольдса Re. В этом режиме обтекания большинство континуальных моделей – полные и параболизованные уравнения Навье – Стокса, вязкий ударный слой, пограничный слой [1] – дают коэффициенты теплопередачи и трения, которые с уменьшением числа Re беспредельно возрастают, превышая свои значения в свободномолекулярном потоке, поэтому в переходном режиме обтекания для решения таких задач обычно используется метод прямого статистического моделирования Монте-Карло [2–4] или применяются приближенные инженерные методики сращивания свободномолекулярного решения с погранслойным [4, 5]. Однако для расчета теплопередачи и аэродинамических коэффициентов на поверхности тела в переходном режиме возможен и континуальный подход – на основе использования модели тонкого вязкого ударного слоя, применимость которой для расчета этих параметров в переходном режиме была впервые отмечена в [6] для течения в окрестности точки торможения осесимметричного тела в случае нулевой температуры поверхности и линейной зависимости коэффициента вязкости от температуры. В дальнейшем применимость модели тонкого вязкого ударного слоя для переходного режима обтекания была показана в [7, 8] для течения в окрестности точки торможения пространственного тела в случае произвольной температуры поверхности и степенной зависимости коэффициента вязкости от температуры.

Данная работа является продолжением [7, 8], где исследовалось обтекание затупленного тела разреженным газом в окрестности пространственной точки торможения. В данной работе рассматривается двумерная задача гиперзвукового обтекания затупленных тел разреженным газом для осесимметричных и плоских течений. Путем асимптотического анализа выявлены три режима течения разреженного газа в зависимости от соотношения между определяющими параметрами задачи. Уравнения тонкого вязкого ударного слоя при малых числах Re для режима I сильно охлажденной поверхности решаются с помощью метода последовательных приближений [9] и асимптотического разложения в ряды. Простые аналитические выражения для давления и коэффициентов теплопередачи и трения получены в зависимости от числа Re, отношения удельных теплоемкостей, показателя степени при степенной зависимости коэффициента вязкости от температуры, числа Прандтля и геометрии обтекаемого тела.

Коэффициент теплопередачи и давление с уменьшением числа Re приближаются к своим значениям в свободномолекулярном потоке. Коэффициент трения приближается к свободномолекулярному пределу при нулевом продольном градиенте давления (строгая модель тонкого вязкого ударного слоя). Проводится сравнение асимптотических решений с численными [10] и с результатами расчета методом прямого статистического моделирования Монте-Карло [2, 3]. Полученные в работе аналитические решения могут найти применение в задачах аэродинамики и теплообмена космических аппаратов, а также в задачах аэротермобаллистики метеороидов [11].

1. Постановка задачи. Рассмотрим двумерные стационарные вязкие гиперзвуковые течения около гладких затупленных тел при малых числах Рейнольдса. Будем использовать ортогональную систему координат x, y, естественным образом связанную с поверхностью обтекаемого тела: x – расстояние вдоль поверхности от точки торможения, y – расстояние от тела по нормали. Система двумерных уравнений тонкого вязкого ударного слоя в переменных Дородницына для плоских ($\nu = 0$) и осесимметричных ($\nu = 1$) течений имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} = u, \quad \beta' f + \xi\frac{\partial f}{\partial \xi} = -\rho(c_1 u + c_2 v)$$

$$\beta_1 u^2 + \xi u\frac{\partial u}{\partial \xi} - \left(\beta' f + \xi\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)\frac{\partial u}{\partial \zeta} = -\frac{\xi}{\rho\cos^2\alpha}\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\mu\rho\xi}{\mathrm{Re}\cos\alpha\Delta^2}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)$$

$$\xi u\frac{\partial g}{\partial \xi} - \left(\beta' f + \xi\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)\frac{\partial g}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\mu\rho\xi}{\sigma\mathrm{Re}\cos\alpha\Delta^2}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(g - \frac{(1-\sigma)\cos^2\alpha}{1-T_w}u^2\right)\right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta} = \frac{\Delta\cos^2\alpha}{R}u^2, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon T}{p}, \quad \mu = T^{\omega}, \quad g = \frac{H-H_w}{H_\infty - H_w}, \quad T = g(1-T_w) + T_w \tag{1.1}$$

$$\beta' = \frac{d\ln\Delta}{d\ln\xi} + \beta_w, \quad \beta_w = \xi\left(\frac{\xi\,\mathrm{tg}\,\alpha}{R} + \frac{\nu\sin\alpha}{r_w}\right), \quad \beta_1 = \frac{\xi\,\mathrm{tg}\,\alpha}{R}$$

$$c_1 = \frac{x}{\rho}\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad c_2 = -\frac{\xi\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\Delta}, \quad H = c_p T_0 T + \frac{V_\infty \cos^2\alpha u^2}{2}$$

$$\xi = \frac{x}{R_0}, \quad \zeta = \frac{1}{\Delta R_0}\int_0^y \rho dy, \quad \Delta = \frac{1}{R_0}\int_0^{y_s}\rho dy, \quad \varepsilon = \frac{\gamma-1}{2\gamma}, \quad \mathrm{Re} = \frac{\rho_\infty V_\infty R_0}{\mu_0}$$

Здесь $R(\xi)R_0$ – радиус кривизны контура тела, R_0 – радиус кривизны в критической точке, $\rho_\infty\rho$ – плотность, $V_\infty\cos\alpha u$ и $-V_\infty\sin\alpha v$ – касательная и нормальная составляющие скорости; ρ_∞ и V_∞ – плотность и скорость набегающего потока, α – угол между касательной к контуру тела и скоростью набегающего потока; $\mu_0\mu$ – коэффициент вязкости, μ_0 – коэффициент вязкости, определяемый по температуре торможения набегающего потока T_0; T_0T – температура, T_0T_w – температура поверхности, H – полная энтальпия, g – приведенная энтальпия, $\rho_\infty V_\infty^2 p$ – давление; r_wR_0 – расстояние от поверхности до оси симметрии, σ – число Прандтля, Re – число Рейнольдса, определяемое по температуре торможения набегающего потока.

В качестве граничных условий на поверхности тела $\zeta = 0$ берутся условия прилипания, на ударной волне $\zeta = 1$ ($y = y_s(x)$) – обобщенные условия Ренкина – Гюгонио:

$$\zeta = 0{:}\ u = 0,\quad g = 0,\quad f = 0$$

$$\zeta = 1{:}\ u = 1 - \frac{\mu\rho}{\mathrm{Re}\Delta\sin\alpha}\frac{\partial u}{\partial\zeta},\quad p = \sin^2\alpha,\quad f = \frac{r_w}{(1+\nu)\Delta\cos\alpha} \tag{1.2}$$

$$g = 1 - \frac{\mu\rho}{\sigma\mathrm{Re}\Delta\sin\alpha}\frac{\partial u}{\partial\zeta}\left(g - \frac{1-\sigma}{1-T_w}\cos^2\alpha u^2\right)$$

Отход ударной волны y_s определяется из уравнения

$$y_s = \Delta R_0\int_0^1\frac{1}{\rho}d\zeta \tag{1.3}$$

Коэффициенты трения и теплопередачи на поверхности определяются как

$$c_f = \frac{2\tau}{\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{2\cos\alpha\mu\rho}{\Delta\mathrm{Re}}\frac{\partial u}{\partial\zeta}\bigg|_w,\quad c_H = \frac{q}{\rho_\infty V_\infty(H_\infty - H_w)} = \frac{\mu\rho}{\sigma\Delta\mathrm{Re}}\frac{\partial g}{\partial\zeta}\bigg|_w$$

$$\tau = \left(\mu_0\mu\frac{\partial(V_\infty\cos\alpha u)}{\partial y}\right)_w,\quad q = \left(\lambda\frac{\partial(T_0T)}{\partial y}\right)_w$$

2. Режимы гиперзвуковых течений разреженного газа. Рассмотрим при малых числах Re граничные условия на ударной волне (1.2), производя оценку входящих в них функций (полагая при этом $f_s \sim u_s/2$):

$$u_s = 1 - O\left(\frac{(1+\nu)\sin\alpha\cos\alpha u_s^2}{2r_w\varepsilon\mathrm{Re}[g_s(1-T_w)+T_w]^{1-\omega}}\right),\quad g_s = 1 - O\left(\frac{(1+\nu)\sin\alpha\cos\alpha u_s g_s}{2r_w\sigma\varepsilon\mathrm{Re}[g_s(1-T_w)+T_w]^{1-\omega}}\right) \tag{2.1}$$

Индекс s соответствует значениям на ударной волне при $\zeta = 1$. Из анализа соотношений (2.1) следует

$$\frac{(1+\nu)\sin\alpha\cos\alpha u_s^2}{2r_w\varepsilon\mathrm{Re}[g_s(1-T_w)+T_w]^{1-\omega}} = O(1),\quad \frac{(1+\nu)\sin\alpha\cos\alpha u_s g_s}{2r_w\sigma\varepsilon\mathrm{Re}[g_s(1-T_w)+T_w]^{1-\omega}} = O(1) \tag{2.2}$$

При $\varepsilon\mathrm{Re} = o(1)$: u_s, $g_s = o(1)$

Возможны следующие три соотношения между g_s и T_w

$$\text{I: } g_s \gg T_w,\ \text{II: } g_s = O(T_w),\ \text{III: } g_s \ll T_w \tag{2.3}$$

Этим соотношениям будет соответствовать

$$\text{I: } T_s \sim g_s,\ \text{II: } T_s \sim g_s + T_w,\ \text{III: } T_s \sim T_w. \tag{2.4}$$

Решая систему (2.2) для каждого из этих трех случаев, получим:

$$\text{I, II: } u_s, g_s = O((\varepsilon \mathrm{Re}\beta^*)^{1/(1+\omega)}, \text{ III: } u_s, g_s = O((\varepsilon \mathrm{Re} T_w^{1-\omega}\beta^*)^{1/2}) \tag{2.5}$$

$$\beta^* = \frac{2r_w}{(1+\nu)\sin\alpha\cos\alpha} \tag{2.6}$$

Подставив (2.5) в (2.3), получим три режима течения в гиперзвуковом вязком ударном слое при малых числах Re в зависимости от соотношения параметров задачи Re, ε, T_w, ω, β^*

$$\text{I: } \varepsilon\mathrm{Re} \gg T_w^{(1+\omega)}/\beta^*, \text{ II: } \varepsilon\mathrm{Re} = O(T_w^{(1+\omega)}/\beta^*) \text{ III: } \varepsilon\mathrm{Re} \ll T_w^{(1+\omega)}/\beta^*. \tag{2.7}$$

Этим режимам соответствуют соотношения (2.4), определяющие оценку температуры в каждом из режимов при асимптотическом исследовании задачи и соответственно оценку зависящих от температуры плотности и коэффициента вязкости.

В точке торможения $\beta^* \sim 1$, и соотношения (2.7) соответствуют соотношениям [7].

В данной работе рассматривается режим I, соответствующий сильно охлажденной поверхности: $T_w \ll (\varepsilon\mathrm{Re}\beta^*)^{1/(1+\omega)}$. В этом режиме $u_s, g_s = O((2r_w\varepsilon\mathrm{Re}/((1+\nu)\sin\alpha\cos\alpha))^{1/(1+\omega)})$.

3. Асимптотическое решение. Получим асимптотическое решение задачи (1.1)–(1.2) для коэффициента теплопередачи c_H, коэффициента трения c_f и давления p при малых числах Re и ε в режиме I.

Сначала систему уравнений (1.1) с граничными условиями (1.2) будем решать интегральным методом последовательных приближений с помощью алгоритма, изложенного в [9]. Этот метод позволяет получать как численное решение задачи путем вычисления достаточно большого числа приближений, так и приближенное аналитическое решение в первом приближении. В [9] было получено аналитическое решение уравнений тонкого вязкого ударного слоя в случае $\omega = 1/2$. Для произвольных значений ω в первом приближении метода последовательных приближений, при задании нулевого приближения в виде линейных функций по поперечной координате ζ, получим следующие выражения для коэффициентов теплопередачи и трения c_H, c_f:

$$\begin{aligned} c_H &= \Delta_H\frac{(\beta+\nu)\sin\alpha}{2R\beta}a\left(1-\frac{2b}{3}\right), \quad \beta = \frac{r_w}{R\cos\alpha} \\ c_f &= \Delta_u\frac{(\beta+\nu)\sin\alpha}{R\beta}a\left[1-\frac{2a}{3}\left(1+\frac{\beta}{\beta+\nu}\right)+\frac{2\varepsilon b\beta}{a(\beta+\nu)\sin^2\alpha}\right] \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\Delta_H = \frac{-b_4+\sqrt{b_4^2+4b_3}}{2b_3}, \quad \Delta_u = \frac{-a_4+\sqrt{a_4^2+4a_3}}{2a_3} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{\sigma\mathrm{Re}\varepsilon(\beta+\nu)ab^{1-\omega}}{2R\beta\sin\alpha(2-\omega)}\left(1-\frac{4-\omega}{5-\omega}b\right) \\ a_3 &= \frac{\mathrm{Re}\varepsilon(\beta+\nu)ab^{1-\omega}}{2R\beta\sin\alpha(2-\omega)}\left(1-\frac{4-\omega}{5-\omega}a-\frac{2\beta a}{(\beta+\nu)(5-\omega)}+\frac{4\beta b\varepsilon}{\sin^2\alpha(\beta+\nu)(4-\omega)a}\right) \\ b_4 &= \frac{(\beta+\nu)a}{2R\beta}(1-b), \quad a_4 = \frac{(\beta+\nu)a}{2R\beta}(1-a) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь a и b определяются из системы уравнений

$$a = 1 - \frac{(1+\nu)\sin\alpha\cos\alpha a^2}{2\mathrm{Re}\varepsilon r_w b^{1-\omega}}, \quad b = 1 - \frac{(1+\nu)\sin\alpha\cos\alpha ab}{2\sigma\mathrm{Re}\varepsilon r_w b^{1-\omega}} \tag{3.4}$$

Решение этих уравнений при $\mathrm{Re}\varepsilon = o(1)$ будет

$$a = \tau, \quad b = \sigma\tau, \quad \tau = (\sigma^{1-\omega}\varepsilon\mathrm{Re}\beta^*)^{1/(1+\omega)} \tag{3.5}$$

где β^* определяется (2.6). Используя (3.5), запишем a_3 и b_3 в виде

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{(1+\nu)(\beta+\nu)b^3}{4\sigma^2R^2\beta^2(2-\omega)}\left(1 - \frac{4-\omega}{5-\omega}b\right) \\ a_3 &= \frac{(1+\nu)(\beta+\nu)a^3}{4R^2\beta^2(2-\omega)}\left(1 - \frac{4-\omega}{5-\omega}a - \frac{2\beta a}{(\beta+\nu)(5-\omega)} + \frac{4\beta\sigma\varepsilon}{\sin^2\alpha(\beta+\nu)(4-\omega)}\right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Для определения функций Δ_u и Δ_H подставим a_3 и b_3 (3.6) и a_4 и b_4 (3.3) в (3.2). Считая параметр τ малым и соответственно a и b малыми и раскладывая в полученных выражениях все функции в ряды по этому параметру, получим

$$\begin{aligned} \Delta_H &= \frac{2\xi\sin\alpha}{\cos\alpha\beta_w a}\left(1 + \sigma a\left(1 - \frac{(1+\nu)}{(2-\omega)\beta}\right) + O(\tau^2)\right) \\ \Delta_u &= \frac{2\xi\sin\alpha}{\cos\alpha\beta_w a}\left(1 + a\left(1 - \frac{(1+\nu)}{(2-\omega)\beta}\right) + O(\tau^2, \varepsilon^2, \tau\varepsilon)\right) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Формулы (3.1), (3.5), (3.7) определяют асимптотическое решение для коэффициентов трения и теплопередачи на боковой поверхности осесимметричных или плоских затупленных тел в зависимости от параметров Re, ε, σ, ω и геометрии обтекаемой поверхности:

$$\begin{aligned} c_H &= \sin\alpha\left[1 - \left(\frac{(1+\nu)}{(2-\omega)(\beta+\nu)} - \frac{1}{3}\right)\sigma\tau\right] + O(\tau^2) \\ c_f &= 2\sin\alpha\left[1 - \left(\frac{(1+\nu)}{(2-\omega)(\beta+\nu)} + \frac{2\beta}{3(\beta+\nu)} - \frac{1}{3}\right)\tau + \frac{2\varepsilon\sigma\beta}{\sin^2\alpha(\beta+\nu)}\right] + O(\tau^2, \varepsilon^2, \varepsilon\tau) \\ \tau &= (\sigma^{1-\omega}\varepsilon\mathrm{Re}\beta^*)^{1/(1+\omega)}, \quad \beta = \frac{r_w}{R\cos\alpha}, \quad \beta^* = \frac{2r_w}{(1+\nu)\sin\alpha\cos\alpha} \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\lim_{\mathrm{Re}\varepsilon\to 0} c_H = \sin\alpha, \quad \lim_{\mathrm{Re}\varepsilon\to 0} c_f = 2\sin\alpha(1 + 2\sigma\varepsilon\beta/(\sin^2\alpha(\beta+\nu))), \quad \lim_{\substack{\mathrm{Re}\varepsilon\to 0\\ \varepsilon\to 0}} c_f = 2\sin\alpha$$

При стремлении числа Re к нулю (при $\varepsilon\mathrm{Re} \to 0$), значение коэффициента теплопередачи стремится к его значению в свободномолекулярном потоке, равному $\sin\alpha$ при коэффициенте аккомодации 1 [12]. Поскольку коэффициент трения зависит не только от параметра εRe, но также и от ε, такое стремление к своему свободномолекулярному пределу, равному $2\sin\alpha$, для коэффициента трения имеет место при условии $\varepsilon \to 0$ или при равенстве нулю члена с продольным градиентом давления в уравнении импульсов в продольном направлении, т.е при использовании строгой модели тонкого вязкого ударного слоя. В этом случае выражение для коэффициента трения примет вид

$$c_f = 2\sin\alpha\left[1 - \left(\frac{(1+\nu)}{(2-\omega)(\beta+\nu)} + \frac{2\beta}{3(\beta+\nu)} - \frac{1}{3}\right)\tau\right] + O(\tau^2), \quad \lim_{\mathrm{Re}\varepsilon\to 0} c_f = 2\sin\alpha \tag{3.9}$$

В уравнениях (1.1) оставлен внепорядковый член с продольным градиентом давления, чтобы расширить область применимости тонкого вязкого ударного слоя до больших чисел Re, где этот член играет существенную роль. В выражениях для коэффициента теплопередачи отсутствуют члены с параметром ε, что связано с тем, что при малых числах Re учет продольных составляющих градиента давления влияет на напряжение трения и не влияет на теплопередачу, что подтверждается и численными расчетами.

Для распределения давления на поверхности аналогичным образом можно получить следующее приближенное решение:

$$p = \sin^2\alpha - \frac{2r_w\cos\alpha}{3(1+\nu)R}\tau + O(\tau^2), \quad \lim_{\mathrm{Re}\varepsilon\to 0} p = \sin^2\alpha \tag{3.10}$$

При стремлении числа Re к нулю модель тонкого вязкого ударного слоя дает распределение давления по Ньютону.

В точке торможения полученные решения для коэффициентов трения и теплопередачи переходят в соответствующие формулы [7].

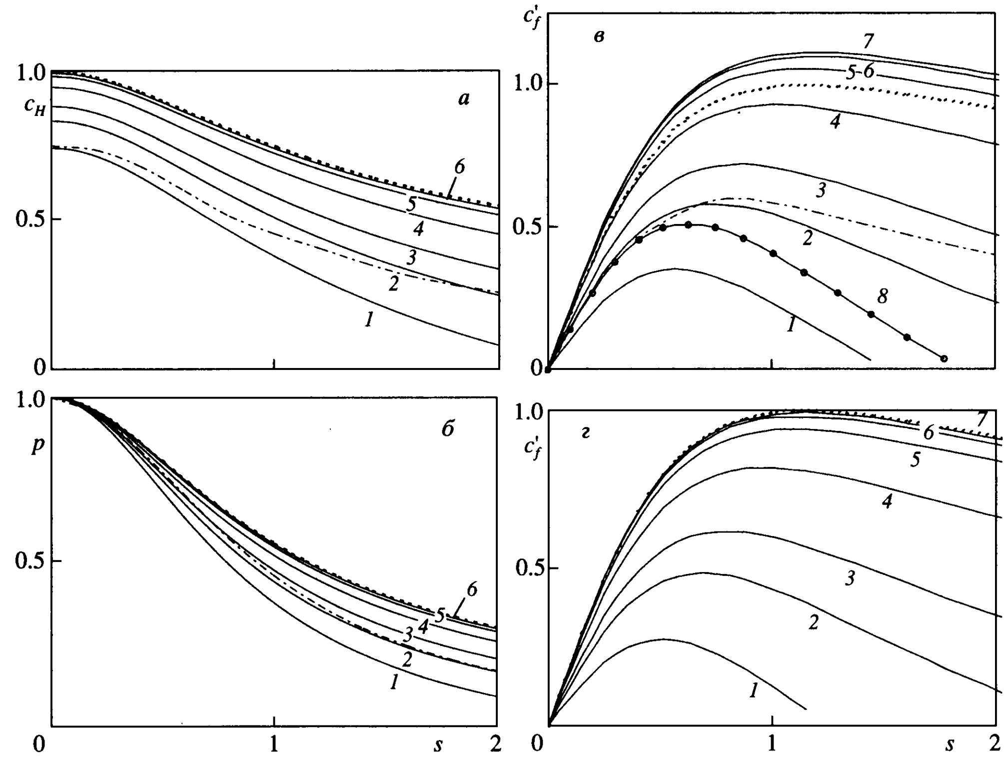
Полученное решение зависит от газодинамических параметров Re, ε, σ, ω через одну комбинацию – τ (коэффициент теплопередачи зависит от $\tau^* = \sigma\tau$), т.е. параметр $\tau(\tau^*)$ – параметр подобия данной задачи. Параметр τ характеризует разреженность потока и зависит от двух частей – газодинамической и геометрической. Газодинамическая часть зависит от параметров набегающего потока Re, ε, σ, ω и определяет разреженность потока вблизи точки торможения ($\beta^* = 2/(1+\nu)$). Геометрический параметр β^* увеличивает τ и уменьшает разреженность потока с увеличением расстояния от точки торможения (поток уплотняется).

4. Обсуждение результатов. Полученные асимптотические решения уравнений тонкого вязкого ударного слоя сравнивались с численными решениями, результатами расчетов методом прямого статистического моделирования Монте-Карло и решением в свободномолекулярном потоке. В качестве модельных тел рассматривались сфера, параболоид и круговой цилиндр.

На фиг. 1 приведены аналитические решения для распределений давления p (*а*), коэффициента теплопередачи c_H (*б*) и коэффициента трения $c'_f = c_f\cos\alpha$ (*в, г*) вдоль поверхности параболоида вращения при различных числах Re. Здесь же приведены решения в свободномолекулярном потоке для соответствующих величин, а также численные решения [10] при Re = 2.4. Решения [10] получены в пренебрежении первым членом $\sim u^2$ в уравнении импульсов в продольном направлении в системе (1.1), поэтому для правильного сравнения было получено аналитическое решение для коэффициента трения в том же приближении c_f^*. Асимптотические решения удовлетворительно согласуются с численными решениями в области торможения, где течение является разреженным.

С удалением от точки торможения, с увеличением расстояния s параметр τ возрастает из-за влияния геометрического параметра β^*, поток уплотняется, предположение о малости параметра разреженности τ нарушается и, естественно, асимптотическое решение все более отклоняется от численного. Чем меньше число Re, тем на все более далеких расстояниях от точки торможения справедливо асимптотическое решение. Параметр τ характеризует область применимости асимптотического решения.

С уменьшением числа Re коэффициент теплопередачи и давление, как демонстрирует фигура 1, приближаются к своим решениям в свободномолекулярном режиме обтекания и при Re = 10^{-3} практически совпадают с ними. Фигура 1, *в* показывает, что предельное решение для коэффициента трения, определяемого по (3.8), отличается от свободномолекулярного решения (на величину $O(\varepsilon)$) из-за влияния продольного градиента давления. В то же время решение для коэффициента трения (3.9) (соответствующее

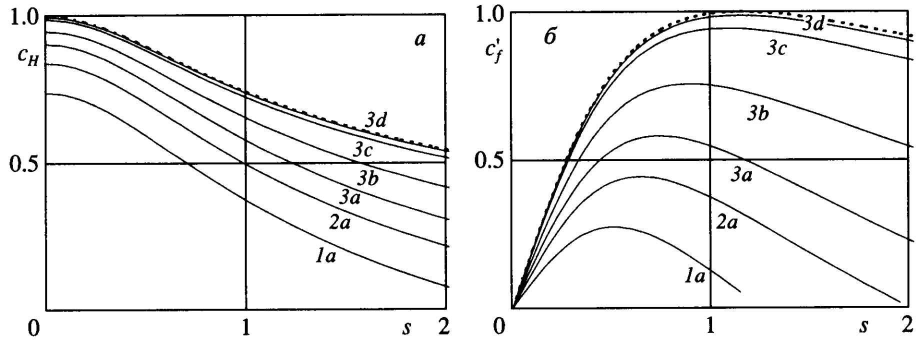


Фиг. 1. Зависимости c_H, p, c'_f вдоль поверхности параболоида вращения от расстояния от точки торможения s для разных чисел Re. Сплошные линии – асимптотическое решение при Re = 2.4, 1, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 (*1–7*), (линия *8* – c_f^* при Re = 2.4), штрихпунктирные – численное решение [10] при Re = 2.4, пунктирные – свободномолекулярное течение; *в* и *г* – расчет c_f по (3.8) и (3.9); $\gamma = 1.33$, $\omega = 1$, $\sigma = 0.71$

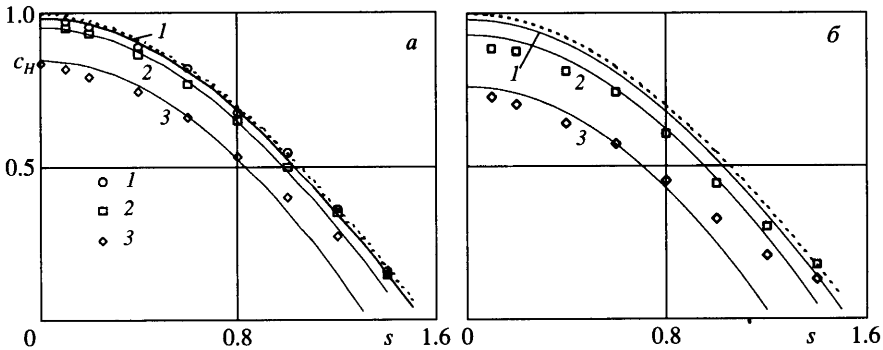
строгой модели тонкого вязкого ударного слоя), как видно из фиг. 1, *г*, при уменьшении числа Re переходит в решение в свободномолекулярном потоке.

Фигура 2 демонстрирует влияние на коэффициенты теплопередачи и трения параметров ω и ε. Уменьшение ω и ε (или γ) ведет к уменьшению параметра τ и соответственно к увеличению c_H и c_f.

На фиг. 3 проводится сравнение асимптотических решений для распределений коэффициента теплопередачи вдоль поверхности сферы (*а*) и цилиндра (*б*) с расчетами методом прямого статистического моделирования Монте-Карло [2, 3] вдоль траектории входа в атмосферу Земли космического аппарата Shuttle на высотах 90, 100 и 110 км. Здесь же приведено решение в свободномолекулярном режиме обтекания. Асимптотические решения очень хорошо согласуются с решениями, полученными методом Монте-Карло. На высоте 90 км при $s > 1$ с увеличением расстояния от точки торможения асимптотическое решение становится неточным, поскольку предположение о малости τ при получении асимптотического решения начинает нарушаться из-за влияния геометрического параметра β^* (уплотнения потока). Фигура 3 иллюстрирует также, что решение, полученное на основе модели тонкого вязкого ударного слоя, с увеличением высоты полета или увеличением разреженности (увеличением числа Кнудсена или уменьшением числа Re) приближается к решению в свободномолекулярном потоке.



Фиг. 2. Зависимости c_H, c_f' вдоль поверхности параболоида вращения от s при $\mathrm{Re} = 2.4$ для $\omega = 1, 0.75, 0.5$ (*1–3*) и $\varepsilon = 0.125, 0.05, 0.005, 0.0005$ (*a, b, c, d*); пунктирные линии – свободномолекулярное течение



Фиг. 3. Распределение коэффициента теплопередачи вдоль поверхности сферы (*a*) и цилиндра (*б*) в зависимости от s вдоль траектории входа в атмосферу Земли аппарата "Shuttle" на высотах 110, 100, 90 км: сплошные кривые *1–3* – асимптотические решения, точки *1–3* – расчеты методом Монте-Карло [2](а) и [3](б); $V_\infty = 7.5$ км/с, $R_0 = 0.0254$ м; пунктирные линии – свободномолекулярное течение

Заключение. С помощью асимптотического анализа выделены три режима гиперзвукового течения разреженного газа около затупленного тела в зависимости от параметров задачи: числа Re, $\varepsilon = (\gamma - 1)/2\gamma$ (где γ – отношение удельных теплоемкостей), показателя степени ω (при $\mu \sim T^\omega$), температуры поверхности T_w и геометрического параметра β^*. Для режима сильно охлажденной поверхности получены асимптотические решения уравнений тонкого вязкого ударного слоя при малых числах Re для осесимметричной и плоской задачи. Определен параметр подобия гиперзвукового обтекания тел разреженным газом в рассматриваемом режиме холодной стенки: $\tau = (\sigma^{1-\omega}\varepsilon \mathrm{Re}\beta^*)^{1/(1+\omega)}$, газодинамические параметры набегающего потока Re, ε, ω, σ (число Прандтля) входят в решение через параметр τ. Даны простые аналитические выражения для расчета давления и коэффициентов теплопередачи и трения в переходном режиме обтекания в зависимости от параметра τ (коэффициент теплопередачи зависит от $\tau^* = \sigma\tau$) и геометрии обтекаемого тела. При стремлении числа Re к нулю коэффициент теплопередачи и давление приближаются к своим значениям в свободномолекулярном потоке. Коэффициент трения приближается к свободномолекулярному пределу при использовании строгой модели тонкого вязкого ударного слоя (нулевой продольный градиент давления).

Результаты асимптотического исследования и проведенные сравнения с результатами расчета методом прямого статистического моделирования Монте-Карло показали, что модель тонкого вязкого ударного слоя и полученные аналитические решения могут быть использованы для расчета теплопередачи, трения и давления при гиперзвуковом течении разреженного газа в переходном к свободномолекулярному режиме обтекания.

Автор выражает благодарность Г.А. Тирскому за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке грантов "Ведущие научные школы" – НШ-835.2006.1 и РФФИ (№ 06-01-00695).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тирский Г.А.* Континуальные модели в задачах гиперзвукового обтекания затупленных тел разреженным газом // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 6. С. 903–930.
2. *Moss J.N., Cuda V.J., Simmonds A.L.* Nonequilibrium effects for hypersonic transitional flows // AIAA Paper. 1987. № 87-0404.
3. *Cuda V.J., Moss J.N.* Direct simulation of hypersonic flows over blunt wedges // J. Thermophysics and Heat Transfer. 1987. V. 1. № 2. P. 97–104.
4. *Vashchenkov P., Kashkovsky A., Ivanov M.* Numerical analysis of aerodynamics of reentry vechicles in wide range of Knudsen mumbers // Papers East West High Speed Flow Field Conf., Beijing, 2005. P. 1–8.
5. *Jain A.C., Hayes J.R.* Hypersonic pressure, skin-friction, and heat transfer distributions on space vechicles: planar bodies // AIAA Journal. 2004. V. 42. № 10. P. 2060–2069.
6. *Cheng H.K.* Hypersonic shock-layer theory of the stagnation region at low Reynolds number // Proc. Heat Transfer and Fluid Mech. Inst. Stanford, Calif.: Stanford Univ. Press, 1961. P. 161–175.
7. *Брыкина И.Г.* Асимптотическое решение уравнений тонкого вязкого ударного слоя при малых числах Рейнольдса для холодной поверхности // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 5. С. 159–170.
8. *Brykina I.G., Rogov B.V., Tirskiy G.A.* Continuum approach to hypersonic aerodynamics and heat transfer prediction at low Reynolds number // Proc. Rarefied Gas Dynamics 24th Intern. Symp. Ed. Mario Capitelli, N. Y.: AIP. V. 762. 2005. P. 1235–1240.
9. *Брыкина И.Г.* Интегрирование уравнений гиперзвукового вязкого ударного слоя методом последовательных приближений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1978. Т. 18. № 1. С. 154–166.
10. *Cheng H.K.* The blunt body problem in hypersonic flow at low Reynolds number // IAS Paper. 1963. № 63–92. 100 p.
11. *Khanukaeva D.Yu., Tirskiy G.A., Marec J.-P.* A meteoroid ballistics in the non-isothermal atmosphere // Acta Astronautica. 2005. V. 57. № 10. P. 811–817.
12. *Хейз У.Д., Пробстин Р.Ф.* Теория гиперзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 407 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.III.2006