МЕХАНИКА

ЖИДКОСТИ И ГАЗА

№ 3 • 2006

УДК 532.582

© 2006 г. В. А. ГОРОДЦОВ

ВОЛНОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ ПРИ БЫСТРОМ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ В ОДНОРОДНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Вопрос о волновом сопротивлении эллипсоидов, движущихся в однородно стратифицированной идеальной жидкости, рассмотрен на основе моделирования тел поверхностными распределениями массовых источников. Для получения аналитических результатов использованы известные из теории однородной жидкости распределения, позволяющие описать излучение внутренних волн быстро движущимися эллипсоидами вращения (сфероидами) в пределе больших чисел Фруда. Найден асимптотически упрощенный вид зависимости волнового сопротивления от числа Фруда и степени вытянутости сфероида. В частном случае сферы получен результат, подтвержденный ранее Гринслейдом сравнением с численным расчетом и экспериментальными данными.

Ключевые слова: стратифицированная идеальная жидкость, внутренние гравитационные волны, волновое сопротивление, эллипсоид, сфероид, сфера, число Фруда, поверхностные распределения источников.

В расслоенных по плотности жидкостях распространяются внутренние гравитационные волны. Порождение таких волн малой амплитуды механическим образом, например движущимися телами, может быть описано как излучение волн массовыми и силовыми источниками. Решение линейных задач тогда строится в виде суперпозиции элементарных решений для точечных источников. Такие элементарные решения представляют собой функцию Грина. Подобным методом было решено много задач для стратифицированных жидкостей и, прежде всего, для однородно стратифицированной жидкости, жидкости с постоянной частотой плавучести N [1–3].

Для теоретического исследования волн, порождаемых движущимися телами, заменяют последние пространственными распределениями источников, эквивалентными телам по своему гидродинамическому действию. Наиболее часто используют для этого массовые источники, хотя в некоторых ситуациях более удобными оказываются силовые [4]. Если выбирать поверхностные распределения источников, сосредоточенных на поверхности обтекаемого тела, то поле скоростей течения представляется поверхностным интегралом от произведения распределения источников и функции Грина. Тогда в итоге выполнения граничного условия обтекания тела стратифицированным потоком получится граничное интегральное уравнение для искомого моделирующего поверхностного распределения источников [5].

Точное аналитическое решение подобных граничных интегральных уравнений для однородно стратифицированной жидкости представляет значительные трудности даже для тел простейших симметричных форм. Однако при больших скоростях движения тел возможно существенное упрощение задачи. В ситуациях тел с размерами, малыми по сравнению с длинами излучаемых внутренних волн $\sim v_0/N$ (наиболее энергетически важных), т.е. при больших числах Фруда $v_0/(NL) \gg 1$, оказывается возможным в качестве первого приближения заимствовать более простые и широко изученные модельные распределения источников из теории однородной жидкости. Действительно, в этом случае все точки поверхности обтекаемого тела, излучающие волны, находятся в зоне с размерами меньшими одной характерной длины волны. Такое моделирование привлекательно своей универсальностью. Эти упрощенные модельные распределения источников одинаково пригодны для получения асимптотических оценок первого приближения (по обратному числу Фруда) в жидкостях с различными стратификациями.

В данной работе сначала разбирается вопрос о потерях энергии на излучение внутренних волн при равномерном горизонтальном движении произвольных распределений массовых источников в несжимаемой однородно стратифицированной идеальной жидкости. Затем для тел эллипсоидальной формы рассмотрены высокоскоростные асимптотики волнового сопротивления, полученные с использованием модельных поверхностных распределений массовых источников из теории однородной жидкости (см. о последних в [6]). В частном случае сферы отсюда следуют результаты [5], получившие экспериментальное подтверждение [7].

1. Малые возмущения однородно стратифицированной идеальной несжимаемой жидкости. Гидродинамическое состояние несжимаемой идеальной сплошной среды описывается системой нелинейных уравнений, отражающих баланс импульса, сохранение массы и условие несжимаемости. При ограничении малыми линейными возмущениями первоначально неподвижной однородно стратифицированной по плотности основного состояния жидкости $\rho_0(z)$ (с постоянной частотой плавучести) линеаризованные уравнения для возмущений скорости $\mathbf{v}$, плотности ρ и давления p принимают вид

$$\rho_{00}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \rho\mathbf{g} + \rho_{00}\mathbf{f}, \quad \nabla\mathbf{v} = m, \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho_{00}\frac{N^2}{g^2}(\mathbf{v}\mathbf{g}) = 0 \tag{1.1}$$

Здесь пренебрегается изменением плотности возмущаемого состояния в выражениях для силы инерции и силового источника (в приближении Буссинеска $\rho_{00} = \text{const}$), принимается постоянным квадрат частоты плавучести $N^2 = (g/\rho_{00})d\rho_0/dz$, ось z выбрана в направлении силы тяжести и учтены массовые и силовые источники m, $\mathbf{f}$, вызывающие гидродинамические возмущения.

После исключения из этой системы уравнений возмущений скорости и плотности получаем отдельное уравнение четвертого порядка для возмущений давления (для других характеристик аналогично)

$$Lp = -\rho_{00}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + N^2\right)m, \quad L \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2 + N^2\nabla_h^2$$

Здесь и далее ограничимся случаем, когда массовый источник является единственным источником гидродинамических возмущений, и индекс h указывает на выбор горизонтальной составляющей соответствующего вектора.

С помощью функции Грина $G(\mathbf{r}, t)$, удовлетворяющей неоднородному уравнению с сингулярной правой частью

$$LG(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r})\delta(t)$$

можно представить возмущения давления в виде интегральной свертки этой функции Грина с массовым источником

$$p(\mathbf{r}, t) = -\rho_{00}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + N^2\right)\int d^n r' dt' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')m(\mathbf{r}', t') \tag{1.2}$$

в которой индекс n характеризует размерность рассматриваемой задачи. Для избавления от проблемы выбора условий излучения будем пользоваться во всех подобных соотношениях запаздывающей функцией Грина, удовлетворяющей условию причинности $G(\mathbf{r}, t) = 0, t < 0$.

Энергетика малых возмущений достаточно проста. Из линейных уравнений (1.1), ограничиваясь массовым источником, нетрудно получить уравнение баланса энергии для квадратичных характеристик возмущений

$$\frac{\partial}{\partial t}\int d^n rE + \int d\mathbf{s}\cdot\mathbf{S} = \int d^n rp(\mathbf{r}, t)m(\mathbf{r}, t) \equiv W$$

$$E = \rho_{00}\frac{v^2}{2} + \frac{g^2}{\rho_{00}N^2}\frac{\rho^2}{2}, \quad \mathbf{S} = p\mathbf{v}$$

Здесь изменение энергии возмущений (кинетической в сумме с потенциальной) в объеме среды за единицу времени вместе с потоком энергии, излучаемой через окружающую объем поверхность, балансируется интегралом потерь энергии массовым источником в единицу времени W. При движении источников с постоянной скоростью энергия возмущений в объеме не изменяется, и тогда достаточно определить лишь одну интегральную энергетическую характеристику. Более простой из них оказывается величина потерь W, благодаря линейности по гидродинамическому возмущению при известном источнике.

2. Волновое сопротивление равномерно горизонтально движущихся массовых источников в однородно стратифицированной жидкости. При общем анализе волнового сопротивления, испытываемого движущимися распределениями источников, удобно пользоваться разложениями Фурье с интегрированиями по частотам и волновым векторам плоских волн следующего вида

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi}\int d\omega G_\omega(\mathbf{r})e^{-i\omega t} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int d^n kG_\mathbf{k}(t)e^{i\mathbf{kr}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1}\int d^n kd\omega G_{\mathbf{k},\omega}(t)e^{i\mathbf{kr}-i\omega t}$$

$$G_\mathbf{k}(t) = \int d^n rG(\mathbf{r}, t)e^{-i\mathbf{kr}}, \quad G_\omega(\mathbf{r}) = \int dtG(\mathbf{r}, t)e^{i\omega t}$$

$$G_{\mathbf{k},\omega} = \int d^n rdtG(\mathbf{r}, t)e^{-i\mathbf{kr}+i\omega t}$$

Здесь подразумевается, что каждое интегрирование в многократных интегралах проводится по всему интервалу от $-\infty$ до $+\infty$. В случае частотного фурье-образа запаздывающей функции Грина в силу условия причинности интервал интегрирования сокращается до полубесконечного, что ведет к важному свойству его аналитичности в верхней полуплоскости комплексной частоты.

Для равномерно движущегося со скоростью $\mathbf{v}_0$ распределения источников

$$m(\mathbf{r}, t) = M(\mathbf{R}), \quad \mathbf{R} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t$$

фурье-образы принимают вид

$$m_\mathbf{k}(t) = M_\mathbf{k}e^{-i\mathbf{kv}_0 t}, \quad m_\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{v_0}e^{i\omega x/v_0}\int dx'M(x', y, z)e^{-i\omega x'/v_0}$$
$$m_{\mathbf{k},\omega} = 2\pi M_k\delta(\omega - \mathbf{kv}_0) \tag{2.1}$$

Здесь при получении второй из формул предполагается, что равномерное горизонтальное движение источников происходит в направлении оси x. Для полного фурье-образа равномерно движущегося источника характерна линейная связь между частотой и волновым вектором $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}_0$.

Формула для возмущений давления (1.2) может быть переписана через фурье-образы входящих в нее величин следующим образом:

$$p(\mathbf{R}) = \frac{i\rho_{00}}{(2\pi)^n}\int d^n k d\omega\omega(N^2-\omega^2)G_{\mathbf{k},\omega}M_{\mathbf{k}}\delta(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_0)e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}$$

и для волнового сопротивления, равного потерям энергии на единицу пути

$$D = \frac{1}{v_0}W = \frac{1}{v_0}\int d^n r p(\mathbf{r},t)m(\mathbf{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^n v_0}\int d^n k p_{\mathbf{k}}(\mathbf{r},t)m_{-\mathbf{k}}(\mathbf{r},t)$$

после достаточно простых преобразований получим

$$D = \frac{i\rho_{00}}{(2\pi)^n v_0}\int d^n k d\omega\omega(N^2-\omega^2)G_{\mathbf{k},\omega}|M_{\mathbf{k}}|^2\delta(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_0) \tag{2.2}$$

Далее в силу общих свойств симметрии фурье-образа запаздывающей функции Грина

$$\mathrm{Re}G_{-\mathbf{k},-\omega} = \mathrm{Re}G_{\mathbf{k},\omega}, \quad \mathrm{Im}G_{-\mathbf{k},-\omega} = -\mathrm{Im}G_{\mathbf{k},\omega}$$

ненулевой вклад в интегральное выражение для волнового сопротивления дает только мнимая часть фурье-образа функции Грина, которая сосредоточена на дисперсионной поверхности внутренних волн. Для однородно стратифицированной жидкости дисперсионное уравнение волн и соответственно мнимая часть фурье-образа функции Грина имеют хорошо известный вид [8]

$$\omega^2 = N^2\frac{k_h^2}{k^2}, \quad \mathrm{Im}G_{\mathbf{k},\omega} = -\pi\,\mathrm{sign}\,\omega\,\delta(\omega^2k^2-N^2k_h^2)$$

После подстановки последнего выражения в (2.2) имеем

$$D = \frac{\pi\rho_{00}}{(2\pi)^n v_0}\int d^n k d\omega|\omega|(N^2-\omega^2)|M_{\mathbf{k}}|^2\delta(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_0)\delta(\omega^2k^2-N^2k_h^2) \tag{2.3}$$

В итоге под интегралом оказывается произведение двух дельта-функций. Одна отражает равномерность движения источника, а другая дисперсионные свойства внутренних волн. Благодаря этим двум дельта-функциям число интегрирований легко понижается на два. Тем самым в плоской задаче (при $n = 2$) остается выполнить лишь одно интегрирование. Одно интегрирование остается и в случае вертикального движения осесимметричных распределений источников. В общей ситуации пространственной задачи с $n = 3$ необходимо выполнить еще два интегрирования. Так при горизонтальном движении источников после интегрирования в (2.3) по направлениям волновых векторов получим

$$\begin{gathered} D = \frac{\rho_{00}}{8\pi^2v_0^2}\int_0^N d\omega\int_{N/v_0}^{\infty}dk\sqrt{\frac{N^2-\omega^2}{k^2-N^2/v_0^2}}\Sigma|M_{\mathbf{k}}|^2 \\ \mathbf{k} = \left(\frac{\omega}{v_0}, \frac{\omega}{Nv_0}\sqrt{k^2v_0^2-N^2}, \frac{k}{N}\sqrt{N^2-\omega^2}\right) \end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь знак суммы подразумевает суммирование по четырем типам волновых векторов, три из которых отличаются от выписанного знаком одной из компонент. Возможные частоты излучаемых линейных внутренних волн ограничены сверху по величине, что хорошо известно, частотой плавучести N. Волновые числа при этом в трехмерной задаче ограничены снизу отношением N/υ_0, в то время как при горизонтальном движении источников в двумерной задаче дисперсионное уравнение и связь $\omega = k_x\upsilon_0$ вырезают точно одно волновое число $k = N/\upsilon_0$.

Другое удобное представление общей формулы для волнового сопротивления можно получить, вернувшись в (2.3) к исходной пространственной записи распределений источников от форм-фактора $|M_{\mathbf{k}}|^2$. С помощью обратного преобразования Фурье

$$M_{\mathbf{k}} = \int d^n R M(\mathbf{R}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}}$$

формула для волнового сопротивления переписывается в виде интегральной квадратичной формы по распределениям источников

$$D = \int d^n R d^n R' \Lambda(\mathbf{R}-\mathbf{R}') M(\mathbf{R}) M(\mathbf{R}')$$

$$\Lambda(\mathbf{R}) = \frac{\pi\rho_{00}}{(2\pi)^n \upsilon_0}\int d^n k d\omega|\omega|(N^2-\omega^2)\delta(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_0)\delta(\omega^2 k^2 - N^2 k_h^2)e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}}$$

3. Волновое сопротивление равномерно горизонтально быстро движущегося эллипсоида. Ограничимся теперь случаями распределений массовых источников, сосредоточенных на поверхности трехмерных тел, а именно

$$M(\mathbf{R}) = \sigma(\mathbf{R})|\nabla S|\delta(S(\mathbf{R})) \tag{3.1}$$

Здесь уравнением поверхности тела является $S(\mathbf{R}) = 0$, а $\sigma(\mathbf{R})$ – плотность поверхностных источников. В случае непроницаемого твердого тела сумма массовых источников и стоков, моделирующих движущееся в жидкости тело, должна обращаться в нуль

$$\int d^3 R M(\mathbf{R}) = \int_S dS \sigma(\mathbf{R}) = 0$$

При подсчете волнового сопротивления в качестве первого приближения будем использовать поверхностные распределения массовых источников, заимствованные из теории потенциальных течений идеальной жидкости [6, 9, 10]. Согласно [6], для трехосновного эллипсоида с уравнением поверхности

$$S(\mathbf{R}) \equiv \frac{(x-\upsilon_0 t)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

равномерно движущегося в направлении оси x в однородной идеальной жидкости, плотность поверхностных источников определяется выражением

$$\sigma(\mathbf{R}) = \frac{2\upsilon_0}{2-A_0}n_x = \frac{2\upsilon_0}{2-A_0}\frac{1}{|\nabla S|}\frac{\partial S}{\partial x}$$

с коэффициентом A_0, представляемым интегралом

$$A_0 = abc\int_0^\infty d\lambda[(\lambda+a^2)^3(\lambda+b^2)(\lambda+c^2)]^{-1/2} \tag{3.2}$$

причем отношение $A_0/(2 - A_0)$ равно коэффициенту присоединенной массы эллипсоида при его движении вдоль оси x.

При таком выборе поверхностных источников после достаточно простых преобразований находим (через $J_{3/2}(\kappa)$ обозначена функция Бесселя дробного порядка от $\kappa = (a^2k_x^2 + b^2k_y^2 + c^2k_z^2)^{1/2}$)

$$M(\mathbf{R}) = \frac{4v_0 x}{(2-A_0)a^2}\delta(S(\mathbf{R}))$$

$$M_{\mathbf{k}} = i\frac{8\pi abc v_0 k_x}{2-A_0}\frac{\partial}{\kappa\,\partial\kappa}\left(\frac{\sin\kappa}{\kappa}\right) = -i\frac{4\pi\sqrt{2\pi}abc v_0}{2-A_0}\frac{k_x}{\kappa^{3/2}}J_{3/2}(\kappa)$$

$$m_{\mathbf{k},\omega} = -i\frac{8\pi^2\sqrt{2\pi}abc v_0}{2-A_0}\frac{k_x}{\kappa^{3/2}}J_{3/2}(\kappa)\delta(\omega - k_x v_0)$$

и, подставив найденное выражение для фурье-образа массовых источников в (2.4), получим следующий результат для волнового сопротивления эллипсоида, равномерно движущегося вдоль одной из своих главных осей в направлении оси x в однородно стратифицированной жидкости

$$D = \frac{16\pi a^2b^2c^2\rho_{00}}{(2-A_0)^2 v_0^2}\int_0^N d\omega \int_{N/v_0}^{\infty} dk \sqrt{\frac{N^2-\omega^2}{k^2 - N^2/v_0^2}}\,\omega^2\frac{J_{3/2}^2(\kappa)}{\kappa^3}$$

$$\kappa \equiv \sqrt{k^2c^2 + \frac{k^2\omega^2}{N^2}(b^2-c^2) + \frac{\omega^2}{v_0^2}(a^2-b^2)}$$

Такой результат, строго говоря, применим лишь при больших числах Фруда (лишь тогда вправе использовать указанное выше приближение однородной жидкости при выборе выражения для источника). Поэтому картина будет более ясной при переходе к безразмерным переменным интегрирования $\eta = \omega/N$, $\xi = kv_0/N$, коэффициенту сопротивления c_D, числу Фруда $F = v_0/(Nc)$ (определяемому по вертикальному размеру эллипсоида) и геометрическим безразмерным отношениям

$$c_D \equiv \frac{2D}{\pi\rho_{00}v_0^2c^2} = \frac{32a^2b^2}{(2-A_0)^2c^4}\frac{1}{F^4}\int_0^1 d\eta\int_1^{\infty} d\xi\sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi^2-1}}\,\eta^2\frac{J_{3/2}^2(\kappa)}{\kappa^3}$$

$$\kappa \equiv \frac{1}{F}\sqrt{\xi^2 + \xi^2\eta^2\frac{b^2-c^2}{c^2} + \eta^2\frac{a^2-b^2}{c^2}}$$

Значительное упрощение подынтегральной функции происходит в частном случае эллипсоида вращения (сфероида), движущегося горизонтально в направлении его оси симметрии вдоль оси x, т.е. когда $b = c$. В этом случае коэффициент волнового сопротивления следующим образом зависит от двух безразмерных параметров F, e

$$c_D = f(e)g(F,e), \quad g(F,e) = \frac{1}{F^4}\int_0^1 d\eta\int_1^{\infty} d\xi\,\eta^2\sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi^2-1}}\frac{J_{3/2}(\kappa)}{\kappa^3} \tag{3.3}$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{\xi^2}{F^2} + \frac{\eta^2}{F_*^2}}, \quad F_* = F\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}, \quad e \equiv \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a} \tag{3.4}$$

причем функция $f(e)$, связанная с интегралом (3.2) в несколько упрощенном виде, выражается через элементарные функции

$$f(e) = \frac{32}{1-e^2}\left\{2 - \frac{1-e^2}{e^3}\left[\ln\frac{1+e}{1-e} - 2e\right]\right\}^{-2}$$

Здесь и далее предполагается $a > c = b$ и для эксцентриситета сфероида $e < 1$.

Из полученного результата (3.3), (3.4) видно, что для быстро движущегося тела удлиненной формы анализ поведения волнового сопротивления при больших числах Фруда F осложняется зависимостью его еще от эксцентриситета. Двухпараметрическая интегральная зависимость $g(F, e)$ тогда приводится фактически к зависимости от пары чисел Фруда F, F_*, которые для сильно вытянутого сфероида ($a \gg c$) представляют собой числа Фруда с сильно различающимися характеристиками длины и ширины сфероида $F = v_0/(Nc) \gg F_* \approx F\sqrt{1-e^2} \approx v_0/(Na)$. При большом первом числе Фруда ($F \gg 1$) второе, как произведение большого параметра на малый, может иметь разный порядок величины и, в частности, быть порядка единицы. В частном случае сфероида "яйцевидной" формы с $e = 1/\sqrt{2}$ два числа Фруда равны друг другу $F_* = F$. При малой эксцентричности сфероида (при $e \to 0$) и большом числе Фруда $F \gg 1$ второе число Фруда оказывается еще большим ($F_* \approx F/e \gg F \gg 1$). Для разделения анализа интегральной величины g от двух чисел Фруда оказывается удобным выполнить факторизацию зависимостей от них в подынтегральном выражении. Это можно сделать с помощью интегральных представлений из [11], которые позволяют написать

$$\frac{J_{3/2}(\kappa)}{\kappa^3} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} d\alpha \int_0^{\pi/2} d\beta \int_0^{\pi/2} d\gamma p \cos\frac{2q\xi}{F}\cos\frac{2q_*\eta}{F_*}$$

$$q \equiv \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma, \quad q_* \equiv \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma, \quad p \equiv \sin^3\alpha\sin\beta\cos^5\beta$$

После этого интегрирование по ξ в формуле (3.3) легко выполняется, и результат принимает при тригонометрической замене $\eta = \sin\varphi$ следующий вид

$$c_D = -\frac{f(e)}{2\pi F^4}\int_0^{\pi/2} d\alpha \int_0^{\pi/2} d\beta \int_0^{\pi/2} d\gamma \int_0^{\pi/2} d\varphi p \sin^2 2\varphi \cos\frac{2q_*\sin\varphi}{F_*} Y_0\left(\frac{2q}{F}\right) \tag{3.5}$$

Здесь в подынтегральном выражении от числа Фруда F оказывается зависящей только цилиндрическая функция второго рода (функция Неймана) $Y_0(2q/F)$.

При больших скоростях движения сфероида, когда $F \gg 1$, а о величине числа F_* предположений не делается, благодаря известной асимптотической оценке функции Неймана при малых аргументах [11]

$$Y_0\left(\frac{2q}{F}\right) \approx \frac{2}{\pi}(-\ln F + C + \ln q), \quad F \gg 1 \geq q, \quad C \approx 0.577$$

интегральное представление для коэффициента волнового сопротивления (3.5) асимптотически упрощается

$$c_D \approx f(e)\frac{C_1 \ln F + C_2}{F^4}, \quad F \gg 1$$

$$C_1 = g_*(F_*), \quad C_2 = h(F_*) \tag{3.6}$$

$$h(F_*) + Cg_*(F_*) = -\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} d\alpha \int_0^{\pi/2} d\beta \int_0^{\pi/2} d\gamma \int_0^{\pi/2} d\varphi p \sin^2 2\varphi \ln q \cos\frac{2q_* \sin\varphi}{F_*}$$

При этом для функции $g_*(F_*)$ ответ легко доводится до однократного интегрального представления

$$g_*(F_*) = F_*^3 \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi} J_{3/2}^2\left(\frac{\sin\varphi}{F_*}\right)$$

Если сфероид не является сильно вытянутым, так что $F_* > F \gg 1$ или $F_* \approx F \gg 1$, то для указанных коэффициентных функций получаются асимптотические разложения по малому параметру $1/F_*$ вида

$$g_*(F_*) \approx \frac{1}{72}\left(1 - \frac{1}{10F_*^2} + \ldots\right), \quad h(F_*) + Cg_*(F_*) \approx \frac{1}{72}\left(\frac{7}{4} - \frac{1}{F_*^2} + \ldots\right), \quad F_* \gg 1$$

и, ограничиваясь главными членами асимптотик, находим следующую высокоскоростную асимптотическую зависимость волнового сопротивления слабо вытянутых сфероидов при больших скоростях движения (больших обоих числах Фруда) от числа Фруда и эксцентриситета

$$c_D \approx f(e)\frac{\ln F + 7/4 - C}{72F^4}, \quad (F_*, F \gg 1) \tag{3.7}$$

В промежуточной ситуации вытянутых сфероидов с $e \to 1$ и больших обоих чисел Фруда $F \gg F_* = F\sqrt{1/e^2 - 1} \gg 1$ имеем асимптотическое упрощение $f(e) \approx 8/(1 - e^2)$, и соответственно для коэффициента волнового сопротивления

$$c_D \approx \frac{\ln F + 7/4 - C}{9F_*^2 F^2}, \quad (F \gg F_* \approx F\sqrt{1 - e^2} \gg 1) \tag{3.8}$$

4. Волновое сопротивление быстро движущегося шара. Частному случаю сфер соответствует $a = b = c$ и, следовательно, $e = 0$. Тогда $f(e = 0) = 18$, $F_* = \infty$ и формулы для коэффициента волнового сопротивления в стратифицированной жидкости (3.3), (3.4) приводятся к виду однократного интегрального представления

$$c_D = \frac{9\pi}{8F}\int_1^{\infty} d\xi \frac{J_{3/2}(\xi/F)}{\xi^3\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

совпадающего с найденным ранее для случая сферы в [5]. Асимптотика больших чисел Фруда соответствует результатам (3.6), (3.7) с постоянными коэффициентами

$$c_D \approx \frac{\ln F + 7/4 - C}{4F^4}, \quad F \gg 1$$

При малых числах Фруда интеграл оценивается с помощью метода стационарной фазы

$$c_D \approx \frac{3}{4} + \frac{9}{16}\sqrt{\pi F}\cos\left(\frac{2}{F} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{9}{8}\sqrt{\pi F^3}\sin\left(\frac{2}{F} + \frac{\pi}{4}\right) + \ldots, \quad F \ll 1$$

Эти две дополняющие друг друга асимптотики формально вполне удовлетворительно описывают поведение коэффициента волнового сопротивления сферы при любых числах Фруда, что подтверждает численная оценка приведенного здесь интегрального ответа [7]. Однако последняя асимптотика, как и точный интегральный ответ при малых числах Фруда, выводят за рамки применимости исходного моделирования поверхностными распределениями массовых источников. Действительно использованная модель была заимствована из теории однородной жидкости, и поэтому можно рассчитывать на справедливость результатов для стратифицированной жидкости лишь в младшем приближении по обратному числу Фруда. Это подтверждается сравнением указанных теоретических ожиданий с экспериментальными данными, выполненным в [7]. Соответствие теоретических и экспериментальных результатов оказывается достаточно хорошим при $F > 1$.

Заключение. Использование поверхностных распределений массовых источников, заимствованных из теории потенциального обтекания сфероида однородной идеальной жидкостью, позволило получить интегральные зависимости волнового сопротивления сфероида, равномерно горизонтально движущегося в однородно стратифицированной жидкости. При больших числах Фруда найдены асимптотические зависимости достаточно простого аналитического вида коэффициента волнового сопротивления от числа Фруда и эксцентриситета сфероида. В частном случае сферически симметричного распределения источников результаты переходят в опубликованные ранее.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (№ 05-01-00154) и Программы ОЭММПУ РАН ОЕ-14 “Динамика и акустика неоднородных жидкостей, газожидкостных смесей и суспензий”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Voisin B.* Internal wave generation in uniformly stratified fluids. Pt 1. Green’s function and point sources // J. Fluid Mech. 1991. V. 231. P. 439–480.
2. *Voisin B.* Internal wave generation in uniformly stratified fluids. Pt 2. Moving point sources // J. Fluid Mech. 1994. V. 261. P. 333–374.
3. *Voisin B.* Limit states of internal wave beams // J. Fluid Mech. 2003. V. 496. P. 243–293.
4. *Аксенов А.В., Городцов В.А., Стурова И.В.* Моделирование обтекания цилиндра стратифицированной идеальной жидкостью. Препринт № 282. М.: Ин-т проблем механики АН СССР, 1986.
5. *Городцов В.А., Теодорович Э.В.* Излучение внутренних волн при быстром горизонтальном движении цилиндров и шаров // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 6. С. 94–100.
6. *Костюков А.А.* Взаимодействие тел, движущихся в жидкости. Л.: Судостроение, 1972. 311 с.
7. *Greenslade M.D.* Drag on a sphere moving horizontally in a stratified fluid // J. Fluid Mech. 2000. V. 418. P. 339–350.
8. *Городцов В.А., Теодорович Э.В.* Линейные внутренние волны в экспоненциально стратифицированной идеальной несжимаемой жидкости. Препринт № 114. М.: Ин-т проблем механики АН СССР, 1978.
9. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. I. Изд. 6-е. М.: ГИФМЛ, 1963. 584 с.
10. *Милн-Томсон Л.М.* Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 686 с.
11. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИФМЛ, 1962. 1100 с.

Москва
E-mail: gorod@ipmnet.ru

Поступила в редакцию
18.X.2005