

УДК 532.546:517.956

© 2006 г. Ю. Н. ГОРДЕЕВ, А. Е. САНДАКОВ

## О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДАВЛЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ РАСТУЩЕЙ ТРЕЩИНЫ С ПОСТОЯННОЙ РАСКЛИНИВАЮЩЕЙ СИЛОЙ

В данной работе построены точные решения задачи о поле давления в окрестности трещины гидроразрыва, развивающейся по корневому закону в проницаемой пористой среде, с постоянной расклинивающей силой, действующей на берега трещины.

Рассматривается частный случай, допускающий автомоделную постановку и точное решение и, как следствие, достаточно полное исследование. Построенное решение справедливо для произвольного автомоделного распределения давления на берегах трещины. Рассматриваемая задача сведена к решению смешанной краевой задачи для уравнения Гельмгольца. Найденное решение может оказаться полезным как само по себе, так и для тестирования более универсальных численных алгоритмов.

*Ключевые слова:* трещина гидроразрыва, течение жидкости.

Построены точные решения задачи о поле давления в окрестности трещины гидроразрыва, развивающейся по корневому закону в проницаемой пористой среде, с постоянной расклинивающей силой, действующей на берега трещины.

При исследовании процесса гидравлического разрыва пласта возникает необходимость расчета нестационарного поля давления жидкости в окрестности движущейся трещины гидроразрыва [1, 2]. В предположении, что пласт и жидкость упруго деформируемые, распределение давления в пласте описывается уравнением теплопроводности (“пъезопроводности”) [3]

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \Delta p$$

Трещина считается тонкой областью (“поверхностью”), на которой задано давление  $p_0$ , отличное от начального пластового давления  $p^0$ . Задача заключается в нахождении возмущения поля давления в пласте, вызванного развитием трещины.

Следует отметить, что в настоящий момент интерес к данной проблеме вырос [4]. В частном случае, когда давление закачки жидкости в трещину постоянно и однородно вдоль трещины (приближение “идеальной” трещины [5]), точные решения были получены в работе [6].

В данной работе рассматривается частный случай, допускающий автомоделную постановку и точное решение и, как следствие, достаточно полное исследование. Построенное решение справедливо для произвольного автомоделного распределения давления на берегах трещины. Рассматриваемая задача сведена к решению смешанной краевой задачи для уравнения Гельмгольца. Найденное решение может оказаться полезным как само по себе, так и для тестирования более универсальных численных алгоритмов.

**1. Постановка задачи о распространении плоской трещины с заданным расходом жидкости разрыва.** Рассмотрим гидравлический разрыв пласта с постоянной расклинивающей силой, действующей на берега трещины. Постановка данной задачи имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right), \quad -\infty < x < \infty, \quad y \geq 0 \quad (1.1)$$

$$p(x, y, 0) = p^0, \quad p(x, 0, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} p_0\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + p^0, \quad |x| \leq l(t) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}(x, 0, t) = 0, \quad |x| > l(t), \quad l(t) = c\sqrt{t}$$

где  $l(t)$  – длина трещины.

Расклинивающая сила, действующая на берега трещины, имеет вид

$$F = 2 \int_0^l \frac{1}{\sqrt{t}} p\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) dx = \text{const}$$

Легко видеть, что решения задач (1.1)–(1.2) оказываются автомодельными, если границы трещины растут по корневому закону.

Полагая

$$x = c\varepsilon^{-1} X \sqrt{t}, \quad y = c\varepsilon^{-1} Y \sqrt{t}, \quad \varepsilon = \frac{c}{2\sqrt{\kappa}}$$

$$p = \frac{1}{t} (p_0(0) - p^0) \Phi(X, Y) + p^0$$

где  $c$  – параметр, характеризующий скорость распространения трещины, получим для  $\Phi(X, Y)$  задачу

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} + 2X \frac{\partial \Phi}{\partial X} + 2Y \frac{\partial \Phi}{\partial Y} + 2\Phi = 0 \quad (1.3)$$

$$\Phi(X, 0) = \gamma(X), \quad |X| \leq \varepsilon, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial Y}(X, 0) = 0, \quad |X| > \varepsilon \quad (1.4)$$

$$\Phi(X, Y) \rightarrow 0, \quad \sqrt{X^2 + Y^2} \rightarrow \infty$$

$$F \propto 2 \int_0^c \Phi dX$$

Положим  $\Psi = \exp(1/2(X^2 + Y^2))\Phi(X, Y)$ , тогда задача (1.3)–(1.4) может быть преобразована к виду

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} - (X^2 + Y^2)\Psi = 0 \quad (1.5)$$

$$\Psi(X, 0) = \exp(1/2X^2)\gamma(X), \quad 0 \leq X \leq \varepsilon$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y}(X, 0) = 0, \quad X > \varepsilon, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial X}(0, Y) = 0, \quad 0 < Y \quad (1.6)$$

Здесь использованы очевидные условия симметрии задачи, и задача рассматривается в первой четверти плоскости ( $0 \leq X < \infty, 0 \leq Y < \infty$ ).

Введем новые переменные

$$\xi = 1/2(X^2 - Y^2), \quad \eta = XY \quad (1.7)$$

При переходе к переменным (1.7) первая четверть плоскости ( $0 \leq X < \infty$ ,  $0 \leq Y < \infty$ ) преобразуется в полуплоскость  $0 \leq \eta$ , а задача (1.5)–(1.6) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \eta^2} - \Lambda = 0, \quad \Lambda(\xi, \eta) = \Psi(X, Y) \quad (1.8)$$

$$\Lambda(\xi, 0) = \exp(\xi) \gamma(\sqrt{2\xi}), \quad 0 \leq \xi \leq \varepsilon^2/2$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = 0, \quad (\xi < 0) \cup (\xi > \varepsilon^2/2) \quad (1.9)$$

**2. Решение метагармонического уравнения.** Решение метагармонического уравнения (1.8) будем искать в виде

$$\Lambda(\xi, \eta) = \int_1^{\infty} A(s) e^{-s\xi} \Omega(s, \eta) ds \quad (2.1)$$

Подставив (2.1) в (1.8), получим, что функция  $\Omega(s, \eta)$  удовлетворяет уравнению

$$\left[ \frac{d^2}{d\xi^2} + (s^2 - 1) \right] \Omega(s, \eta) = 0 \quad (2.2)$$

Одним из частных решений уравнения (2.2) будет функция

$$\Omega(s, \eta) = \cos(-\eta \sqrt{s^2 - 1}) \quad (2.3)$$

Далее воспользуемся тождеством [7]

$$\begin{aligned} \cos(-\eta \sqrt{s^2 - 1}) &= \cos(\eta s) + \eta \int_0^{\eta} \frac{\cos(s \sqrt{\eta^2 - t^2})}{\sqrt{\eta^2 - t^2}} I_1(t) dt = \\ &= \cos(\eta s) + \int_0^{\eta} \cos(s\xi) \frac{\partial}{\partial \eta} I_0(\sqrt{\eta^2 - \xi^2}) d\xi \end{aligned} \quad (2.4)$$

Подставив (2.3) в (2.4) и (2.1) и меняя порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} \Lambda(\xi, \eta) &= \varphi(\xi, \eta) + \int_0^{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} I_0(\sqrt{\eta^2 - \zeta^2}) \varphi(\xi, \zeta) d\zeta \\ \varphi(\xi, \eta) &= \int_1^{\infty} A(s) \exp(-\xi s) \cos(s\eta) ds \end{aligned} \quad (2.5)$$

Легко проверяется, что функция  $\varphi(\xi, \eta)$  удовлетворяет уравнению Лапласа, т.е. является гармонической функцией ( $\Delta \varphi = 0$ ).

Таким образом, получено интегральное представление (2.5) для решения метагармонического уравнения (1.8) через гармонические функции.

Решение уравнения (2.5) может быть представлено через гармоническую функцию

$$\Lambda(\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta) + \int_0^{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} I_0(\sqrt{\eta^2 - t^2}) \varphi(\xi, t) dt$$

где  $\varphi$  – гармоническая функция.

Легко показать, что граничным условиям для метагармонической функции (1.8) и (1.9) соответствуют следующие граничные условия для гармонической функции  $\varphi$

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, 0) &= \Lambda(\xi, 0), \quad 0 \leq \xi \leq \varepsilon^2/2 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= 0, \quad \eta = 0, \quad (\xi < 0) \cup \left(\xi > \frac{1}{2}\varepsilon^2\right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для решения смешанной краевой задачи для гармонической функции (2.6) введем комплексную функцию

$$V' = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - i \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$$

Из (2.6) следует, что она удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$\operatorname{Re} V'(\xi, 0) = \Lambda'(\xi, 0), \quad 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}\varepsilon^2; \quad \operatorname{Im} V'(\xi, 0) = 0, \quad (\xi < 0) \cup \left(\xi > \frac{1}{2}\varepsilon^2\right) \quad (2.7)$$

Решение задачи (2.7) дается формулой Келдыша – Седова [8] ( $z = \xi + i\eta$ )

$$V' = \frac{1}{i\pi\sqrt{z(\varepsilon^2/2 - z)}} \int_0^{\varepsilon^2/2} \frac{\sqrt{t(\varepsilon^2/2 - t)} \operatorname{Re} V'(t, 0) dt}{t - z} + \frac{iC}{\sqrt{z(\varepsilon^2/2 - z)}} \quad (2.8)$$

где  $C$  – некоторая постоянная.

Принимая во внимание, что давление жидкости в окрестности вершины трещины конечно, положим  $C = 0$ .

Интегрируя (2.8) по  $z$ , положив  $\eta = 0 + 0$  и возвращаясь к исходным переменным  $X, Y$ , получим искомое решение исходной смешанной краевой задачи (1.3) – (1.4)

$$\Omega(X, 0) = \begin{cases} \frac{e^{-X^2/2\varepsilon^2/2}}{\pi} \int_0^{\varepsilon^2/2} \left[ \arcsin \left( \frac{4tX^2 - \varepsilon^2(X^2 + 2t)}{\varepsilon^2|2t - X^2|} \right) + C_1 \right] \Lambda'(t, 0) dt, & X < 0 \\ \varphi(X), & 0 \leq X \leq \varepsilon \\ \frac{e^{-X^2/2\varepsilon^2/2}}{\pi} \int_0^{\varepsilon^2/2} \left[ \arcsin \left( \frac{-4tX^2 + \varepsilon^2(X^2 + 2t)}{\varepsilon^2|2t - X^2|} \right) + C_2 \right] \Lambda'(t, 0) dt, & X > \varepsilon \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\Lambda'(t, 0) = \frac{d}{dt}(e' \varphi(\sqrt{2t}))$$

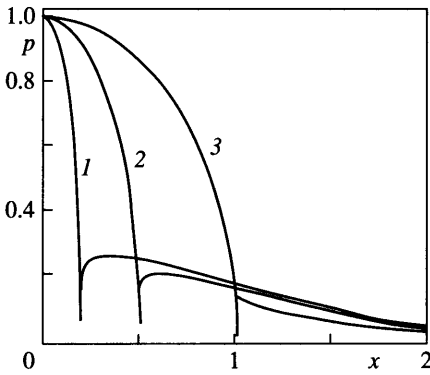
В частном случае, когда

$$\varphi(X) = C_0 \exp(-X^2), \quad |X| \leq \varepsilon$$

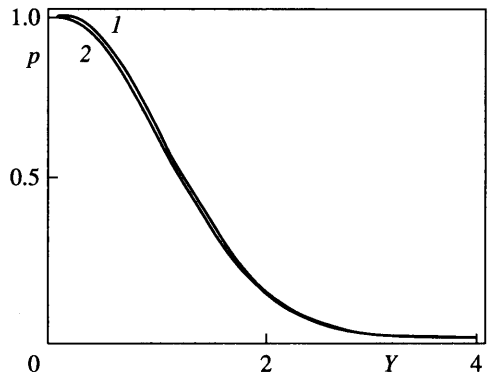
получим решение типа диффузионного расплывания фиксированной массы вещества  $M$

$$\Phi(X, Y) = C_0 \exp(-1/2(X^2 + Y^2))$$

где постоянная  $C_0$  может быть определена через массу  $M$ .



Фиг. 1. Распределение давления внутри и вне трещины при  $Y = 0$ :  
1-3 -  $\epsilon = 0.2, 0.5, 1.0$



Фиг. 2. Распределение давления в направлении, ортогональном распространению трещины при  $X = 0$ :  
1, 2 -  $\epsilon = 0.1, 0.5$

Другим частным случаем, который представляет интерес, есть однородное распределение давления вдоль берегов трещины (так называемая “идеальная” трещина бесконечно большой проводимости)  $\phi = 1$ . В этом случае из (2.9) получим решение

$$\Phi(X, 0) = \begin{cases} \frac{e^{-X^2/2}}{2\pi} \left[ 2 \int_0^{\epsilon^2/2} \arcsin \left( \frac{4tX^2 - \epsilon^2(X^2 + 2t)}{\epsilon^2|2t - X^2|} \right) e^t dt + \pi(1 + e^{\epsilon^2/2}) \right], & X < 0 \\ 1, & 0 \leq X \leq \epsilon \\ \frac{e^{-X^2/2}}{2\pi} \left[ 2 \int_0^{\epsilon^2/2} \arcsin \left( \frac{-4tX^2 + \epsilon^2(X^2 + 2t)}{\epsilon^2|2t - X^2|} \right) e^t dt - \pi(1 - 3e^{\epsilon^2/2}) \right], & X > \epsilon \end{cases}$$

Если задать модельное распределение давления в трещине  $\phi = \sqrt{\epsilon^2 - 2\xi}$ , что соответствует в исходных переменных  $\Phi = \sqrt{\epsilon^2 - X^2}$ , то распределение давления на продолжении трещины можно получить численно по формуле (2.9), где константы  $C_1, C_2$  имеют вид

$$C_1 = \epsilon\pi\sqrt{2} \left( 2e^{\epsilon^2/2} - 1 \right) \left( 2 \int_0^{\epsilon^2/2} \sqrt{te^t} (\epsilon^2 - 2t - 1) dt \right)^{-1}$$

$$C_2 = \epsilon\pi\sqrt{2} \left( 2 \int_0^{\epsilon^2/2} \sqrt{te^t} (\epsilon^2 - 2t - 1) dt \right)^{-1}$$

Результаты расчетов давления при  $Y = 0$  в зависимости от параметра  $\epsilon$ , пропорционального скорости распространения трещины, приведены на фиг. 1, а распределение давления в направлении, ортогональном распространению трещины при  $X = 0$ , представлено на фиг. 2.

При небольших скоростях распространения трещины давление вне трещины плавно переходит в давление в пласте.

С увеличением скорости распространения трещины перед трещиной формируется пик давления, соответствующий пороупругой волне сжатия, и, как следствие, увеличение порового давления.

**Заключение.** Получено решение в квадратурах задачи о гидравлическом разрыве пласта трещины. Распределение давления жидкости разрыва в трещине задано. Это распределение может быть получено из решения внутренней задачи о течении жидкости в трещине. Найденное точное решение может быть использовано для тестирования численных алгоритмов распределения трещины гидроразрыва.

Авторы благодарят В.М. Ентова за полезное обсуждение работы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nolte K.G., Smith M.B.* Interpretation of fracturing processes // *J. Petrol. Technol.* 1981. V. 33. № 9. P. 1764–1775.
2. *Reservoir Stimulation* / Eds: *M.J. Economides, K.G. Nolte* Houston, Texas: 1989.
3. *Шелкачев В.Н.* Основные уравнения движения упругой жидкости в упругой пористой среде // Докл. АН СССР. 1946. Т. 52. № 2. С. 103–106.
4. *Detournay E., Garagash D.I.* The near-tip region of a fluid-driven fracture propagating in a permeable elastic solid // *J. Fluid Mech.* 2003. V. 494. P. 1–32.
5. *Баренблатт Г.И.* Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. 1961. № 4. С. 3–56.
6. *Гордеев Ю.Н., Ентов В.М.* О распределении давления в окрестности растущей трещины // ППИМ 1997. Т. 61. Вып. 6. С. 1060–1064.
7. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.Н.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 750 с.
8. *Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 444 с.

Москва

Поступила в редакцию  
17.XI.2005