

УДК 532.527.2:533.7

© 2006 г. В. А. ТИТАРЕВ, Е. М. ШАХОВ

## КИНЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОДОЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА МЕЖДУ КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

На основе модельного кинетического уравнения изучается движение разреженного газа между соосными круговыми цилиндрами при условии, что внешний цилиндр покоится, а внутренний движется с постоянной скоростью вдоль своей оси симметрии. Задача решается численно как в линейной, так и в нелинейной постановке с помощью неявного консервативного метода второго порядка точности. Исследуется влияние разреженности, отношения радиусов цилиндров и скорости внутреннего цилиндра на параметры течения. Устанавливаются пределы применимости линеаризованного кинетического уравнения.

*Ключевые слова:* течение Куэтта, разреженный газ, коаксиальные цилиндры, кинетическое уравнение, S-модель.

Стационарное одномерное течение между параллельными пластинами, возникающее при их относительном движении с постоянной скоростью (течение Куэтта), является простейшим видом течения вязкого [1] и разреженного газов [2–4]. Осесимметричными аналогами этого течения служат соответствующие течения между соосными цилиндрами. Несмотря на относительную простоту возникающего продольного движения оно до сих пор не привлекало внимание исследователей. Между тем оно безусловно представляет не только теоретический, но и практический интерес (движение длинного снаряда-поезда в тоннеле, движение тора большого радиуса внутри соосного ему тора и т.п.). Соответствующее решение для уравнений Навье – Стокса, т.е. для предела сплошной среды, известно с начала XX в. и вошло в учебники по теории течений вязкой жидкости [1]. Предлагаемая работа выполнена с целью заполнить соответствующий пробел в теории течений разреженного газа. По постановке задачи она близка к [4], где рассматривалось движение разреженного газа между соосными цилиндрами под действием заданного градиента давления (течение Пуазейля).

Свободномолекулярное решение задачи выписывается в явном виде и используется в качестве теста для оценки точности численного алгоритма. Для конечных чисел Кнудсена решение строится с учетом на установление с помощью неявного полностью консервативного конечно-объемного метода второго порядка точности. Данный метод позволяет продвинуться в область малых чисел Кнудсена, а также вести расчет с большим шагом по времени, что улучшает сходимость к стационарному решению по сравнению с явными конечно-разностными методами расщепления кинетического уравнения по процессам.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим стационарное течение одноатомного разреженного газа между двумя бесконечными коаксиальными цилиндрами с радиусами  $r_1$  и  $r_2$ , причем  $r_1 < r_2$ . Внешний цилиндр покоится. Движение газа обусловлено движением внутреннего цилиндра, перемещающегося вдоль оси симметрии с постоянной скоростью  $w_1$ . Поверхности цилиндров поддерживаются при постоянной и одинаковой температуре  $T_w$ , на них происходит полная аккомодация импульса и энергии падающих молекул и диффузное отражение их с равновесными функциями распределения  $f_1, f_2$  при той же температуре  $T_w$  и с плотностями  $n_1, n_2$ .

Введем цилиндрическую систему координат  $(r, \phi, z)$ , где ось  $z$  совпадает с осью цилиндров,  $r$  – расстояние от этой оси,  $\phi$  – азимутальная координата. Осесимметричное состояние разреженного газа, независящее от  $z$ , определяется функцией распределения  $f(r, \xi_r, \xi_\phi, \xi_z)$  молекул по скоростям, где  $\xi_r, \xi_\phi, \xi_z$  – ортогональные компоненты вектора молекулярной скорости в радиальном, азимутальном и осевом направлении соответственно. В пространстве скоростей также введем цилиндрическую систему координат с осью, параллельной оси  $z$ . Пусть  $\zeta$  обозначает составляющую скорости, лежащую в плоскости, перпендикулярной оси цилиндров, а  $\omega$  – угол между этой составляющей и радиальным направлением от оси симметрии. Связь между ортогональными составляющими скорости  $\xi_r, \xi_\phi$  и ее полярными координатами дается формулами

$$\xi_r = \zeta \cos \omega, \quad \xi_\phi = \zeta \sin \omega$$

Движение газа происходит вдоль оси симметрии, радиальная составляющая скорости течения газа равна нулю.

Перейдем к безразмерным величинам, выбрав в качестве масштабов пространственной координаты  $r$ , скорости  $\xi$ , плотности  $n$ , температуры  $T$ , вязкости  $\mu$  и функции распределения  $f$  соответственно

$$r_1, \sqrt{2RT_w}, n_0, T_w, \frac{5}{16}mn_0\sqrt{2\pi RT_w}\lambda_0, n_0(2RT_w)^{-2/3}$$

$$n_0 = \frac{2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} rn(r) dr \quad (1.1)$$

Здесь  $n_0$  – средняя плотность газа между цилиндрами,  $m$  – масса молекулы,  $R$  – газовая постоянная,  $\lambda_0$  – длина свободного пробега в покоящемся газе с плотностью  $n_0$  и температурой  $T_w$ . В безразмерных переменных радиус внутреннего цилиндра равен единице, однако ниже по тексту обозначение  $r_1$  сохранено для удобства изложения. В дальнейшем безразмерные величины обозначаются теми же буквами, что и соответствующие им размерные.

Будем считать, что функция распределения удовлетворяет уравнению Больцмана с  $S$ -модельным оператором столкновений [5, 6], которое в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\zeta \cos \omega \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\zeta \sin \omega}{r} \frac{\partial f}{\partial \omega} = v(f^+ - f), \quad v = \frac{8}{5\sqrt{\pi}} \frac{nT}{\mu \text{Kn}}$$

$$f^+ = f_M \left( 1 + \frac{4}{5} (1 - \text{Pr}) (S_r c_r + S_z c_z) \left( c^2 - \frac{5}{2} \right) \right), \quad f_M = \frac{n}{(\pi T)^{3/2}} \exp(-c^2) \quad (1.2)$$

$$S_i = \frac{2q_i}{nT^{3/2}}, \quad (c_r, c_\phi, c_z) = \frac{1}{\sqrt{T}} (\xi_r, \xi_\phi, \xi_z - u_z), \quad c^2 = c_r^2 + c_\phi^2 + c_z^2$$

Здесь  $\text{Kn} = \lambda_0/r_1$  – число Кнудсена, определяющее степень разреженности газа. Плотность, скорость и температура газа выражаются через функцию распределения  $f$  в виде интегралов по молекулярной скорости

$$n = \int f d\xi, \quad u_z = \frac{1}{n} \int \xi_z f d\xi, \quad \frac{3}{2}nT + nu_z^2 = \int \xi^2 f d\xi, \quad d\xi = \zeta d\zeta d\omega d\xi_z$$

Напряжение сдвига  $P_{rz}$  и компоненты вектора потока тепла  $q_r, q_z$  определяются формулами

$$P_{rz} = \int \xi_r \xi_z f d\xi, \quad q_r = \frac{1}{2} \int \xi_r (\zeta^2 + (\xi_z - u_z)^2) f d\xi$$

$$q_z = \frac{1}{2} \int (\xi_z - u_z) (\zeta^2 + (\xi_z - u_z)^2) f d\xi$$

Сформулируем граничные условия задачи. На поверхности цилиндров примем условия диффузного рассеяния молекул с полной тепловой аккомодацией к температуре поверхности

$$r = r_1, \quad \xi_r > 0: f_1 = \frac{n_1}{\pi} \exp(-\zeta^2 - (\xi_z - w_1)^2) \quad (1.3)$$

$$r = r_2, \quad \xi_r < 0: f_2 = \frac{n_2}{\pi} \exp(-\zeta^2 - \xi_z^2)$$

Плотности отраженных частиц  $n_1, n_2$  определяются из условия непротекания

$$n_1 = -2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^0 \xi_r d\xi_r \int f d\xi_\phi d\xi_z, \quad n_2 = +2\sqrt{\pi} \int_0^{\infty} \xi_r d\xi_r \int f d\xi_\phi d\xi_z$$

Помимо выписанных граничных условий необходимо соблюдать условие постоянства числа частиц, приходящееся на единицу длины цилиндров, которое в безразмерных переменных имеет вид  $n_0 = 1$ , где средняя плотность газа  $n_0$  определена в формуле (1.1).

Одна из наиболее интересных интегральных величин в рассматриваемой задаче – средняя скорость течения газа, вовлекаемого в движение внутренним цилиндром, которая с учетом условия нормировки (1.1) определяется интегралом

$$W = \frac{2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} n u_z r dr \quad (1.4)$$

Соответственно расход газа в единицу времени  $Q = \pi(r_2^2 - r_1^2)W$ . В классическом течении Куэтта между параллельными пластинами  $W = 1/2w_1$  независимо от числа Кнудсена. В рассматриваемом случае средняя скорость течения газа зависит как от степени разреженности, так и от отношения радиусов.

В заключение этого раздела приведем два интегральных соотношения. Путем умножения кинетического уравнения (1.2) на  $\xi_z$  и  $\zeta^2 + \xi_z^2$  и интегрирования по всему пространству скоростей получаем уравнения

$$\frac{dP_{rz}}{dr} + \frac{1}{r}P_{rz} = 0, \quad \frac{dE_r}{dr} + \frac{1}{r}E_r = 0$$

где  $E_r$  – поток энергии в радиальном направлении. Интегрирование дает

$$rP_{rz} = \text{const} = A, \quad rE_r = \text{const} = B \quad (1.5)$$

Постоянные  $A, B$  зависят от степени разреженности газа, отношения радиусов  $r_1$  и  $r_2$  и безразмерной скорости  $w_1$ . Условия (1.5) служат для контроля точности вычислений.

**2. Линеаризованная задача.** При малых значениях скорости движения внутреннего цилиндра ( $w_1 \ll 1$ ) возмущения малы, и задачу можно линеаризовать относительно состояния покоя. При этом основные возмущения относятся к скорости течения газа и трению. Возмущения давления, температуры, плотности и потока тепла имеют второй порядок малости по  $w_1$ , так как обусловлены диссипацией энергии и могут быть отброшены. Таким образом, в линейном приближении плотность и температура остаются заданными постоянными:  $n = 1, T = T_w = 1$ . Отметим максвелловскую функцию, соответствующую покою, индексом "0", а возмущение функции распределения обозначим буквой  $\varphi$ . Тогда для функции распределения, локально-максвелловской функции и граничного условия в линейном приближении можно записать

$$\begin{aligned} f &= f_0(1 + \varphi), \quad f_0 = (\pi)^{-3/2} \exp(-c_0^2), \quad \varphi = \xi_z \psi(r, \zeta, \omega) \\ f^+ &= f_0(1 + 2\xi_z u_z), \quad f_1 = f_0(1 + 2\xi_z w_1), \quad f_2 = f_0, \quad c_0^2 = \zeta^2 + \xi_z^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Выбор функции  $\varphi$  в виде (2.1) определяется структурой уравнения (1.2) и граничных условий (1.3).

Подставляя выражения (2.1) в уравнение (1.2), сохраняя слагаемые порядка  $w_1$  и производя необходимые сокращения, получим следующее уравнение для функции  $\psi$ :

$$\zeta \cos \omega \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\zeta \sin \omega}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \omega} = v(2u_z - \psi) \quad (2.2)$$

Граничные условия для определения  $\psi$  следуют из (1.3)

$$r = r_1, \quad \xi_r > 0: \psi = 2w_1$$

$$r = r_2, \quad \xi_r < 0: \psi = 0$$

Условие нормировки (1.1) в линеаризованной задаче выполняется тождественно. Скорость течения  $u_z$  и напряжение сдвига  $P_{rz}$  выражаются интегралами

$$u_z = \int f_0 \xi_z^2 \psi d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-\zeta^2) \psi \zeta d\zeta d\omega$$

$$P_{rz} = \int f_0 \xi_z^2 \xi_r \psi d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \zeta \cos \omega \exp(-\zeta^2) \psi \zeta d\zeta d\omega$$

В выражении для средней по сечению трубы скорости потока (1.4) следует положить  $n = 1$ .

**3. Предельные решения.** В этом разделе рассматриваются предельные решения кинетического уравнения (1.2) по параметру разреженности  $Kn$ , а также их асимптотические оценки при малом отношении радиусов и при малом зазоре между цилиндрами.

Рассмотрим сначала свободномолекулярное решение  $Kn = \infty$ . В этом случае уравнение (1.2) становится чисто дифференциальным и имеет характеристики

$$r \sin \omega = \text{const} = C_1, \quad f = \text{const} = C_2$$

Общее решение имеет вид

$$f(r, \zeta, \omega, \xi_z) = f(r \sin \omega, \zeta, \xi_z)$$

Здесь  $f$  – произвольная функция своих аргументов. Вид ее определяется граничными условиями. Используя (1.3), получим, что  $f = f_1$  для  $-\omega_0 \leq \omega \leq \omega_0$  и  $f = f_2$  для  $\omega \leq -\omega_0$  или

$\omega \geq \omega_0$ , где  $\omega_0 = \omega_0(r) = \arcsin(r_1/r)$ . Для плотностей отраженных молекул в граничном условии получаем  $n_1 = n_2 = 1$ . Плотность, скорость, температура и напряжения сдвига определяются по формулам

$$n = 1, \quad u_z(r) = \frac{\omega_0}{\pi} w_1, \quad T(r) = 1 + \frac{2\omega_0}{3\pi} \left(1 - \frac{\omega_0}{\pi}\right) w_1^2, \quad A_\infty = r P_{zr}(r) = \frac{1}{2} \frac{w_1}{\sqrt{\pi}}$$

Здесь и ниже индекс  $\infty$  относится к свободномолекулярному течению. Для компонент вектора потока тепла имеем

$$q_r = \left(\frac{r_1}{4\pi r}\right) \left(1 - 2\frac{\omega_0}{\pi}\right) w_1^2, \quad q_z = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \left(2\left(\frac{\omega_0}{\pi}\right)^2 - 3\frac{\omega_0}{\pi} + 1\right) w_1^3$$

Объем газа, вовлекаемый в движение в единицу времени, определен как

$$Q_\infty = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} n u_z r dr = \frac{w_1}{\epsilon^2} \left( \arcsin \epsilon - \frac{\pi}{2} \epsilon^2 + \epsilon \sqrt{1 - \epsilon^2} \right), \quad \epsilon = \frac{r_1}{r_2}$$

Средняя по сечению скорость газа прямо пропорциональна скорости движения внутреннего цилиндра  $w_1$  и довольно сложным образом зависит от отношения радиусов  $\epsilon$

$$W_\infty = \frac{Q_\infty}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} = \left( \frac{2 \arcsin \epsilon - \pi \epsilon^2 + 2\epsilon \sqrt{1 - \epsilon^2}}{2\pi(1 - \epsilon^2)} \right) w_1$$

При малом отношении радиусов имеем

$$Q_\infty \approx \frac{4 - \pi}{2\epsilon} w_1, \quad W_\infty = \frac{2\epsilon}{\pi} w_1 (1 + O(\epsilon)), \quad \epsilon \ll 1$$

В случае малого промежутка между цилиндрами

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 1} Q_\infty = 0, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 1} W_\infty = \frac{1}{2} w_1$$

Обратимся теперь к противоположному предельному случаю ( $\text{Kn} \rightarrow 0$ ), соответствующему сплошной среде. В этом случае для малых значений скорости внутреннего цилиндра  $w_1 \ll 1$  имеется решение уравнений Навье – Стокса для несжимаемой жидкости с условиями прилипания на контактных поверхностях [1]. Это решение соответствует линейному приближению в рассматриваемой задаче и дает распределения скорости газа и напряжения сдвига по радиусу

$$u_z = w_1 \frac{\ln(r_2/r)}{\ln(r_2/r_1)}, \quad A_{NS} = r P_{rz} = \frac{5\sqrt{\pi} \text{Kn}}{16 \ln(r_2/r_1)} w_1 \quad (3.1)$$

Отметим, что

$$\frac{A_{NS}}{A_\infty} = -\frac{5\pi}{8 \ln \epsilon} \text{Kn}$$

Расход газа и средняя скорость, вычисленные по этому, континуумному, распределению (отмечены индексом “NS”), имеют вид

$$W_{NS} = -\frac{2\epsilon^2 \ln \epsilon + (1 - \epsilon^2)}{2(1 - \epsilon^2) \ln \epsilon} w_1, \quad Q_{NS} = \frac{\epsilon^2(1 - 2 \ln \epsilon) - 1}{2\pi \epsilon^2 \ln \epsilon} w_1$$

В случае малого  $\epsilon$  имеем

$$W_{NS} \approx -\frac{1}{2 \ln \epsilon} w_1, \quad Q_{NS} \approx \frac{\pi}{2 \epsilon^2 \ln \epsilon} w_1 \quad (3.2)$$

В противоположном случае малого зазора между цилиндрами  $\epsilon \rightarrow 1$

$$Q_{NS} \approx \pi w_1 (1 + \epsilon)$$

**4. О методе численного решения.** Для промежуточных чисел Кнудсена  $0 < \text{Kn} < \infty$  решение находится численным решением кинетического уравнения. В настоящее время наиболее популярным является метод простых итераций с учетом разрывов функции распределения в разностной схеме [7, 8]. Основной недостаток данного метода – его неконсервативность по оператору столкновений, что приводит к плохой сходимости численного решения при малых числах  $\text{Kn}$ . Здесь используется неявный консервативный метод счета на установление второго порядка точности, основанный на [9–11]. Данный метод позволяет обойти проблему плохой сходимости при малых числах Кнудсена, а также вести расчет с большим шагом по времени.

Следуя [12], понизим размерность задачи, перейдя от функции распределения к ее интегралам  $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3, g_4)^T$  по формуле

$$\mathbf{g} = \int_{-\infty}^{\infty} (1, \xi_z, \xi_z^2, \xi_z^3)^T f d\xi_z$$

Макропараметры газа выражаются через компоненты  $\mathbf{g}$

$$\left( n, nu_z, \frac{3}{2}nT + nu_z^2 \right) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} (g_1, g_2, \zeta^2 g_1 + g_3) \zeta d\zeta d\omega$$

$$q_r = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \xi_r [\zeta g_1 - 2u_z g_2 + g_3] \zeta d\zeta d\omega$$

$$q_z = nu_z^3 + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} (\zeta^2 (g_2 - u_z g_1) + (g_4 - 3u_z g_3)) \zeta d\zeta d\omega$$

Кинетическое уравнение для  $\mathbf{g}(t, r, \zeta, \omega)$  в нестационарной консервативной форме имеет вид [10]

$$\frac{\partial}{\partial t}(r\mathbf{g}) = -\frac{\partial}{\partial r}(r\zeta \cos \omega \mathbf{g}) + \frac{\partial}{\partial \omega}(\zeta \sin \omega \mathbf{g}) + r\mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{v}(\mathbf{G} - \mathbf{g}) \quad (4.1)$$

где компоненты  $\mathbf{G}$  находятся через макропараметры газа по формулам

$$G_1 = G_M \left( 1 + BS_{r,c_r} \left( \frac{\zeta^2}{T} - 2 \right) \right)$$

$$G_2 = \frac{1}{2} \sqrt{T} G_M BS_z \left( \frac{\zeta^2}{T} - 1 \right) + u_z G_1$$

$$G_3 = \frac{1}{2} T G_M \left( 1 + BS_{r,c_r} \left( \frac{\zeta^2}{T} - 1 \right) \right) + 2u_z G_2 - u_z^2 G_1$$

$$G_4 = \frac{3}{4} T^{3/2} B S_z \left( \frac{\zeta^2}{T} \right) G_M + 3u_z G_3 - 3u_z^2 G_2 + u_z^3 G_1$$

$$G_M = \frac{n}{\pi T} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{T}\right), \quad B = \frac{4}{5}(1 - \text{Pr})$$

В переменных  $r, \omega$  вводится конечно-объемная сетка с центрами ячеек  $r_i, \omega_j$  и сгущением к поверхностям цилиндров. По переменной  $\zeta$  используется неравномерная сетка со сгущением к  $\zeta = 0$ . Пусть также  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ ,  $\mathbf{g}_{ijk}^n = \mathbf{g}(t^n, r_i, \omega_j, \zeta_k)$ ,  $\delta_{ijk} = r_i(\mathbf{g}_{ijk}^{n+1} - \mathbf{g}_{ijk}^n)$ . Полностью неявная разностная схема для кинетического уравнения (4.1) записывается как

$$\left( \frac{1}{\Delta t} + \zeta_k \frac{\partial}{\partial r} \cos \omega_j - \left( \frac{\zeta_k}{r_i} \right) \frac{\partial}{\partial \omega} \sin \omega_j + v_{ij} \right) \delta_{ijk} = \mathbf{R}_{ijk}^n \quad (4.2)$$

где величина  $\mathbf{R}_{ijk}$  в правой части схемы (4.2) – аппроксимация правой (стационарной) части кинетического уравнения (4.1)

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ijk}^n = & -\zeta_k \cos \omega_j \frac{r_{i+1/2} \mathbf{g}_{i+1/2, jk}^n - r_{i-1/2} \mathbf{g}_{i-1/2, jk}^n}{\Delta r_i} + \\ & + \zeta_k \frac{\cos \omega_{j+1/2} \mathbf{g}_{ij+1/2, k}^n - \cos \omega_{j-1/2} \mathbf{g}_{ij-1/2, k}^n}{\Delta \omega} + r_i \mathbf{H}_{ijk}^n \end{aligned} \quad (4.3)$$

Значения функции распределения на границах ячеек  $\mathbf{g}_{i+1/2, jk}^n, \mathbf{g}_{ij+1/2, k}^n$  в (4.3) определяются с помощью монотонной кусочно-линейной интерполяции [13, 14]. Макропараметры газа, входящие в  $\mathbf{H}_{ijk}$ , находятся таким образом, чтобы обеспечить консервативность метода по интегралу столкновений. В [15, 10] данное свойство обеспечивается коррекциями функции  $\mathbf{G}$ . В [16, 17] для более простой модели Крука предложено находить плотность, скорость и температуру газа из дискретной аппроксимации законов сохранения. Однако для  $S$ -модели законов сохранения недостаточно, так как остаются неопределенными компоненты вектора потока тепла. В данной работе макропараметры газа ( $n, u_z, T, q_r, q_z$ ) находятся из условий аппроксимации точного интеграла модельным [11, 18], которые записываются в виде (индекс  $i$  опущен для простоты)

$$\sum_{jk} (H_1, H_2, \zeta^2 H_1 + H_3)_{jk} A_k = (0, 0, 0)$$

$$\sum_{jk} \xi_r (w^2 H_1 - 2u_z H_2 + H_3)_{jk} A_k = -\frac{4}{3} q_r \quad (4.4)$$

$$\sum_{jk} (w^2 (H_2 - u_z H_1) + H_4 - 3u_z H_3 + 2u_z^2 H_2 - u_z^3 H_1)_{jk} A_k = -\frac{4}{3} q_z \quad (4.5)$$

где  $A_k = \zeta_k \beta_k \Delta \omega$ ,  $\beta_k$  – веса составной квадратурной формулы Симпсона по переменной  $\zeta$ ,  $w^2 = \zeta^2 + u_z^2$ . Отметим, что в отличие от [11, 18], вычисление интегралов по переменной  $\omega$  проводится с помощью формулы серединных прямоугольников второго порядка точности. Использование системы уравнений (4.4) для нахождения макропараметров обеспечивает выполнение законов сохранения, а также правильную релаксацию вектора потока тепла в  $S$ -модели.

В дифференциальном операторе, стоящем в левой части схемы, производные по  $r$  и  $\omega$  аппроксимируются направленными разностями первого порядка точности в зависимости от знака вектора молекулярной скорости. В результате значения функции распределения на новом временном слое находятся по схеме бегущего счета.

Отметим, что для стационарного решения выполняются дискретные законы сохранения плотности,  $z$ -компоненты импульса и энергии. Данное свойство следует из консервативной формы аппроксимации правой части схемы и применения формулы средних прямоугольников для вычисления интегралов по  $\omega$ . При явной аппроксимации по времени условие (1.1) выполняется тождественно. Однако явная схема не обеспечивает достаточно быстрой сходимости решения к стационарному режиму и здесь не используется. Неявная разностная схема не удовлетворяет условию (1.1) вследствие того, что разностный оператор в левой части схемы зависит от молекулярной скорости. Поэтому на каждом шаге проводится нормировка значений функции распределения [3, 8].

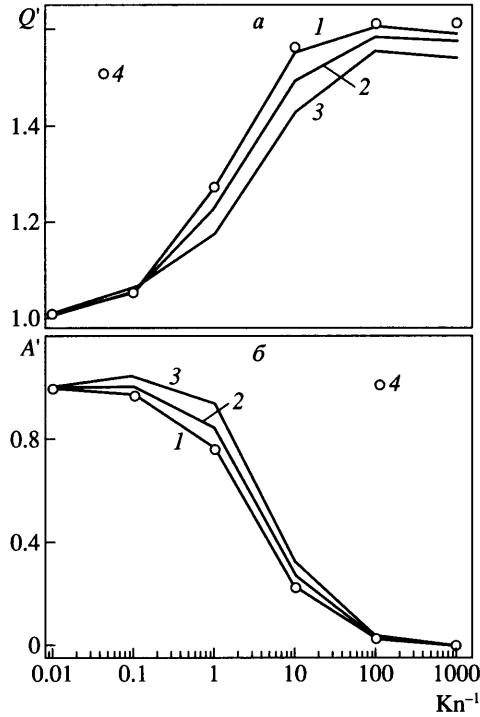
Полученный консервативный на стационарном решении численный метод не имеет ограничений на шаг по времени, связанных условием Куранта или аппроксимацией интеграла столкновений. В частности, возможен счет с  $\max(v\Delta t, K) \gg 1$ , где  $K$  – число Куранта, что позволяет значительно ускорить сходимость к стационарному решению. При  $t \rightarrow \infty$  метод аппроксимирует кинетическое уравнение в стационарной форме. В качестве критерия сходимости к стационарному решению используется величина невязки в дискретных законах сохранения, которые следуют из правой части схемы (4.2) при численном интегрировании по молекулярной скорости.

**5. Результаты.** Все приводимые ниже результаты относятся к случаю  $\mu = \sqrt{T}$ , что соответствует межмолекулярному взаимодействию по закону твердых сфер. Число Прандтля  $P_r$  принималось равным  $2/3$ . Расчеты были выполнены с использованием нелинейного кинетического уравнения (1.2) для отношений радиусов  $\epsilon = 0.1, 0.5, 0.9$ , что соответствует большому, умеренному и малому зазору между цилиндрами соответственно. Для  $w_1 = 0.1, \epsilon = 0.5$  вычисления проводились также с помощью линеаризованного уравнения (2.2).

Анализ результатов начнем с рассмотрения наиболее типичного случая умеренного зазора между цилиндрами  $\epsilon = 0.5$ . На фиг. 1 зависимости нормированного потока массы  $Q' = Q/Q_\infty$  и напряжения сдвига  $A' = A/A_\infty$ , где  $A = rP_{rz}$ , от параметров  $w_1$  и  $Kn$  соответствуют числовым значениям, приведенным в табл. 1. При этом для решения несжимаемых уравнений Навье – Стокса (3.1) имеют место соотношения  $A'_{NS} = A_{NS}/A_\infty \approx 2.83 Kn$ ,  $Q'_{NS} = Q_{NS}/Q_\infty \approx 1.62$ . Видно, что обе рассматриваемые характеристики течения зависят существенным образом не только от  $Kn$ , но и от скорости внутреннего цилиндра. Так, для малых и умеренных значений  $w_1$  расход газа монотонно увеличивается, а напряжение сдвига монотонно падает с уменьшением числа Кнудсена. В целом, с хорошей точностью для данного диапазона изменения скорости внутреннего цилиндра  $w_1 \leq 1$  величина  $A'$  – функция только  $Kn$  и может быть получена простым пересчетом. Отметим хорошее согласие кинетического решения с решением несжимаемых уравнений Навье – Стокса (3.1) для малых значений  $Kn$ , а также решений линеаризованного ( $L$ ) и нелинейного уравнений для  $w_1 = 0.1$ .

С ростом значения  $w_1$  течение приобретает существенно нелинейный характер. В кривой расхода появляется слабовыраженный максимум при  $Kn \approx 0.01$ . Как и в плоском случае [3], начиная с некоторого  $w_1 > 1$  имеет место эффект максимума напряжения: с уменьшением числа Кнудсена значение  $A'$  сначала растет и только затем начинает падать. При этом величина максимума  $A'$  возрастает с увеличением  $w_1$ . Также отметим, что с ростом  $w_1$  отличие кинетического решения от решения уравнений несжимаемой жидкости (3.1) увеличивается.



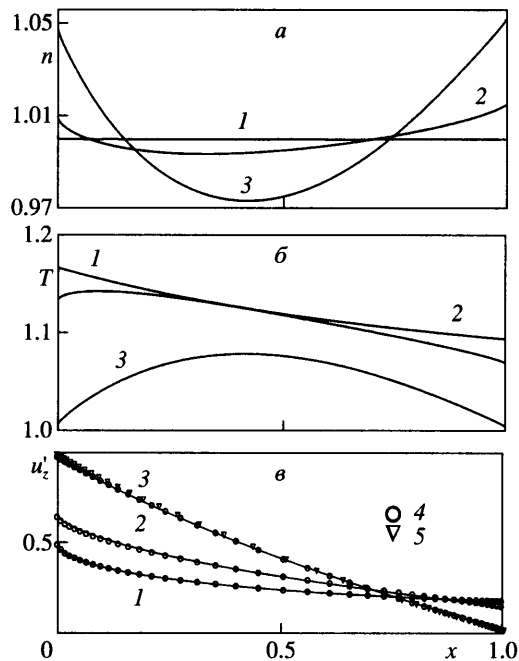


Фиг. 1. Зависимости расхода  $Q'$  и напряжения сдвига  $A'$  от числа Кн: 1–3 –  $w_1 = 1, 3, 5$ ; 4 – линейризованное решение  $w_1 = 0.1$

Влияние параметра разреженности Кн и скорости внутреннего цилиндра  $w_1$  на распределение макропараметров газа  $n$ ,  $u'_z = u_z/w_1$  и  $T$  по приведенной координате  $x = (r - r_1)/(r_2 - r_1)$  иллюстрируют фиг. 2, 3.

Таблица 1

Кн	$w_1(L) = 0.1$	$w_1 = 0.1$	1.0	3.0	5.0
$Q'$					
100	1.009	1.009	1.009	1.010	1.012
10	1.054	1.054	1.054	1.056	1.063
1.0	1.274	1.276	1.270	1.228	1.175
0.1	1.562	1.562	1.551	1.492	1.426
0.01	1.611	1.602	1.604	1.585	1.553
0.001	1.612	1.602	1.591	1.575	1.540
$A'$					
100	0.9967	0.9977	0.9981	1.0027	1.0086
10	0.9704	0.9714	0.9759	1.0068	1.0480
1.0	0.7597	0.7603	0.7721	0.8467	0.9419
0.1	0.2264	0.2266	0.2324	0.2737	0.3340
0.01	0.0277	0.0282	0.0284	0.0338	0.0410
0.001	0.0029	0.0030	0.0031	0.0038	0.0039

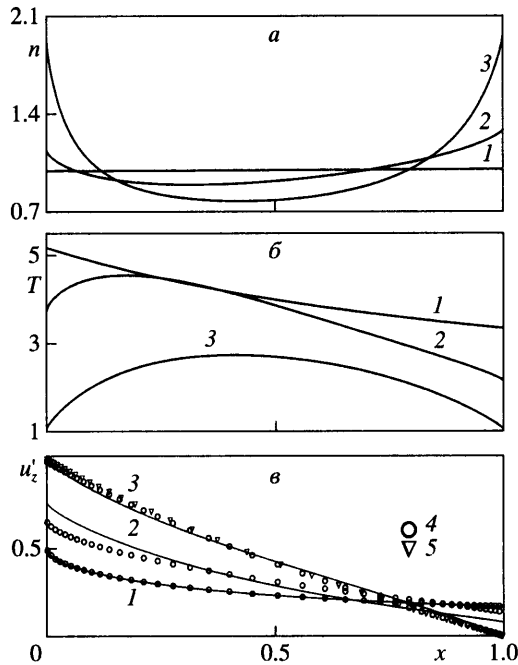


Фиг. 2. Профили макропараметров газа для  $w_1 = 1$ : 1–3 –  $\text{Kn} = \infty, 1, 0.01$ ; 4 – линейризованное решение для  $w_1 = 0.1$ ; 5 – профиль по несжимаемым уравнениям Навье – Стокса

Видно, что для  $w_1 = 1$  (фиг. 2) отклонения температуры и плотности от единичных значений, соответствующих покою, малы. В случае свободномолекулярного течения  $n \equiv 1$ , а профиль температуры  $T$  близок к линейному. Скорость скольжения газа по поверхности обоих цилиндров довольно велика и достигает значения  $w_1/2$ . Включение столкновений меняет картину течения. С уменьшением  $\text{Kn}$  газ начинает прилипать к поверхности цилиндра, и значения скорости скольжения и скачка температуры падают практически до нуля. Профиль температуры напоминает параболу. Отметим также, что для всех чисел Кнудсена профиль скорости, полученный решением нелинейного уравнения для  $w_1 = 1$ , практически совпадает с профилем, соответствующим решению линейризованного уравнения для  $w_1 = 0.1$ , что объясняется малым отклонением плотности и температуры от значений, соответствующих покою. При малых  $\text{Kn}$  профиль скорости, рассчитанный по кинетическому уравнению, близок к решению уравнений Навье – Стокса (3.1).

Для  $w_1 = 5$  (фиг. 3) отклонения температуры  $T$  и плотности  $n$  от единичных значений, соответствующих покою, не являются малыми. Хотя картина течения качественно совпадает с представленной на фиг. 2 для  $w_1 = 1$ , имеются значительные количественные отличия, обусловленные существенной нелинейностью течения. Так, профили плотности и температуры значительно сильнее прижимаются к поверхностям цилиндров, а профиль скорости заметно отклоняется от линейризованного решения, а также уравнений Навье – Стокса (3.1) для всех значений  $\text{Kn}$ .

Перейдем к анализу случая малого зазора между цилиндрами  $\epsilon = 0.9$ . Таблица 2 иллюстрирует зависимости  $Q'$  и  $A'$  от параметров  $w_1$  и  $\text{Kn}$ . При этом для континуального решения имеем  $A'_{NS} \approx 18.6 \text{ Kn}$ ,  $Q'_{NS} \approx 1.201$ . Видно, что в отличие от случая  $\epsilon = 0.5$  в кри-



Фиг. 3. Профили макропараметров газа для  $w_1 = 5$ : 1-5 – то же что на фиг. 2

вой расхода отсутствует максимум по числам Кнудсена, а сами значения  $Q'$  практически не зависят от скорости внутреннего цилиндра. Как и прежде, при  $w_1 > 1$  имеет место эффект максимума напряжения, хотя и в более слабой форме. Отметим, что для  $w_1 \leq 1$  обе интегральные характеристики течения  $A'$ ,  $Q'$  хорошо согласуются с континуальным решением (3.1) при  $Kn \rightarrow 0$ . Однако для  $w_1 = 5$  напряжение сдвига значительно отличается от (3.1).

Для случая  $\epsilon = 0.1$  ввиду больших затрат машинного времени методические расчеты проводились только для  $w_1 = 0.1$  и 1. Таблица 3 иллюстрирует зависимости расхода и напряжения сдвига от числа Кн. При этом  $A'_{NS} \approx 0.853 Kn$ ,  $Q'_{NS} = 3.5$ . Видно, что расход массы и напряжения сдвига с уменьшением Кн приближается к предельным континуальным значениям (3.2). Были также выполнены расчеты для  $w_1 = 5$  и чисел Кнудсена

Таблица 2

Kn	$Q'$			$A'$		
	$w_1 = 0.1$	1.0	5.0	$w_1 = 0.1$	1.0	5.0
100	1.0046	1.0049	1.0058	0.9997	0.9998	1.0013
10	1.0098	1.0121	1.0192	0.9942	0.9952	1.0094
1.0	1.0569	1.0587	1.0799	0.9422	0.9478	1.0219
0.1	1.1574	1.1585	1.1457	0.6294	0.6380	0.7843
0.01	1.1920	1.1956	1.1844	0.1560	0.1594	0.2314
0.001	1.1945	1.1972	1.1949	0.0194	0.0200	0.0244

Таблица 3

Kn	$w_1 = 0.1$	1	$w_1 = 0.1$	1
	$Q'$		$A'$	
100	1.0463	1.0398	0.9928	0.9902
10	1.333	1.3185	0.9207	0.9237
1.0	2.5211	2.4825	0.5013	0.5049
0.1	3.3551	3.3109	0.0812	0.0833
0.01	3.3561	3.3347	0.0103	0.0092

Таблица 4

Kn	$\epsilon = 0.1$	0.5	0.9
100	0.05902	0.2415	0.4035
10	0.06189	0.2522	0.4056
1.0	0.07889	0.3055	0.4245
0.1	0.1491	0.3737	0.4648
0.01	0.1984	0.3834	0.4787
0.001	–	0.3834	0.4797

$1 \leq Kn \leq \infty$ . Оказалось, что эффект максимума напряжения имеет место и при малых отношениях радиусов.

Средняя скорость  $W$  движения слабо зависит от скорости внутреннего цилиндра, поэтому ограничимся рассмотрением случая  $w_1 = 0.1$ . Соответствующие значения приведены в табл. 4 для различных  $\epsilon$  и  $Kn$ . Видно, что величина  $W$  сильно зависит от отношения радиусов цилиндров, а при большом зазоре между цилиндрами и от числа Кнудсена. Для  $\epsilon = 0.9$  с уменьшением  $Kn$  средняя скорость приближается к значению  $1/2w_1$ , соответствующему классическому течению Куэтта между параллельными пластинами, в то время как в противоположном случае  $\epsilon = 0.1$  она далека от  $1/2w_1$ . Отметим также, что для этого отношения радиусов  $W$  при малых  $Kn$  довольно близка к предельному решению уравнений Навье – Стокса (3.2). Так, для  $Kn = 0.01$  имеем  $2W/(w_1 \ln \epsilon) = 0.912$ .

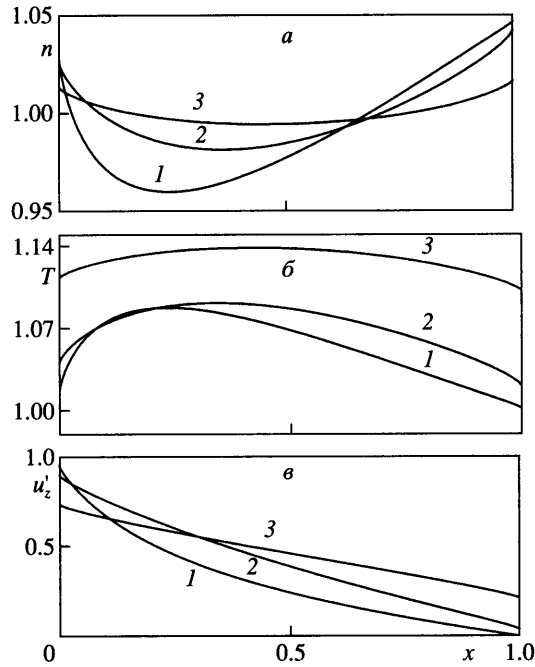
В заключение рассмотрим влияние отношения радиусов цилиндров  $\epsilon$  на распределение макропараметров газа по радиальной координате. Соответствующие кривые для  $w_1 = 1$  и  $Kn = 0.1$  приведены на фиг. 4, 5. Заметим, что для  $\epsilon \approx 1$  более естественно число Кнудсена, введенное по расстоянию между цилиндрами

$$Kn_1 = \frac{\lambda_0}{r_2 - r_1} = \frac{\epsilon Kn}{1 - \epsilon}$$

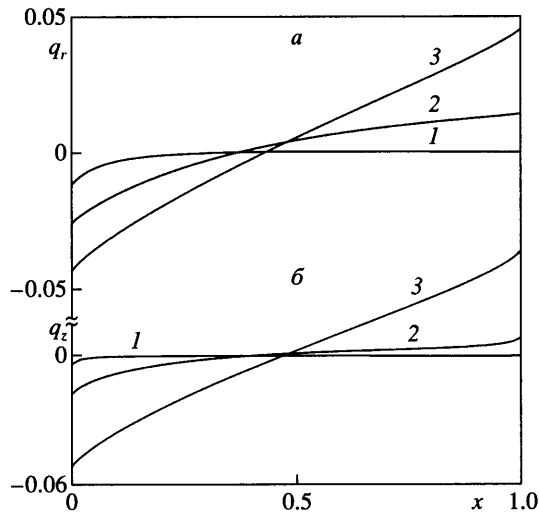
в то время как для  $\epsilon \ll 1$  эффективное число Кнудсена определяется по радиусу внешнего цилиндра

$$Kn_2 = \lambda_0 / r_2 = \epsilon Kn$$

При этом для вариантов, представленных на фиг. 4, имеет место соотношение  $Kn_2 \ll Kn \ll Kn_1$ . Видно, что поведение профилей определяется числом Кнудсена, характерным для данного  $\epsilon$ . Соответственно на фиг. 4 значения скачка температуры и скорости скольжения наименьшие для  $\epsilon = 0.1$ , в то время как для  $\epsilon = 0.9$  они наибольшие.



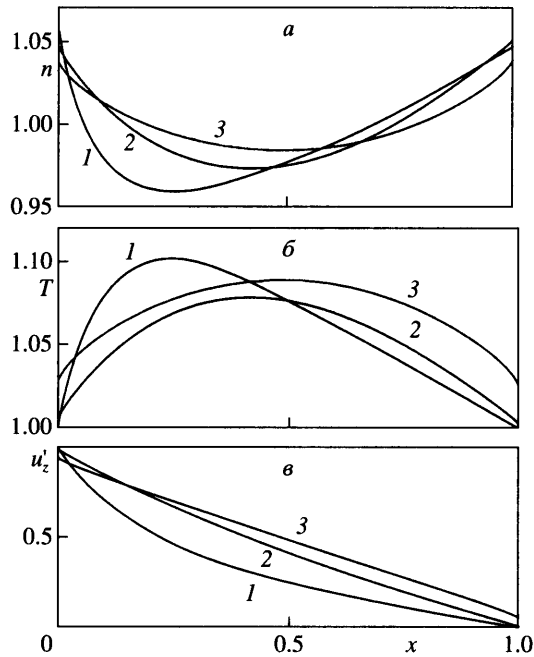
Фиг. 4. Профили плотности  $n$ , скорости  $u'_z$  и температуры  $T$  газа для  $w_1 = 1$  и  $\text{Kn} = 0.1$ :  
 1–3 –  $\epsilon = 0.1; 0.5; 0.9$



Фиг. 5. Профили радиального  $q_r$  и продольного  $q_z$  потоков тепла для  $w_1 = 1$  и  $\text{Kn} = 0.1$ :  
 1–3 – то же, что на фиг. 4

Отмеченные соотношения между макропараметрами газа для разных  $\epsilon$  сохраняются и для меньших чисел Кнудсена (фиг. 6). При этом имеет место тенденция сближения кривых, поскольку  $\text{Kn}_1$  и  $\text{Kn}_2$  пропорциональны  $\text{Kn}$ .

Отметим, что поток тепла в продольном направлении  $q_z$  отличен от нуля и для свободномолекулярного течения пропорционален  $w_1^3$ . Для плоского течения Куэтта дан-



Фиг. 6. Профили плотности  $n$ , скорости  $u'_z$  и температуры  $T$  газа для  $w_1 = 1$  и  $\text{Kn} = 0.01$ : 1–3 – то же что на фиг. 4

ный эффект был подробно изучен в [19], где показано, что продольный поток тепла пропорционален кубу скорости движения пластин для всех чисел  $\text{Kn}$ . При этом в случае равенства температур поверхностей пластин в свободномолекулярном случае данный эффект отсутствует. Однако для цилиндрического течения Куэтта  $q_z$  отличен от нуля и в случае одинаковых температур цилиндров.

**Заключение.** На основе численного решения модельного кинетического уравнения рассчитано сдвиговое течение Куэтта между коаксиальными цилиндрами в широком диапазоне изменения числа Кнудсена, скорости движения внутреннего цилиндра и отношения радиусов цилиндра. Показана существенная зависимость течения от всех трех параметров. Для больших скоростей движения внутреннего цилиндра имеет место эффект максимума напряжения, который заключается в немонотонной зависимости напряжения сдвига от числа Кнудсена. Для умеренного зазора между цилиндрами кривая расхода имеет максимум по числу Кнудсена. Для заданного числа Кнудсена и скорости движения внутреннего цилиндра с уменьшением зазора между цилиндрами расход массы  $Q/Q_\infty$  падает, напряжение сдвига  $A/A_\infty$  увеличивается, а значение средней скорости  $W$  приближается к значению  $1/2w_1$ , соответствующему классическому течению Куэтта между параллельными пластинами.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 04-01-00347).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.Н. Теоретическая гидромеханика, Т. 2. М.: Физматгиз, 1963. 727 с.
2. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 404 с.
3. Шахов Е.М. Задача Куэтта для обобщенного уравнения Крука. Эффект максимума напряжения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 5. С. 16–24.

4. Шахов Е.М. Течение разреженного газа между коаксиальными цилиндрами под действием градиента давления // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 2003. Т. 43. № 7. С. 1107–1116.
5. Шахов Е.М. Об обобщении релаксационного кинетического уравнения Крука // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 5. С. 142–145.
6. Шахов Е.М. Метод исследования движений разреженного газа. М.: Наука, 1974. 204 с.
7. Шахов Е.М. Установившееся течение разреженного газа от сферического источника или стока // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 2. С. 58–66.
8. Sone Y., Sugimoto H., Aoki K. Cylindrical Couette flows of a rarefied gas with evaporation and condensation: reversal and bifurcation of flows // Phys. Fluids. 1999. V. 11. № 2. P. 476–490.
9. Yang J.Y., Huang J.C. Rarefied flow computations using nonlinear model Boltzmann equations // J. Comput. Phys. 1995. V. 120. № 2. P. 323–339.
10. Ларина И.Н., Рыков В.А. Численный метод расчета осесимметричных течений разреженного газа // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 38. № 8. С. 1391–1403.
11. Титарев В.А., Шахов Е.М. Численное исследование нестационарного испарения и теплоотдачи с поверхности сферы // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 1. С. 181–192.
12. Chu C.K. Kinetic-theoretic description of the formation of a shock wave // Phys. Fluids. 1965. V. 8. № 1. P. 12–22.
13. Колган В.П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных течений газовой динамики // Учен. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 68–77.
14. Колган В.П. Конечно-разностная схема для расчета двухмерных разрывных течений нестационарной газовой динамики // Учен. зап. ЦАГИ. 1975. Т. 6. № 1. С. 9–14.
15. Градобоев М.И., Рыков В.А. Консервативный метод численного решения кинетического уравнения при малых числах Кнудсена // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т. 34. № 2. С. 246–266.
16. Mieussens L. Discrete-velocity models and numerical schemes for the Boltzmann-BGK equation in plane and axisymmetric geometries // J. Comput. Phys. 2000. V. 162. № 2. P. 429–466.
17. Gusarov A.V., Smurov I. Gas-dynamic boundary conditions of the Knudsen layer // Phys. Fluids. 2002. V. 14. № 12. P. 4242–4255.
18. Титарев В.А., Шахов Е.М. Численное исследование сильного нестационарного испарения с поверхности сферы // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44. № 7. С. 1314–1328.
19. Бишаев А.М., Рыков В.А. О продольном потоке тепла в течении Куэтта // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 3. С. 162–166.

Москва

Поступила в редакцию  
18.И.2005