

УДК 532.517.013.4:536.24

© 2006 г. В. Б. БЕКЕЖАНОВА

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ С ПРОНИЦАЕМЫМИ ГРАНИЦАМИ В МОДЕЛИ МИКРОКОНВЕКЦИИ

Рассмотрена задача об устойчивости стационарного конвективного течения вязкой несжимаемой жидкости в вертикальном слое с границами разной температуры при наличии поперечного продува. Решена полная спектральная задача для расплава кремния. Построена нейтральная кривая и найдено критическое число Грасгофа. Численные расчеты показывают, что наличие поперечного продува оказывает существенное влияние на устойчивость течения. В модели микроконвекции неустойчивость наступает при меньших волновых числах по сравнению с моделью Обербека–Буссинеска.

Ключевые слова: микроконвекция, устойчивость, нейтральная кривая.

В неравномерно нагретой жидкости возникает движение. Основная причина этого явления состоит в том, что более холодная жидкость тонет в поле тяжести. Движение, вызванное этой причиной, называется тепловой гравитационной конвекцией. Обычно для его описания используют систему уравнений Обербека–Буссинеска (см. [1] и литературу, указанную в ней). Однако, как показано в [2], эта модель не всегда адекватно описывает свободную конвекцию. Например, приближение Обербека–Буссинеска непригодно для описания тепловой гравитационной конвекции, если параметр микроконвекции η

$$\eta = \frac{g a_*^3}{\nu \chi} < 1$$

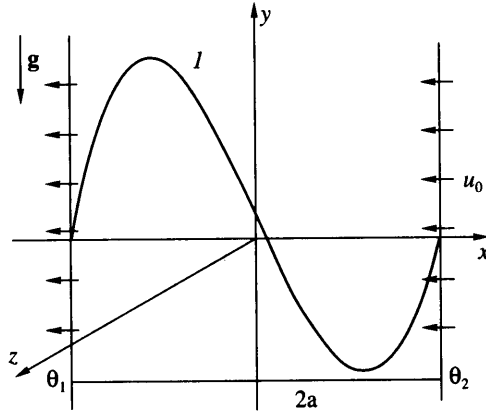
Здесь a_* – характерный размер, g – ускорение силы тяжести, ν – кинематический коэффициент вязкости, χ – коэффициент температуропроводности. Если параметры жидкости ν и χ фиксированы, то условие ($\eta < 1$) удовлетворяется при конвекции в микромасштабах, либо под действием микроускорений.

1. Основное стационарное движение. Вместо уравнения состояния, принятого в модели Обербека–Буссинеска, используется другая зависимость плотности от температуры: $\rho = \rho_0(1 + \beta\theta)^{-1}$ с положительными постоянными ρ_0 , β (ρ_0 – некоторое характерное значение плотности жидкости, β – коэффициент температурного расширения). Если $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $p(\mathbf{x}, t)$ – истинные вектор скорости и давление в жидкости, то замена [2]

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{u} - \beta\chi\nabla\theta \\ q &= \rho_0^{-1}(p - \lambda\operatorname{div}\mathbf{u}) - \beta(\nu - \chi)\chi\Delta\theta \end{aligned} \quad (1.1)$$

где λ – коэффициент второй вязкости, приводит к системе уравнений [3]

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_t + \mathbf{w}\nabla\mathbf{w} + \beta\chi\operatorname{rot}\mathbf{w} \times \nabla\theta + \beta^2\chi^2\operatorname{div}(\nabla\theta \otimes \nabla\theta - \\ - |\nabla\theta|^2\mathbf{I}) = (1 + \beta\theta)(-\nabla q + \nu\Delta\mathbf{w}) + \mathbf{g} \end{aligned} \quad (1.2)$$



Фиг. 1. Схема течения: θ_1, θ_2 – температура на стенках $x = -a$ и $x = a$ соответственно, u_0 – скорость поперечного продува, $1 - u(x)$ – профиль вертикальной компоненты скорости; $\mathbf{g} = (0, -g, 0)$

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \quad (1.3)$$

$$\theta_t + \mathbf{w} \cdot \nabla \theta + \beta \chi |\nabla \theta|^2 = (1 + \beta \theta) \chi \Delta \theta \quad (1.4)$$

Рассматривается плоский вертикальный слой вязкой несжимаемой жидкости, ограниченный твердыми стенками $x = \pm a$. Границы слоя проницаемы: на поверхности $x = a$ имеется однородное вдувание жидкости со скоростью u_0 , а на поверхности $x = -a$ – однородное отсасывание с той же скоростью (фиг. 1).

На границах канала заданы температура (либо поток тепла), условие прилипания для вертикальной компоненты скорости и условие замкнутости потока.

Система уравнений (1.2)–(1.4) в плоском случае для стационарного течения ($w_t = 0, \theta_t = 0$) допускает операторы $\partial/\partial y$ и $\psi d/dq$, что отражает ее инвариантность относительно преобразований переноса по оси y и прибавления к аналогу давления q произвольной константы ψ . Инвариантные решения системы (1.2)–(1.4) относительно оператора $\partial/\partial y + \psi d/dq$ представимы в виде

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, 0), \quad \theta = \theta(x), \quad q = (\varphi - g)y + r(x) \quad (1.5)$$

где обозначено $\varphi = \psi + g$. Подстановка (1.5) в (1.2)–(1.4) приводит к тому, что эта система распадается на последовательно решаемые уравнения функций $w_1(x), w_2(x), \theta(x), r(x)$.

Из уравнения неразрывности (1.3) следует, что $w_1 = \text{const}$, а $w_2(x)$ – произвольная функция; положим $w_1 = u_0 = \text{const}$, $w_2(x) \equiv u(x)$.

Уравнение энергии (1.4) с учетом (1.1), (1.5) будет таким:

$$(u_0 + \beta \chi \theta_x) \theta_x = (1 + \beta \theta) \chi \theta_{xx}$$

Последнее уравнение второго порядка имеет двухпараметрическое семейство стационарных решений

$$\theta(x) = \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{c_1} - 1 + c_2 \exp\left(\frac{c_1 u_0 x}{\chi}\right) \right], \quad c_1 \neq 0 \quad (1.6)$$

и особое решение

$$\theta_0(x) = \Theta - \frac{u_0 x}{\beta \chi}, \quad \Theta = \text{const} \quad (1.7)$$

Линейное поле температур (1.7) совпадает с полем температур в решении для модели Обербека–Буссинеска.

Ищем стационарное решение в виде

$$w = (u_0, v(x), 0), \quad q = (\varphi - g)y, \quad \theta = \theta(x) \quad (1.8)$$

Рассмотрим случай, когда стенки $x = -a$ и $x = a$ нагреты до температур θ_1 и θ_2 соответственно. Особое решение (1.7) будет удовлетворять граничным условиям на стенках $\theta = \theta_w(x, t)$, если

$$\Theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \quad u_0 = \frac{(\theta_1 - \theta_2)\beta\chi}{2a} \quad (1.9)$$

Не ограничивая общности, считаем $\theta_1 > \theta_2$; ниже для определенности положим $\theta_* = (\theta_1 - \theta_2)/2$.

Замечание 1. В дальнейшем будем проводить сравнение с результатами, полученными для модели Обербека–Буссинеска в такой же ситуации, см. [4, с. 104–109]. Там положено $\theta_2 = -\theta_1$, так что $\theta_* = \theta_1$. Это предположение общности не ограничивает, а просто сдвигает начало отсчета температуры.

Для стационарных решений вида (1.8) с экспоненциальным распределением температуры в слое на стенках должны выполняться условия

$$\frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{c_1} - 1 + c_2 \exp\left(-\frac{c_1 u_0 a}{\chi}\right) \right] = \theta_1$$

$$\frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{c_1} - 1 + c_2 \exp\left(\frac{c_1 u_0 a}{\chi}\right) \right] = \theta_2$$

Постоянные c_1 и c_2 определяются по формулам [5]

$$c_1 = \frac{\chi}{u_0 a} \mu_1 > 0, \quad c_2 = \frac{2\beta(\theta_2 - \theta_1)}{\text{sh} \mu_1}$$

где μ_1 – решение уравнения

$$\frac{1}{\mu} + \frac{\omega}{\exp(2\mu) - 1} = \sigma$$

$$\omega = \frac{\beta\chi(\theta_2 - \theta_1)}{u_0 a}, \quad \sigma = (1 + \beta\theta_1) \frac{\chi}{u_0 a} \quad (1.10)$$

Принимая $\theta(x)$ в виде (1.6) с указанными c_1, c_2 , проецируем (1.2) на ось y . В результате получим уравнение для определения вертикальной компоненты скорости v

$$\left(\frac{1}{c_1} + c_2 \exp(kx) \right) v v_{xx} - c_1 c_2 u_0 \exp(kx) v_x = f(x) \quad (1.11)$$

$$k = \frac{c_1 u_0}{\chi}, \quad f(x) = \varphi \left(\frac{1}{c_1} + c_2 \exp(kx) \right) - g \left(\frac{1}{c_1} - 1 + c_2 \exp(kx) \right)$$

После замены $z = 1 + c_1 c_2 \exp(kx)$ общее решение уравнения (1.11) имеет вид

$$v = \int_{h_1}^z \frac{z^\alpha}{z-1} \left[\frac{\varphi - q}{\nu k^2} \int \frac{dz}{z^\alpha (z-1)} + \frac{g c_1}{\nu k^2} \int \frac{dz}{z^{\alpha+1} (z-1)} + D_1 \right] dz + D_2 \quad (1.12)$$

где D_1, D_2 – постоянные, $h_1 = 1 + c_1 c_2 \exp(-ak)$, $\alpha = 1/\text{Pr}$; $\text{Pr} = \nu/\chi$ – число Прандтля.

Постоянная ϕ определяется из условия замкнутости потока

$$\int_{-a}^a \frac{v(x)}{1 + \beta\theta(x)} dx = 0$$

Константы интегрирования D_1, D_2 находятся из условия прилипания на неподвижной твердой стенке $u(\pm a) = 0$.

Замечание 2. В [5] доказываются существование и единственность постоянных c_1 и c_2 . Там же анализируется решение (1.12) и проводится его сравнение с аналогичным решением стационарной задачи в классической постановке.

Введем безразмерный параметр вдувания $Pe = u_0 a / \chi$ – число Пекле. Покажем, что при $Pe \rightarrow 0$ поле температур (1.6) аппроксимирует линейный профиль (1.7).

Функция $\theta(x)$, определяемая из (1.6), при $x = \pm a$ удовлетворяет граничным условиям

$$\theta(-a) = \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{c_1} - 1 + c_2 \exp(-c_1 Pe) \right] = \theta_1$$

$$\theta(a) = \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{c_1} - 1 + c_2 \exp(c_1 Pe) \right] = \theta_2$$

Вычтем из второго уравнения первое и выразим c_2

$$c_2 = \frac{\beta(\theta_2 - \theta_1)}{\exp(c_1 Pe) - \exp(-c_1 Pe)}$$

Тогда при $x = -a$ для u_0 из (1.9) справедливо

$$\frac{1}{c_1} - 1 + \frac{\beta(\theta_2 - \theta_1)}{\exp(2c_1 Pe) - 1} = \beta\theta_1 \quad (1.13)$$

Раскладывая c_1 в ряд по малому параметру β , получим $c_1 = 1 + \delta_1 \beta + \dots$, тогда $c_1^{-1} \approx 1 - \delta_1 \beta$. С учетом такого разложения (1.13) переписется в виде

$$- \delta_1 \beta + \frac{\beta(\theta_2 - \theta_1)}{\exp(2c_1 Pe) - 1} = \beta\theta_1$$

следовательно, при $\beta \rightarrow 0$

$$\delta_1 = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\exp(2Pe) - 1} - \theta_1, \quad c_2 \approx \frac{\beta(\theta_2 - \theta_1)}{\exp(Pe) - \exp(-Pe)}$$

поскольку

$$\exp(2c_1 Pe) - 1 = (\exp(2Pe) - 1) \left[1 + \frac{2Pe\delta_1 \exp(2Pe)}{\exp(2Pe) - 1} \beta \right]$$

Подставляя найденные приближения в (1.6), получим, что при $Pe \rightarrow 0$ функция θ имеет вид

$$\theta \sim \theta_1 + \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{\exp(2Pe) - 1} [\exp(Pe(\eta + 1)) - 1], \quad \eta = \frac{x}{a} \quad (1.14)$$

Если принять u_0 в виде (1.9), то число $Pe = \beta(\theta_1 - \theta_2)/2$. Из (1.14), разлагая в ряд $\exp(2Pe)$ и $\exp(Pe(\eta + 1))$ по степеням Pe , получим выражение

$$\theta = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\eta + \frac{\theta_2 + \theta_1}{2}$$

полностью совпадающее с (1.7) и выражением для температуры в модели Обербека–Буссинеска. Следует заметить, что при $Pe \rightarrow 0$ вертикальная компонента скорости $v(x)$ в модели микроконвекции стремится к соответствующему профилю вертикальной скорости для модели Обербека–Буссинеска.

Если на твердых стенках задан поток тепла, то и в этом случае при $Pe \rightarrow 0$ экспоненциальное распределение температуры будет аппроксимировать линейный профиль. Действительно, пусть справедливо замечание 1. Тогда из (1.14) следует

$$\frac{\theta}{\theta_1} = \theta'(\eta) = 1 + \frac{2}{\exp(2Pe) - 1} [1 - \exp(Pe(\eta + 1))]$$

Раскладывая в ряд члены $\exp(2Pe)$ и $\exp(Pe(\eta + 1))$ по степеням Pe , получим

$$\theta'(\eta) \approx 1 - \frac{1}{1 + Pe} \left[\eta + 1 + \frac{Pe}{2} (\eta + 1)^2 \right]$$

откуда видно, что при $Pe \rightarrow 0$ функция $\theta'(\eta) = -\eta$. Таким образом, показано, что независимо от вида граничных условий поле температур (1.6) аппроксимирует (1.7).

Замечание 3. Если u_0 определяется из (1.9), то при заданных физически разумных параметрах $\beta, \chi, \theta_1, \theta_2, a$ уравнение (1.10) решения не имеет. В этом случае порядок чисел Пекле меньше, чем 10^{-2} , и, как было найдено выше, $Pe = \beta(\theta_1 - \theta_2)/2 = \beta\theta_* = \varepsilon$, т.е. число Пекле совпадает с параметром Буссинеска.

При наличии вдувания появляется поперечная скорость и происходит деформация профилей продольной скорости [5].

2. Уравнения малых возмущений. Пусть $\mathbf{W} = (U, V, W), T, Q$ – возмущения основного движения (1.8), где температура определяется из (1.6). Будем рассматривать только возмущения вдоль оси y , т.е. $W = 0$. Учтем, что $w = 0, q_y = \phi - g$, тогда система уравнений для возмущений [6] примет вид

$$\begin{aligned} U_t + u_0 U_x + v U_y - \beta \chi v_x T_y + \beta^2 \chi^2 \theta_x T_{yy} &= (1 + \beta\theta)(-Q_x + v\Delta U) \\ V_t + u_0 V_x + v V_y + v_x U + \beta \chi [\theta_x (V_x - U_y) + v_x T_x] &+ \\ + \beta^2 \chi^2 [\Delta \theta T_y - \theta_x T_{xy}] &= (1 + \beta\theta)(-Q_y + v\Delta V) + \beta T(g - \phi + v v_{xx}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$U_x + V_y = 0$$

$$T_t + u_0 T_x + v T_y + \theta_x U + 2\beta \chi \theta_x T_x = (1 + \beta\theta)\chi \Delta T + \beta \chi T \Delta \theta$$

$$-a < x < a, \quad -\infty < y < \infty$$

$$\mathbf{W} + \beta \chi \nabla T = 0, \quad T = 0, \quad |x| = a \quad (2.2)$$

Если задан поток тепла, то граничные условия имеют вид

$$\mathbf{W} + \beta \chi \nabla T = 0, \quad T_x = 0, \quad |x| = a$$

Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t\chi}{a^2}, \quad x' = \frac{x}{a}, \quad W' = \frac{Wa}{\chi} \\ T &= \frac{T}{\theta_*}, \quad Q' = \frac{Qa^2}{v\chi} \end{aligned} \quad (2.3)$$

и положим $\theta' = \theta/\theta_*$, $v' = va/\chi$. После подстановки (2.3) в (2.1), (2.2), опуская штрих, получим систему

$$\begin{aligned} U_t + PeU_x + vU_y - \varepsilon v_x T_y + \varepsilon^2 \theta_x T_{yy} &= (1 + \varepsilon\theta)(-Q_x + \Delta U)Pr \\ V_t + PeV_x + vV_y + v_x U + \varepsilon[\theta_x(V_x - U_y) + v_x T_x] + \\ + \varepsilon^2[\theta_{xx} T_y - \theta_x T_{xy}] &= (1 + \varepsilon\theta)(-Q_y + \Delta V)Pr + \frac{Gr + \varepsilon^2 \theta_x v_x T}{1 + \varepsilon\theta} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$U_x + V_y = 0$$

$$T_t + PeT_x + vT_y + \theta_x U + 2\varepsilon\theta_x T_x = (1 + \varepsilon\theta)\Delta T + \varepsilon\theta_{xx} T$$

при $-1 < x < 1$, $-\infty < y < \infty$ с граничными условиями

$$W + \varepsilon\nabla T = 0, \quad T = 0, \quad |x| = 1 \quad (2.5)$$

где $\varepsilon = \beta\theta_*$ – параметр Буссинеска, $Gr = \beta\theta_*ga^3/\chi^2$ – число Грассгофа ($Gr = \varepsilon\eta Pr$).

Решение краевой задачи (2.4), (2.5) ищется в виде нормальных волн

$$(W, Q, T) = (W(x), Q(x), T(x)) \exp[i(\alpha y - Ct)] \quad (2.6)$$

где α – волновое число вдоль оси y , C – комплексный декремент, определяющий временной ход возмущения. В результате подстановки (2.6) в (2.4), (2.5) получим спектральную задачу

$$[i(\alpha v - C) + (1 + \varepsilon\theta)\alpha^2 Pr]U + PeU' - (\varepsilon^2 \alpha^2 \theta_x + \varepsilon \alpha i v_x)T = (1 + \varepsilon\theta)Pr(-Q' + U'')$$

$$[i(\alpha v - C) + (1 + \varepsilon\theta)\alpha^2 Pr]V + (Pe + \varepsilon\theta_x)V' + (v_x - \varepsilon i \alpha \theta_x)U +$$

$$+ (\varepsilon v_x - \varepsilon^2 i \alpha \theta_x)T' + \varepsilon^2 \theta_{xx} i \alpha T = (1 + \varepsilon\theta)(V'' - i \alpha Q)Pr + \frac{Gr + \varepsilon^2 \theta_x v_x T}{1 + \varepsilon\theta} \quad (2.7)$$

$$U' + i \alpha V = 0$$

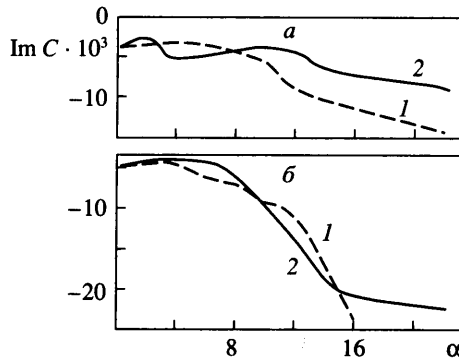
$$[i(\alpha v - C) + \alpha^2(1 + \varepsilon\theta) - \varepsilon\theta_{xx}]T + (Pe + 2\varepsilon\theta_x)T' + \theta_x U = (1 + \varepsilon\theta)T''$$

в интервале $-1 < x < 1$;

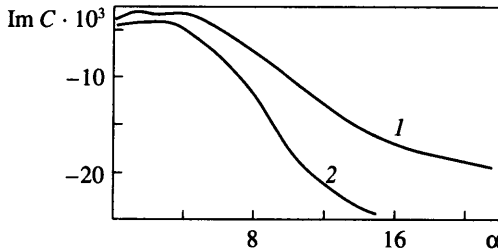
$$U + \varepsilon T = 0, \quad V = 0, \quad T = 0, \quad |x| = 1 \quad (2.8)$$

3. Анализ численного решения. Для численного решения краевой задачи (2.7), (2.8) использован метод ортогонализации [7]. Изучалась устойчивость движения жидкости в слое с проницаемыми стенками для расплава кремния SiO_3 . При этом были взяты следующие значения параметров:

$$v = 2.65 \cdot 10^{-3}, \quad \chi = 0.49, \quad \beta = 0.75 \cdot 10^{-5}, \quad Pr = 5.41 \cdot 10^{-3}$$



Фиг. 2. Зависимости мнимой части комплексного декремента $\text{Im} C$ от волнового числа α при $\text{Re} = 1$: а – $a = 0.025$ (1) и 0.05 см (2) при разнице температур на стенках 100° ($\epsilon = 3.75 \cdot 10^{-4}$); б – $a = 0.025$ (1), 0.05 см (2) при $\Delta\theta = 10^\circ$ ($\epsilon = 3.75 \cdot 10^{-5}$)



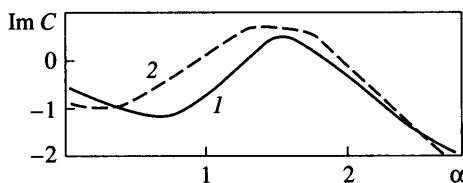
Фиг. 3. Зависимости комплексного декремента $\text{Im} C$ от волнового числа α при $\Delta\theta = 100^\circ$ ($\epsilon = 3.75 \cdot 10^{-4}$), $a = 0.05$ см при различных значениях числа Пекле: 1, 2 – $\text{Re} = 3, 5$

Расчеты проводились для модуля разницы температур $|\theta_1 - \theta_2|$ на стенках 10 и 100° . Это означает изменение безразмерного параметра $\epsilon = \beta|\theta_1 - \theta_2|/2$. Линейный размер слоя выбирался таким, чтобы выполнялось неравенство $\eta = (2a)^3 g / \nu \chi < 1$, которое является критерием применимости рассматриваемой модели микроконвекции [2]. В данных расчетах малость параметра η достигалась за счет малости ускорения силы тяжести g . При $g \sim 10^{-3} g_0$ ($g_0 = 981$ см/с² – ускорение силы тяжести вблизи Земли) масштаб длины должен удовлетворять неравенству $2a < 0.11$ см. При указанных значениях a, β, χ, ν найдена зависимость мнимой $\text{Im} C$ и вещественной части $\text{Re} C$ от волнового числа α .

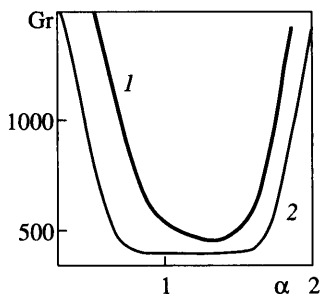
Более медленное изменение кривых $\text{Im} C(\alpha)$ на фиг. 2, соответствующих меньшим значениям характерного размера a , позволяет говорить о стабилизирующем влиянии вязкости. Значения $\text{Re} C$ для указанных значений параметров не превосходят 10^{-7} . Таким образом, для любых α имеем $\text{Im} C < 0$, т.е. движение устойчиво.

Кривые $\text{Im} C$ для различных чисел Пекле при фиксированных значениях a и ϵ на фиг. 3 показывают, что рост поперечной скорости приводит к стабилизации течения.

Сравнение результатов решения аналогичной задачи в постановке Обербека–Буссинеска проведено с численным решением спектральной задачи (2.7), когда число Грасгофа $\text{Gr} = \epsilon \eta \text{Pr}$ конечно при $\epsilon \ll 1$. Расчеты проводились для расплава кремния с теми же физическими параметрами и $|\theta_1 - \theta_2| = 100^\circ$ для различных значений чисел Пекле (фиг. 4). При $\text{Re} = 10^{-3}$ с увеличением η кривая $\text{Im} C$ приближается к оси $\text{Im} C = 0$ и впервые пересечет эту ось при $\alpha = \alpha_1 = 0.96$, когда $\eta_2 = 2.0142 \cdot 10^8$. При $\alpha_1 < \alpha < 1.89 = \alpha_2$



Фиг. 4. Зависимости комплексного декремента $\text{Im } C$ от волнового числа α при $\text{Re} = 10^{-3}$: 1, 2 – для моделей Обербека–Буссинеска и микроконвекции



Фиг. 5. Нейтральные кривые: 1, 2 – для моделей Обербека–Буссинеска и микроконвекции

кривая $\text{Im } C$ принимает положительные значения, вновь обращаясь в нуль в точке α_2 и убывая с ростом α . В этом случае число Грассгофа $\text{Gr}_2 = \epsilon \eta_2 \text{Pr} = 408.64 < \text{Gr}_*$, где $\text{Gr}_* = 495.628$ (при $\alpha_* = 1.34$) – критическое число Грассгофа для классической задачи [4]. Толщина слоя в этом случае $2a = 31.083$ см для $g = 10^{-3} g_0$.

Приведены также результаты расчетов для других значений чисел Пекле. При $\text{Re} = 1$: $\alpha_1 = 1.19$, $\text{Gr}_2 = 842.81$, при $\text{Re} = 3$: $\alpha_1 = 1.62$, $\text{Gr}_2 = 2274.26$.

Кроме того, при сравнении результатов настоящей работы с результатами, полученными в [3] для случая с непроницаемыми твердыми стенками, оказалось, что в случае экспоненциального распределения температуры в слое критическое волновое число $\alpha_1 = 0.96$, при котором наступает неустойчивость, меньше критического $\alpha_1 = 1.14$, полученного для случая особого распределения температуры. Это объясняется тем, что $\theta_x(x)$ для температуры, заданной в виде (1.6), всюду в слое имеет большее значение, чем $\theta_{0x}(x)$.

Также проведено сравнение нейтральных кривых (фиг. 5). Заметим, что 1) минимум кривой 2 (обозначим его Gr_{2*}) смещен влево по оси α , т.е. неустойчивость возникает при меньших волновых числах; 2) $\text{Gr}_{2*} < \text{Gr}_*$.

Заключение. Показано, что стационарное течение в вертикальном слое с проницаемыми границами в модели микроконвекции всегда устойчиво при $\eta < 1$, а увеличение скорости поперечного продува имеет стабилизирующее влияние. Спектр задачи для модели микроконвекции аппроксимирует спектр аналогичной задачи в классической постановке. При сравнении оказалось, что для $\eta > 1$ (число Грассгофа конечно, а параметр Буссинеска мал) в модели микроконвекции неустойчивость наступает при меньших волновых числах.

Построена нейтральная кривая и найдено критическое число Грассгофа Gr_{2*} , причем $\text{Gr}_{2*} < \text{Gr}_*$, где Gr_* – критическое число для модели Обербека–Буссинеска.

Автор выносит глубокую благодарность В.К. Андрееву за полезные замечания.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00836) и Красноярского краевого фонда науки (грант 15G262).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 638 с.
2. Пухначев В.В. Модель конвективного движения при пониженной гравитации // Моделирование в механике. 1992. Т. 6. № 4. С. 47–56.
3. Андреев В.К., Бекежанова В.Б. Об устойчивости стационарного течения в вертикальном слое в модели микроконвекции // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 2. С. 57–68.
4. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 319 с.
5. Бекежанова В.Б. Об одном стационарном решении уравнений микроконвекции в вертикальном слое // ПМТФ. 2001. Т. 42. Р. 3. С. 63–71.
6. Андреев В.К., Бекежанова В.Б. Возникновение микроконвекции в плоском слое // Препринт № 1-01. Красноярск: ИВМ СО РАН. 2001. 38 с.
7. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16. Вып. 3. С. 171–173.

Красноярск

Поступила в редакцию
10.VI.2005