

УДК 532.527.013.2

© 2006 г. А. М. ГАЙФУЛЛИН

ОБТЕКАНИЕ ПЛАСТИНЫ С ДВИЖУЩЕЙСЯ ПРОТИВ ПОТОКА ПОВЕРХНОСТЬЮ

Получено численное решение задачи об обтекании пластины с движущейся против потока поверхностью в предположении, что скорость движения поверхности больше скорости набегающего потока. Предсказана и обоснована предельная схема течения при $t \rightarrow \infty$.

Ключевые слова: нестационарность, автомодельность, вязкость, вихрь.

Задача о течении жидкости около плоской пластины с движущимися навстречу потоку поверхностями рассматривалась в [1–4]. Оказалось, что при отношении скорости движения поверхности полубесконечной пластины к скорости набегающего потока $|u_0| \leq 0.3541$ уравнения пограничного слоя допускают автомодельные стационарные решения [1, 2]. По-видимому, начиная с некоторого u_0 , характеристики течения перестают подчиняться уравнениями пограничного слоя. В настоящей работе исследуется течение около пластины при больших $|u_0|$.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоское обтекание неподвижной пластины, расположенной в неограниченном потоке несжимаемой жидкости, имеющей скорость u_∞ . Скорость движения поверхностей пластины направлена против набегающего потока и равна $u'_0 = u_\infty u_0$. Предполагается, что $|u_0| > 1$, т.е. скорость движения поверхности пластины больше скорости u_∞ . Линейные размеры обезразмерим на длину пластины l . Систему координат выберем так, чтобы ее начало совпадало с серединой пластины, ось x направлена вдоль пластины, ось y – перпендикулярно ей. В безразмерных переменных система координат, положение пластины, величина и направление скоростей показаны на фиг. 1.

В переменных завихренность, функция тока уравнения движения будут иметь вид

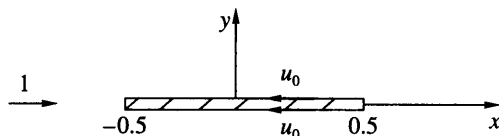
$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \Delta \omega \quad (1.1)$$

$$\Delta \psi = -\omega \quad (1.2)$$

Время t обезразмерено на l/u_∞ , завихренность ω – на u_∞/l , функция тока ψ – на $u_\infty l$, $Re = u_\infty l/\nu$, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, ν – кинематический коэффициент вязкости. Граничные условия стандартные – скорость жидкости на поверхности тела равна скорости движения поверхности и возмущения затухают на бесконечности. Начальное условие при $t = 0$ – невозмущенное течение всюду, кроме поверхности пластины.

Цель данной работы – решение уравнений (1.1), (1.2) при конечных t и предсказание поведения решения при $t \rightarrow \infty$.

Решение задачи будет зависеть от двух безразмерных параметров – скорости поверхности пластины u_0 и числа Рейнольдса Re .



Фиг. 1. Система координат и направление скоростей

2. Численное решение и анализ результатов. Уравнения (1.1), (1.2) решались численно в прямоугольной области, границы которой достаточно удалены от пластины и от завихренной области, образующейся вокруг пластины. Исключение составлял след за пластиной, который пересекала правая граница области. Основываясь на условии симметрии, расчет производился только в верхней полуплоскости. Нижняя граница расчетной области совпадала с линией симметрии, граничные условия на ней: $\psi = 0$, $\omega = 0$ вне поверхности пластины и $\psi = 0$, $\partial\psi/\partial y = -u_0$ на поверхности пластины. На левой и верхней границе $\omega = 0$, а на правой границе ставилось “мягкое” граничное условие $\partial\omega/\partial x = 0$. Граничное условие на левой, верхней и правой границах для функции тока определялось из условия, что вся завихренность в главном приближении находится внутри расчетной области и в симметричной ей нижней области

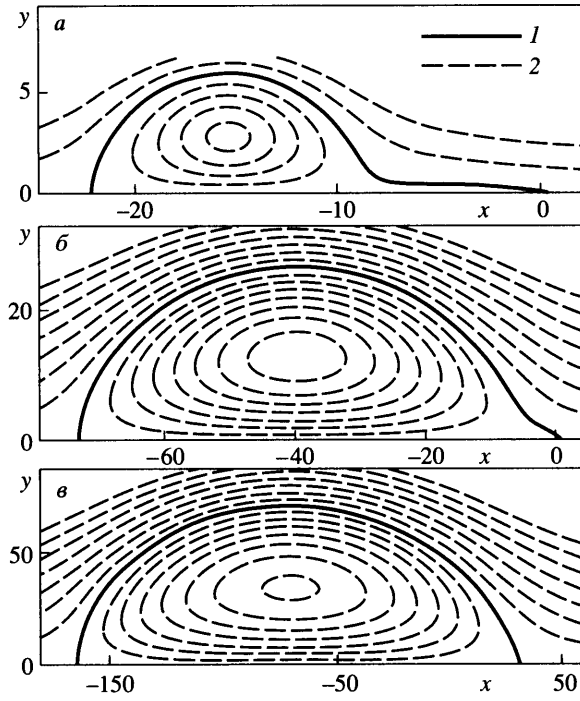
$$\psi(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \int \omega(x', y') \ln((x - x')^2 + (y - y')^2) dS(x', y')$$

Интегрирование осуществляется по площади расчетной области и по симметричной ей нижней области.

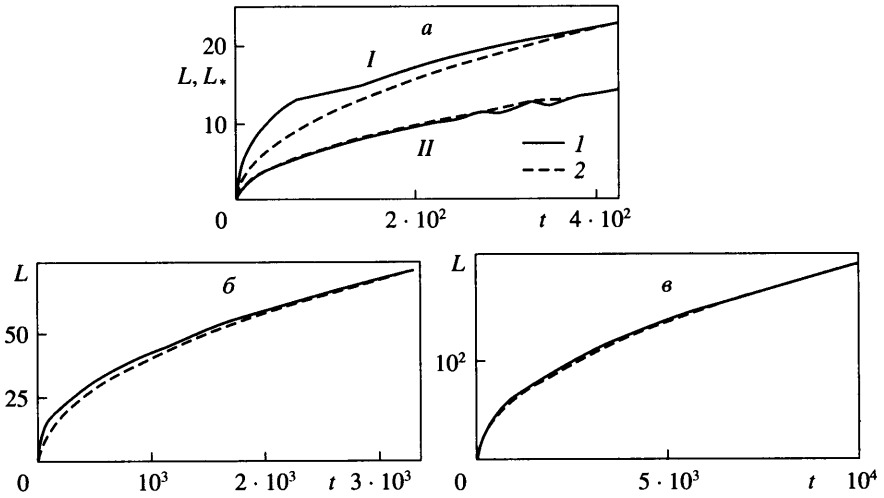
Проведено три расчета. Во всех предполагалось, что $|u_0| = 5$. Расчет при $Re = 10^3$ производился до $t = 425$, при $Re = 10^2$ до $t = 3330$, при $Re = 10$ до $t = 10^4$. Расчеты показали, что перед телом образуется завихренная область, размеры которой растут с течением времени. Линии тока течения, соответствующие трем значениям числа Re и конечным временам расчета, приведены на фиг. 2. Нулевая линия тока выделена кривой 1, остальные – кривыми 2. Область, ограниченная снаружи нулевой линией тока, является областью рециркуляционного течения. Завихренная жидкость расположена либо в области рециркуляционного течения, либо в слое смешения, окружающем эту область. Подобные рециркуляционные области, только меньшего размера, образуются и на меньших временах.

Размер рециркуляционной области на больших временах намного больше длины пластины. Структура течения зависит от числа Re . При $Re = 10^3$ от задней кромки пластины навстречу потоку отходит тонкий слой (фиг. 2, а). В нем вблизи линии симметрии течение возвратное. На больших расстояниях от линии симметрии продольная компонента скорости становится положительной. На некотором расстоянии от пластины, которое также растет с течением времени, тонкий слой взрывообразным способом переходит в овальную область. Продольный размер тонкого слоя сравним с характерным размером овальной области. При уменьшении числа Re отношение продольного размера тонкого слоя к размеру овальной области уменьшается, и при $Re = 10^2$ это отношение близко к нулю (фиг. 2, б). При дальнейшем уменьшении числа Re происходит отход границы рециркуляционной области от задней кромки и замыкание ее на линию симметрии (фиг. 2, в).

Зависимости продольного размера L рециркуляционной области от времени даны на фиг. 3 кривыми 1. На фиг. 3, а также представлена зависимость продольного размера L_* овальной области от времени. Слабая колебательная зависимость L_* от времени связа-



Фиг. 2. Линии тока: *а* – $Re = 10^3$, шаг между линиями $\psi = \text{const}$ $\Delta\psi = 1$; *б* – $Re = 10^2$, $\Delta\psi = 2$, *в* – $Re = 10$, $\Delta\psi = 5$; 1 – нулевая линия тока, 2 – линии тока



Фиг. 3. Зависимости продольного размера L (I) рециркуляционной области и продольного размера L_* (II) овальной области от t : *а* – $Re = 10^3$, *б* – 10^2 , *в* – 10; 1 – расчет, 2 – автомодельная зависимость

на с зарождающимися при больших числах Re в узкой части рециркуляционной области мелкомасштабными вихрями (неустойчивость течения).

Представляет интерес предельная картина течения при $t \rightarrow \infty$. Возможны два сценария развития: либо течение выходит на стационарный режим, либо оно все время нестационарно. На отсутствие первого сценария развития указывают результаты расчетов. При $Re = 10$ расчет производился до $t = Re^4$, но течение не вышло на стационарный режим.

Предположим, что реализуется второй сценарий развития, причем размер рециркуляционной области неограниченно возрастает с ростом времени. На больших временах отношение характерного масштаба рециркуляционной области к длине пластины $L_* \rightarrow \infty$, поэтому характеристики течения должны в главном приближении удовлетворять автомодельным законам.

Внутри овальных областей линии тока замкнуты. Кроме того, как показывает расчет, на больших временах внутри овальных областей (за исключением слоев смещения) устанавливается режим, в котором $\omega = \omega(\psi, t)$. Такая зависимость справедлива для невязких течений, у которых существенное изменение характеристик происходит за время, сравнимое с некоторой степенью числа Re .

3. Автомодельное решение. Течение внутри овальных областей должно удовлетворять трем условиям: 1) линии тока замкнуты; 2) завихренность в главном приближении – функция от ψ и t ; 3) главное приближение решения автомодельно по t . Для течений, удовлетворяющих первым двум условиям, в [5] получен интеграл, связывающий изменение циркуляции Γ и площади области σ , ограниченной линией $\psi = \text{const}$, с зависимостью $\omega(\psi, t)$

$$\frac{\partial \Gamma(\psi, t)}{\partial t} - \omega(\psi, t) \frac{\partial \sigma(\psi, t)}{\partial t} = -\frac{1}{Re} \Gamma(\psi, t) \frac{\partial \omega(\psi, t)}{\partial \psi} \quad (3.1)$$

Здесь циркуляция обезразмерена, так же как и функция тока.

Согласно третьему условию, характеристики течения в главном приближении должны представляться в виде

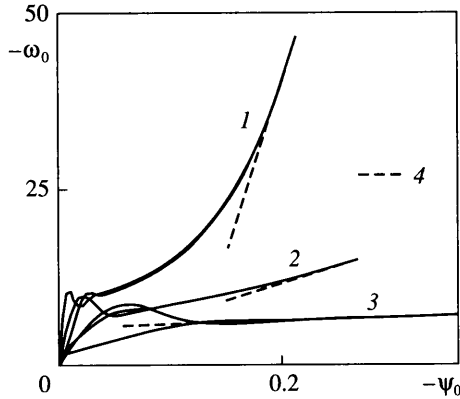
$$\begin{aligned} \psi(x, y, t) &= f(t) \psi_0\left(\frac{x}{g(t)}, \frac{y}{g(t)}\right), \quad \sigma(\psi, t) = g^2(t) \sigma_0(\psi_0) \\ \omega(\psi, t) &= \frac{f(t)}{g^2(t)} \omega_0(\psi_0), \quad \Gamma(\psi, t) = f(t) \Gamma_0(\psi_0) \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $f(t)$ и $g(t)$ – некоторые функции, зависящие от времени.

Подставляя (3.2) в (3.1), получаем, что возможны три класса автомодельных течений. Первый класс – стационарные течения: $f(t) = g(t) = 1$. Для стационарных течений из (3.1) следует $d\omega/d\psi = 0$, т.е. реализуется решение Прандтля – Бэтчелора [6]: течение с постоянной завихренностью. Как уже отмечалось в п. 2 стационарный режим для данного типа течений не реализуется.

Второй класс автомодельных течений соответствует $g(t) = 1, f(t) = e^{ct}$. В этом случае из (3.1) следует $d\omega/d\psi = -cRe$. Завихренность оказывается линейной функцией от функции тока. Такое автомодельное течение реализуется, например, внутри плоской круглой области, у которой скорость вращения границы меняется по экспоненциальному закону. Но при таком течении размер завихренной области должен был бы оставаться постоянной величиной, что противоречит результатам расчета.

Третий класс – размер зоны завихренного течения растет пропорционально корню из времени $g = \sqrt{t}$, а изменение циркуляции в области, ограниченной автомодельной функ-



Фиг. 4. Зависимости $\omega_0(\psi_0)$ для течения внутри овальной области: 1 – $Re = 10^3$, 2 – 10^2 , 3 – 10, 4 – асимптотическое поведение зависимости в центре овальной области

цией тока, происходит по степенному закону: $f = t^m$. Случай $m = 0$, при котором уравнения Навье–Стокса допускают полностью автомодельное решение, рассмотрен в [7]. В задаче о диффузии двух вихрей [5] при $Re \ll \tau \ll Re^3$ реализуется в главном приближении течение с $m = -1/2$.

Если внутри овальных зон реализуется третий класс автомодельных течений, то из условия того, что скорость на внешней границе овальной зоны при автомодельном изменении ее границы должна оставаться неизменной по времени, следует $m = 1/2$.

Проверим, что характеристики овальной зоны на больших временах в главном приближении удовлетворяют автомодельному закону с $m = 1/2$.

Кривые $L = \alpha\sqrt{t}$ и $L_* = \alpha\sqrt{t}$ проведены на фиг. 3. Величина α для каждого графика определялась из условия совпадения расчетных и автомодельных зависимостей на конечных временах расчета. Совпадение кривых неплохое. Как следует из фиг. 3, α по автомодельному закону при $Re = 10^3$ растет не только размер овальной зоны L_* , но и размер рециркуляционной зоны L .

Подставляя (3.2) в (3.1) при $f(t) = g(t) = \sqrt{t}$, получим

$$\frac{1}{2}\Gamma_0 - \omega_0\sigma_0 = -\frac{1}{Re}\Gamma_0\frac{d\omega_0}{d\psi_0} \quad (3.3)$$

При приближении к центру вращения овальной области величина завихренности стремится к постоянной величине, и, следовательно, $\omega_0\sigma_0 = \Gamma_0$. Из (3.3) следует, что при $\psi_0 \rightarrow \psi_{0min}$

$$\frac{d\omega_0}{d\psi_0} = \frac{Re}{2} \quad (3.4)$$

Зависимости $\omega_0(\psi_0)$ на фиг. 4 показывают изменение характеристик вдоль вертикальной линии, проходящей через центр вращения овальной области. Точка $\psi_0 = 0$, $\omega_0 = 0$ соответствует линии симметрии. Возрастание ψ_0 означает движение от линии симметрии до центра вращения. Затем происходит уменьшение ψ_0 , что соответствует движе-

нию от центра вращения до внешней границы овальной области, на которой $\psi_0 = 0$. Совпадение кривых $\omega_0(\psi_0)$ на вертикальных линиях выше и ниже центра вращения происходит в области, в которой $\omega = \omega(\psi, t)$. При малых ψ завихренность ω перестает быть функцией от ψ . Это слои смешения в окрестности линии симметрии и в окрестности внешней границы рециркуляционной области. Прямыми 4 отмечены асимптоты (3.4), проходящие через $\psi_{0\min}$.

Из зависимости $\omega_0(\psi_0)$ для $Re = 10^3$ становится понятно, чем ограничен рост размера овальной области при больших числах Re . Вне слоев смешения при уменьшении ψ производная $d\omega_0/d\psi_0$ также падает, и если рассматривать течение внутри овальной области в рамках модели идеальной жидкости, то размер овальной области ограничен условием

$$d\omega_0/d\psi_0 = 0, \quad \psi_0 \rightarrow 0 \quad (3.5)$$

Если размер овальной области был бы больше, то завихренность меняла бы знак при каком-то ψ , что физически нереально. Из (3.5) следует, что суммарная циркуляция внутри овальной области

$$\Gamma_0(0) = - \int_{\psi_{0\min}}^0 \omega_0 \frac{d\sigma_0}{d\psi_0} d\psi_0 = 2\omega_0(0)\sigma_0(0)$$

Заключение. Исследована задача об обтекании пластины с движущейся против потока поверхностью. Полученное решение интересно тем, что при стационарных граничных условиях уравнения Навье–Стокса допускают нестационарное растущее со временем решение. С увеличением размера рециркуляционной области не происходит увеличения диффузии завихренности через линию $\psi = 0$, так как размеры границы области растут пропорционально \sqrt{t} , а величина разрыва завихренности на границе области падает пропорционально \sqrt{t} . При постоянной генерации завихренности на пластине рециркуляционные зоны накапливают циркуляцию, которая растет пропорционально \sqrt{t} . Если отойти от пластины вверх по потоку на любое сколь угодно большое расстояние, то можно указать время, через которое эта точка окажется внутри рециркуляционной области.

Предсказать непротиворечивую схему течения для данной задачи без проведения численных расчетов оказалось затруднительным. Поэтому схема течения, ее непротиворечивость, определялись с помощью результатов численных расчетов. Вместе с тем, после выбора схемы течения удалось получить аналитические зависимости, определяющие характеристики течения.

Численные решения задачи приведены только при $u_0 = -5$. Возможно, при других значениях скорости движения поверхности схема течения будет иной. По крайней мере при $|u_0| \leq 1$, т.е. при скорости движения поверхности пластины, меньшей u_∞ , течение выходит на стационарный режим, что подтверждается численными расчетами. Следовательно, существует критическое значение u_0 , разделяющее стационарный и нестационарный режимы течения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 04-01-00765).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Klemp J.B., Acrivos A. A method for integrating the boundary-layer equations through a region of reverse flow. // J. Fluid Mech. 1972. V. 53. Pt 1. P. 177–191.

2. Черный Г.Г. Пограничный слой на движущейся поверхности // Избранные проблемы прикладной механики. Сборник работ, посвященный 60-летию академика В.Н. Челомея. М.: ВИНТИ, 1974. С. 709–719.
3. Черный Г.Г. Пограничный слой на движущейся поверхности // Аэромеханика. К 60-летию академика В.В. Струминского. М.: Наука, 1976. С. 99–104.
4. Klemp J.V., Acrivos A. A moving-wall boundary layer with reverse flow // J. Fluid Mech. 1976. V. 76. Pt 2. P. 363–381.
5. Гайфуллин А.М., Зубцов А.В. Диффузия двух вихрей // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 1. С. 126–142.
6. Batchelor G.K. On Steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number // J. Fluid Mech. 1956. V. 1. Pt 2. P. 177–190.
7. Гайфуллин А.М. Автомодельное нестационарное течение вязкой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 4. С. 29–35.

Москва

Поступила в редакцию
30.IX.2005