

УДК 532.517+539

© 2006 г. Н. А. КУДРЯШОВ, И. Л. ЧЕРНЯВСКИЙ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ ПРИ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ВЯЗКОЭЛАСТИЧНОЙ ТРУБКЕ

Получена система нелинейных уравнений для описания возмущений давления и радиуса при течении жидкости в вязкоэластичной трубке. Найдено дифференциальное соотношение, связывающее давление и радиус вязко-эластичной трубки при течении в ней жидкости. Получены нелинейные эволюционные уравнения для описания возмущений давления и радиуса при течении жидкости. Показано, что для описания импульсов давления при различных масштабах могут быть использованы уравнение Бюргерса, уравнение Кортевега – де Вриза и нелинейное эволюционное уравнение четвертого порядка. Обсуждаются точные решения полученных уравнений. Сравняются численные решения, описываемые уравнением Бюргерса и нелинейным эволюционным уравнением четвертого порядка.

Ключевые слова: нелинейные волны, эволюционные уравнения, уравнение Бюргерса, уравнение Кортевега – де Вриза, вязкоэластичность, вариационный подход.

Нелинейные волновые процессы при течении жидкости в вязко-эластичной трубке моделируют процессы в сердечно-сосудистой системе. Сосуды кровеносной системы (артерии, артериолы) выполняют проводящую и демпфирующую функции [1–4]. Проводящая функция отвечает за транспорт крови, обогащенной кислородом, к различным органам и тканям, а демпфирующая функция приводит к сглаживанию импульсов давления, так что на некотором удалении от аорты течение крови становится почти стационарным. Заболевания сердечно-сосудистой системы приводят к нарушению как первой, так и второй функции. Так, атеросклероз есть нарушение проводимости вследствие отложений холестерина, сужения просвета вплоть до окклюзии (полного перекрытия) сосуда, что приводит к ишемическим заболеваниям тканей. Атеросклеротический процесс поражает в первую очередь крупные артерии. Нарушением демпфирующей функции является артериосклероз, когда импульсы давления плохо сглаживаются из-за структурных изменений стенок сосудов, что приводит к повышению кровяного давления (гипертонии) и дополнительным разрушениям сосудов. Поэтому представляет интерес построение и анализ модели, учитывающей специфические свойства стенки сосуда.

Большинство подходов к изучению потока крови в сосудах использовали линейные модели [5]. Однако необходимость учета нелинейных эффектов отмечалась уже в работах [6–9]. Для описания взаимодействия стенки с потоком жидкости в ряде работ получены линейные [10, 11] и нелинейные [12, 13] уравнения связи давления с радиусом. Анализ одномерных замкнутых систем в длинноволновом приближении приводит к набору редуцированных уравнений. Среди них имеются уравнения Бюргерса [12], Кортевега – де Вриза [12, 14, 15] и Кортевега – де Вриза – Бюргерса [12]. Целый ряд работ посвящен численному решению задачи течения жидкости в вязкоупругих и упругих трубках с использованием метода конечных разностей и конечных элементов, например, [13, 16]. При этом высшие производные, отвечающие вязко-эластичным эффектам, не учитываются ввиду сложности численного моделирования [11]. Вместе с тем вязкоэластичность стенки – важный фактор для демпфирования высокочастотных колебаний в потоке крови [6].

Цель данной работы – учесть нелинейную упругость и вязкоэластичность стенки и расширить семейство эволюционных уравнений для описания нелинейных волновых процессов. При выводе уравнения связи давления с радиусом используется вариационный метод. Применение техники многих масштабов позволяет разделить и классифицировать влияние механических свойств системы на эволюцию волн возмущений. Данный подход может быть использован для получения и ряда других эволюционных уравнений, отвечающих иным механическим свойствам модели.

1. Уравнение, связывающее давление с радиусом вязко-эластичной трубки при течении жидкости. Рассмотрим течение жидкости, которую считаем несжимаемой, в аксиально-симметричной вязко-эластичной трубке, принимая во внимание следующие предположения: 1) плотность стенки трубки постоянна; 2) деформация трубки характеризуется изменением ее радиуса, который зависит от координаты и времени; 3) деформации стенки трубки и ее толщина предполагаются малыми по сравнению с радиусом, а характерные длины волновых процессов много больше равновесного радиуса; 4) давление жидкости в потоке считается одинаковым по всему сечению трубки и зависит от координаты и времени.

Для вывода уравнения движения стенки трубки воспользуемся принципом наименьшего действия, согласно которому истинное движение реализуется на экстремальных действия

$$J[R(x, t)] = \int_{t_0}^{t_1} L dt \rightarrow \min_{R(x, t)} \quad (1.1)$$

Лагранжиан L , характеризующий состояние системы, представим как разность кинетической и потенциальной энергии

$$L = T - U, \quad U = U_{el} - A \quad (1.2)$$

где A – работа диссипативных сил и сил давления при расширении трубки, U_{el} – упругая потенциальная энергия трубки.

Рассмотрим участок трубки в цилиндрической системе координат $(r, x \equiv z)$. Кинетическую энергию элемента трубки длины l , где l отвечает характерным длинам волн при течении жидкости, представим в виде

$$T = \int_0^l \pi \rho_w h R R_t dx$$

где ρ_w – объемная плотность стенки трубки, h – ее толщина, $R = R(x, t)$ – радиус стенки трубки. В силу несжимаемости стенки трубки и сохранения ее массы вытекает условие: $hR = \text{const} = h_0 R_0$, где h_0 и R_0 – толщина невозмущенной стенки и равновесный радиус трубки. Тогда кинетическая энергия принимает вид

$$T = \int_0^l \pi \rho_w h_0 R_0 R_t dx \quad (1.3)$$

Упругая потенциальная энергия элемента трубки длины l состоит из двух частей. Первая часть характеризует упругую энергию стенки как системы независимых нелинейно упругих колец

$$U_1 = \int_0^l \left[\pi \kappa h (R - R_0)^2 + \frac{2\pi \kappa_1 h}{3} (R - R_0)^3 \right] dx$$

$$\kappa = \frac{E}{R_0(1 - \sigma^2)}$$

Здесь k – коэффициент линейной упругости, характеризующий растяжение элемента трубки, E – модуль продольной упругости Юнга, σ – коэффициент Пуассона, κ_1 – коэффициент нелинейной упругости (квадратичная добавка к закону Гука).

Вторая часть характеризуется упругой энергией продольных волокон стенки, пропорциональной приращению площади элемента стенки длины l за счет изгиба вдоль оси x

$$U_2 = \int_0^l 2\pi k h R \sqrt{1 + R_x^2} dx - \int_0^l 2\pi k h R dx \quad (1.4)$$

Коэффициент k характеризует продольные напряжения стенки. Согласно [11] он равен σ_{xx} , где σ_{xx} – нормальная аксиальная компонента тензора напряжений для стенки. Для кровеносных сосудов это соответствует величине их постоянного напряжения вдоль оси.

При малых деформациях из (1.4) получаем

$$U_2 = \int_0^l \pi k h R R_x^2 dx$$

Общая упругая потенциальная энергия участка трубки длины l определяется выражением

$$U_{el} = \int_0^l \left(\pi k h (R - R_0)^2 + \frac{2}{3} \pi \kappa_1 h (R - R_0)^3 + \pi k h R R_x^2 \right) dx \quad (1.5)$$

Пусть давление P_e на внешнюю поверхность трубки постоянно, давление жидкости примем постоянным по сечению сосуда $P(x, t)$. По аналогии с вязкостью в жидкости будем учитывать вязкие силы стенок сосуда. Элементарная работа этих вязких сил [17], сил сопротивления при движении стенки, сил давления жидкости, а также внешних сил давления может быть учтена с помощью формулы

$$\delta A = \int_0^l 2\pi R \left(hf - \mu \frac{\partial R}{\partial t} \right) \sqrt{1 + R_x^2} dx \delta R + \int_0^l 2\pi R (P - P_e) dx \delta R \quad (1.6)$$

$$f = \chi \frac{\partial^3 R}{\partial x^2 \partial t}$$

где сила f определяется через радиальную компоненту тензора напряжений вязких сил [17].

Упрощая (1.6), имеем

$$\delta A = \int_0^l 2\pi R \left[\chi h \frac{\partial^3 R}{\partial x^2 \partial t} - \mu \frac{\partial R}{\partial t} + P - P_e \right] dx \delta R \quad (1.7)$$

Здесь χ – коэффициент вязкости материала трубки, введенный по аналогии с динамической вязкостью жидкости, μ – коэффициент пропорциональности силы сопротивления среды при движении стенки трубки.

Принимая во внимание выражения (1.2), (1.3) и (1.5), имеем лагранжиан в виде

$$L = \int_0^l \left(\pi \rho_w h_0 R_0 R_t^2 - \pi k h (R - R_0)^2 - \frac{2}{3} \pi \kappa_1 h (R - R_0)^3 - \pi k h R R_x^2 \right) dx + A$$

где A задается выражением (1.7).

Минимизируя функционал (1.1) на классе гладких функций $R(x, t)$, рассматриваемых на временном интервале $[t_0, t_1]$, в соответствии с принципом наименьшего действия получаем уравнение Эйлера и условия трансверсальности в виде

$$P(P - P_e + \chi h R_{txx} - \mu R_t) = \rho_w h_0 R_0 R_{tt} - kh R R_{xx} - \frac{kh}{2} R_x^2 + \kappa h (R - R_0) + \kappa_1 h (R - R_0)^2 \quad (1.8)$$

$$\left. \frac{\partial R(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial R(x, t)}{\partial t} \right|_{t=t_1} = 0$$

Принимая во внимание малые возмущения радиуса стенки $\eta(x, t)$

$$R(x, t) = R_0 + \eta(x, t), \quad h = h_0 \frac{R_0}{R}, \quad R_0 = \text{const}, \quad h_0 = \text{const}$$

и пренебрегая членом $kh_0 \eta_x^2 / 2R_0$ и членами более высокого порядка малости, из уравнения (8) в приближении длинноволновых возмущений получаем

$$P - P_e = \rho_w h_0 \eta_{tt} - kh_0 \eta_{xx} - \chi h_0 \eta_{txx} + \mu \eta_t + \frac{\kappa h_0}{R_0} \eta + \frac{\kappa_2 h_0}{R_0^2} \eta^2 \quad (1.9)$$

$$\kappa_2 \equiv \kappa_1 R_0 - 2\kappa$$

Уравнение (1.9) является, по существу, уравнением состояния при движении жидкости в трубке. В простейшем стационарном случае давление жидкости в трубке зависит линейно от ее радиуса.

2. Уравнение течения жидкости в вязко-эластичной трубке. Для описания течения жидкости в вязко-упругой, аксиально-симметричной трубке переменного сечения воспользуемся уравнением непрерывности и аксиальной компонентой двумерного уравнения Навье – Стокса

$$\frac{\partial(vr)}{\partial r} + \frac{\partial(ur)}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \nu_0 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right]$$

где v – радиальная, u – аксиальная компоненты скорости течения; ν_0 – коэффициент кинематической вязкости, ρ – плотность жидкости.

Предположим, что профиль аксиальной компоненты скорости по радиусу имеет вид

$$u(r, x, t) = \frac{s+2}{s} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^s \right] u_a(x, t), \quad u_a(x, t) = \frac{2}{R^2} \int_0^{R(x,t)} u(r, x, t) r dr$$

Здесь s – показатель крутизны профиля. Усредняя уравнения сохранения массы и импульса жидкости (2.1) по поперечному сечению трубки аналогично [18], приходим к одномерным уравнениям

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(Su_a)}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} + u_a \frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = v_0 \frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} - 2v_0(s+2) \frac{u_a}{R^2} \quad (2.3)$$

Здесь $u_a = u_a(x, t)$ – средняя по сечению осевая компонента скорости, $S = S(x, t)$ – площадь поперечного сечения трубки. Далее индекс у u_a опускаем.

Поскольку $S(x, t) = \pi R(x, t)^2$, то уравнение (2.2) преобразуется к виду

$$R_t + uR_x + \frac{1}{2}Ru_x = 0$$

Учитывая малые изменения радиуса трубки $R = R_0 + \eta$, получаем уравнение

$$\eta_t + \frac{1}{2}R_0u_x + \frac{1}{2}\eta u_x + u\eta_x = 0 \quad (2.4)$$

В данной работе ограничимся анализом нелинейных волн в длинноволновом приближении и при больших числах Рейнольдса. В кровеносных сосудах такое приближение справедливо для крупных и средних артерий [6, 11].

Таким образом, для описания одномерного течения жидкости в аксиально-симметричной вязко-эластичной трубке при больших числах Рейнольдса имеем систему уравнений в виде

$$\eta_t + \frac{1}{2}R_0u_x + \frac{1}{2}\eta u_x + u\eta_x = 0$$

$$u_t + uu_x + \frac{1}{\rho}P_x = 0 \quad (2.5)$$

$$P = \rho_w h_0 \eta_{tt} - kh_0 \eta_{xx} - \chi h_0 \eta_{txx} + \mu \eta_t + \frac{\kappa h_0}{R_0} \eta + \frac{\kappa_2 h_0}{R_0^2} \eta^2 + P_e$$

Предполагая, что давление в потоке пропорционально возмущению радиуса, и опуская нелинейные слагаемые в системе уравнений для невязкой жидкости, получаем простейшую линеаризованную систему для описания течения жидкости в эластичной трубке

$$\eta_t + \frac{R_0}{2}u_x = 0, \quad u_t + \frac{1}{\rho}P_x = 0, \quad P = \frac{\kappa h_0}{R_0} \eta + P_e \quad (2.6)$$

Система (2.6) может быть записана в виде

$$\eta_t + \frac{R_0}{2}u_x = 0, \quad u_t + \frac{\kappa h_0}{\rho R_0} \eta_x = 0$$

Дифференцируя первое уравнение по x , а второе по t , получаем линейное волновое уравнение для возмущений скорости

$$u_{tt} = \frac{\kappa h_0}{2\rho} u_{xx}$$

Аналогичное уравнение справедливо для возмущения радиуса и давления.

Скорость распространения импульса давления при течении жидкости в эластичной трубке, полученная Моенсом и Кортвегом, имеет вид

$$c_0 = \sqrt{\frac{\kappa h_0}{2\rho}} = \sqrt{\frac{Eh_0}{2\rho R_0(1-\sigma^2)}} \quad (2.7)$$

Введем безразмерные переменные

$$t = \frac{l}{c_0} t', \quad x = l x', \quad u = c_0 u', \quad \eta = \frac{R_0}{2} \eta', \quad (2.8)$$

$$P = P_0 P', \quad P_0 = P_e$$

Система уравнений течения жидкости (2.5) в безразмерных переменных имеет вид (штрихи опущены):

$$\eta_t + u_x + \frac{1}{2} \eta u_x + u \eta_x = 0$$

$$u_t + u u_x + \frac{1}{\alpha} P_x = 0 \quad (2.9)$$

$$P = \gamma \eta_{tt} - \beta \eta_{xx} + \lambda \eta_t - \delta \eta_{txx} + \alpha \eta + \alpha_1 \eta^2 + 1$$

$$\alpha = \frac{\rho c_0^2}{P_0}, \quad \beta = \frac{k h_0 R_0}{2 P_0 l^2}, \quad \gamma = \frac{\rho_w h_0 R_0 c_0^2}{2 P_0 l^2} \quad (2.10)$$

$$\delta = \frac{\chi h_0 R_0 c_0}{2 P_0 l^3}, \quad \lambda = \frac{\mu R_0 c_0}{2 P_0 l}, \quad \alpha_1 = \frac{\kappa_1 h_0 R_0}{4 P_0} - \alpha$$

3. Нелинейные эволюционные уравнения для описания возмущений при течении жидкости в вязко-эластичной трубке. Большинство эволюционных нелинейных уравнений могут быть получены, с использованием метода многих масштабов и метода возмущений, которые в настоящее время широко представлены в литературе. По-видимому, первые они использованы в работе [19]. В системе уравнений (2.9) имеются малые параметры

$$\varepsilon \ll 1 \left(\varepsilon_1 = \frac{a_0}{R_0}, \quad \varepsilon_2 = \frac{R_0}{l} \text{ и } \varepsilon_3 = \frac{h_0}{R_0} \right),$$

где a_0 – амплитуда возмущений радиуса. Эти параметры для артерий имеют характерные значения 0.1, 0.4 и 0.2 соответственно [14, 20]. Поскольку характерные скорости волн давления (пульсовых волн) велики по сравнению со скоростями течения жидкости, то для изучения эволюции возмущений в приближении длинных волн малой амплитуды удобно перейти к переменным "медленного" времени, выделив направление распространения волны. В качестве параметра ε выберем наименьший ($\varepsilon \sim 0.1$). Тогда решение системы уравнений ищем, используя переменные

$$\eta = \varepsilon^p \eta', \quad u = \varepsilon^p u', \quad P = 1 + \varepsilon^p P', \quad p \in N \quad (3.1)$$

$$\xi = \varepsilon^m (x - t), \quad \tau = \varepsilon^n t, \quad m, n \in N, \quad n > m$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon^m \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon^n \frac{\partial}{\partial \tau} - \varepsilon^m \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (3.2)$$

Подстановка (3.2) и (3.1) в (2.9) после сокращения на ε^{m+p} выражений в первых двух уравнениях и на ε^p в последнем уравнении приводит к системе уравнений

$$\varepsilon^{n-m} \eta'_\tau - \eta'_\xi + u'_\xi + \varepsilon^p \frac{1}{2} \eta' u'_\xi + \varepsilon^p u' \eta'_\xi = 0$$

$$\varepsilon^{n-m} u'_\tau - u'_\xi + \varepsilon^p u' u'_\xi + \frac{1}{\alpha} P'_\xi = 0 \quad (3.3)$$

$$P' = \varepsilon^{2n} \gamma \eta'_{\tau\tau} - \varepsilon^{n+m} 2\gamma \eta'_{\tau\xi} + \varepsilon^{2m} (\gamma - \beta) \eta'_{\xi\xi} + \varepsilon^n \lambda \eta'_\tau - \\ - \varepsilon^m \lambda \eta'_\xi - \varepsilon^{n+2m} \delta \eta'_{\tau\xi\xi} + \varepsilon^{3m} \delta \eta'_{\xi\xi\xi} + \alpha \eta' + \varepsilon^p \alpha_1 \eta'^2$$

Решение этой системы ищем в виде асимптотического разложения

$$u' = u_1 + \varepsilon^q u_2 + o(\varepsilon^q), \quad \eta' = \eta_1 + \varepsilon^q \eta_2 + o(\varepsilon^q) \quad (3.4) \\ P' = P_1 + \varepsilon^q P_2 + o(\varepsilon^q), \quad q \in N$$

Подставляя (3.4) в (3.3) и приравнивая коэффициенты при ε^0 , имеем соотношения в нулевом приближении

$$-\eta_{1\xi} + u_{1\xi} = 0, \quad -u_{1\xi} + \frac{1}{\alpha} P_{1\xi} = 0, \quad P_1 = \alpha \eta_1$$

Откуда находим

$$u_1(\xi, \tau) = \eta_1(\xi, \tau) + \psi(\tau), \quad P_1(\xi, \tau) = \alpha \eta_1(\xi, \tau) \quad (3.5)$$

где $\psi(\tau)$ – произвольная функция, которая определяется из краевых условий для u_1 и η_1 .

При выводе эволюционных уравнений, содержащих производную по τ и нелинейный член $u u_\xi$, с учетом первого приближения ($\sim \varepsilon^q$) следует полагать $n - m = p = q$.

В этом случае слагаемые большего порядка малости, чем $n - m$ ($n > m$) не учитываем, и система (3.3) после исключения P' принимает вид

$$\varepsilon^{n-m} \eta'_\tau - \eta'_\xi + u'_\xi + \varepsilon^p \frac{1}{2} \eta' u'_\xi + \varepsilon^p u' \eta'_\xi = 0$$

$$\varepsilon^{n-m} u'_\tau - u'_\xi + \varepsilon^p u' u'_\xi + \varepsilon^{2m} \frac{\gamma - \beta}{\alpha} \eta'_{\xi\xi\xi} + \eta'_\xi + \varepsilon^{3m} \frac{\delta}{\alpha} \eta'_{\xi\xi\xi\xi} + \varepsilon^p \frac{2\alpha_1}{\alpha} \eta' \eta'_\xi = \varepsilon^m \frac{\lambda}{\alpha} \eta'_{\xi\xi}$$

Откуда получаем уравнение

$$\varepsilon^{n-m} (\eta'_\tau + u'_\tau) + \varepsilon^p \left(u' u'_\xi + \frac{1}{2} \eta' u'_\xi + u' \eta'_\xi + \frac{2\alpha_1}{\alpha} \eta' \eta'_\xi \right) + \varepsilon^{2m} \left(\frac{\gamma - \beta}{\alpha} \eta'_{\xi\xi\xi} \right) + \\ + \varepsilon^{3m} \left(\frac{\delta}{\alpha} \eta'_{\xi\xi\xi\xi} \right) = \varepsilon^m \left(\frac{\lambda}{\alpha} \eta'_{\xi\xi} \right) \quad (3.6)$$

Полагая $m = 1$ и учитывая соотношение $n - m = p = q$, рассмотрим три случая для значений p, q и n : 1) $p = q = 1, n = 2$; 2) $p = q = 2, n = 3$; 3) $p = q = 3, n = 4$.

Увеличение параметра n соответствует тому, что с течением времени определяющую роль в математической модели играют члены с производными более высоких порядков.

Найдем эволюционные уравнения для описания возмущений при течении жидкости в вязко-эластичной трубке.

Рассмотрим первый случай ($m = p = q = 1, n = 2$). Подставляя (3.4) в (3.6) и приравнивая коэффициенты при ε^1 , имеем уравнение

$$\eta_{1\tau} + u_{1\tau} + u_1 u_{1\xi} + \frac{1}{2} \eta_1 u_{1\xi} + u_1 \eta_{1\xi} + \frac{2\alpha_1}{\alpha} \eta_1 \eta_{1\xi} = \frac{\lambda}{\alpha} \eta_{1\xi\xi}$$

откуда с учетом соотношений (3.5) приходим к эволюционному уравнению

$$\eta_{1\tau} = \left[\left(\frac{5}{4} + \frac{\alpha_1}{\alpha} \right) \eta_1 + \psi(\tau) \right] \eta_{1\xi} = \frac{\lambda}{2\alpha} \eta_{1\xi\xi} - \frac{\psi'(\tau)}{2} \quad (3.7)$$

Здесь $\psi(\tau)$ дает добавку в скорость распространения волны и при $\psi(\tau) \neq \text{const}$ соответствует источнику. Функцию $\psi(\tau)$ можно определить из соотношений (3.5).

Пусть $\psi(\tau) = \eta_1|_{\xi=\xi_0} - u_1|_{\xi=\xi_0} = 0$, тогда уравнение (3.7) перейдет в уравнение Бюргера

$$\eta_{1\tau} + \left(\frac{5}{4} + \frac{\alpha_1}{\alpha} \right) \eta_1 \eta_{1\xi} = \frac{\lambda}{2\alpha} \eta_{1\xi\xi} \quad (3.8)$$

Безразмерные коэффициенты уравнения (3.8) выражаются через физические параметры модели, если использовать (2.7) и (2.10). Коэффициент при нелинейном члене определяется формулой

$$\frac{5}{4} + \frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{1}{4} + \frac{R_0 \kappa_1}{2 \kappa}$$

Отсюда следует, что крутизну фронта нелинейной волны определяет отношение нелинейной и линейной упругости. Если стенка линейно упругая, т.е. $\kappa_1 = 0$, то $\alpha_1 = -\alpha$ и уравнение (3.8) принимает вид

$$\eta_{1\tau} + \frac{1}{4} \eta_1 \eta_{1\xi} = \frac{\lambda}{2\alpha} \eta_{1\xi\xi}$$

Коэффициент при второй производной в уравнении (3.8) имеет вид

$$\frac{\lambda}{2\alpha} = \frac{R_0}{4\rho l c_0} \mu$$

Таким образом, затухание волны пропорционально коэффициенту сопротивления среды.

В случае $\psi(\tau) = \text{const} = \psi_0$ уравнение (3.7) приводится к (3.8) невырожденной заменой

$$\theta = \xi - \psi_0 \tau, \quad \tau' = \tau$$

Учитывая (3.1), (3.2), (3.4) и (3.5), решение исходной системы уравнений (2.9) выражается формулами

$$\eta(x, t) = \varepsilon \eta'(\xi, \tau) \approx \varepsilon \eta_1(\xi, \tau); \quad u(x, t) = \varepsilon u'(\xi, \tau) \approx \varepsilon u_1(\xi, \tau) \approx \varepsilon \eta_1(\xi, \tau)$$

$$P(x, t) = \varepsilon P'(\xi, \tau) \approx \varepsilon P_1(\xi, \tau) = \varepsilon \alpha \eta_1(\xi, \tau), \quad \xi = \varepsilon(x - t), \quad \tau = \varepsilon^2 t$$

Рассмотрим второй случай ($m = 1, p = q = 2, n = 3$). Подставляя (3.4) в (3.6) и приравнявая коэффициенты при ε^2 получаем уравнение

$$\eta_{1\tau} + u_{1\tau} + u_1 u_{1\xi} + \frac{1}{2} \eta_1 u_{1\xi} + u_1 \eta_{1\xi} + \frac{2\alpha_1}{\alpha} \eta_1 \eta_{1\xi} + \frac{\gamma - \beta}{\alpha} \eta_{1\xi\xi\xi} = 0 \quad (3.9)$$

Учитывая (3.5), из (3.9) приходим к эволюционному уравнению

$$\eta_{1\tau} + \left[\left(\frac{5}{4} + \frac{\alpha_1}{\alpha} \right) \eta_1 + \psi(\tau) \right] \eta_{1\xi} + \frac{\gamma - \beta}{2\alpha} \eta_{1\xi\xi\xi} = -\frac{\psi'(\tau)}{2} \quad (3.10)$$

Полагая $\psi \equiv 0$, получаем уравнение Кортевега – де Вриза:

$$\eta_{1\tau} + \left(\frac{5}{4} + \frac{\alpha_1}{\alpha}\right)\eta_1\eta_{1\xi} + \frac{\gamma - \beta}{2\alpha}\eta_{1\xi\xi\xi} = 0 \quad (3.11)$$

Используя (2.7) и (2.10), коэффициент при дисперсионном члене можно представить в виде

$$\frac{\gamma - \beta}{2\alpha} = \frac{1}{4} \left(\frac{R_0}{l}\right)^2 \left[\frac{h_0 \rho_w}{R_0 \rho} - 2(1 - \sigma^2) \frac{\sigma_{xx}}{E} \right]$$

Таким образом, значение коэффициента дисперсии определяется отношением плотностей стенки и жидкости и отношением продольного напряжения стенки к ее модулю упругости.

Приближенное решение системы (2.9) определяется через решения уравнения Кортевега – де Вриза с помощью соотношений

$$\eta(x, t) = \varepsilon^2 \eta'(\xi, \tau) \approx \varepsilon^2 \eta_1(\xi, \tau), \quad u(x, t) = \varepsilon^2 u'(\xi, \tau) \approx \varepsilon^2 u_1(\xi, \tau) \approx \varepsilon^2 \eta_1(\xi, \tau)$$

$$P(x, t) = \varepsilon^2 P'(\xi, \tau) \approx \varepsilon^2 P_1(\xi, \tau) = \varepsilon^2 \alpha \eta_1(\xi, \tau)$$

$$\xi = \varepsilon(x - t), \quad \tau = \varepsilon^3 t$$

Рассмотрим третий случай ($m = 1, p = q = 3, n = 4$). Подставляя (3.4) в (3.6) и приравняв коэффициенты при ε^3 , находим уравнение:

$$\eta_{1\tau} + u_{1\tau} + u_1 u_{1\xi} + \frac{1}{2} \eta_1 u_{1\xi} + u_1 \eta_{1\xi} + \frac{2\alpha_1}{\alpha} \eta_1 \eta_{1\xi} + \frac{\delta}{\alpha} \eta_{1\xi\xi\xi\xi} = 0 \quad (3.12)$$

Учитывая (3.5), из (3.12) приходим к эволюционному уравнению:

$$\eta_{1\tau} + \left[\left(\frac{5}{4} + \frac{\alpha_1}{\alpha}\right) \eta_1 + \psi(\tau) \right] \eta_{1\xi} + \frac{\delta}{2\alpha} \eta_{1\xi\xi\xi\xi} = -\frac{\psi'(\tau)}{2} \quad (3.13)$$

Предполагая, что $\psi \equiv 0$, получаем нелинейное эволюционное уравнение четвертого порядка

$$\eta_{1\tau} + \left(\frac{5}{4} + \frac{\alpha_1}{\alpha}\right) \eta_1 \eta_{1\xi} + \frac{\delta}{2\alpha} \eta_{1\xi\xi\xi\xi} = 0 \quad (3.14)$$

Используя (2.7) и (2.10), получим, что коэффициент при четвертой производной имеет вид

$$\frac{\delta}{2\alpha} = \frac{h_0 R_0}{4\rho l^3 c_0} \chi$$

Таким образом, затухание амплитуды волны, описываемой уравнением (3.14), пропорционально коэффициенту вязкости материала трубки.

Приближенное решение исходной системы уравнений (2.9) выражается формулами

$$\eta(x, t) = \varepsilon^3 \eta'(\xi, \tau) \approx \varepsilon^3 \eta_1(\xi, \tau)$$

$$u(x, t) = \varepsilon^3 u'(\xi, \tau) \approx \varepsilon^3 u_1(\xi, \tau) \approx \varepsilon^3 \eta_1(\xi, \tau)$$

$$P(x, t) = \varepsilon^3 P'(\xi, \tau) \approx \varepsilon^3 P_1(\xi, \tau) = \varepsilon^3 \alpha \eta_1(\xi, \tau)$$

$$\xi = \varepsilon(x - t), \quad \tau = \varepsilon^4 t$$

Если принять характерное время, для которого волновой процесс описывается уравнением Бюргерса, за единицу, то, поскольку $\epsilon \sim 0.1$, для процесса, описываемого уравнением Кортевега – де Вриза, характерное время будет порядка 10 безразмерных единиц, а для процесса, описываемого нелинейным эволюционным уравнением (3.14), характерное время будет порядка 100 безразмерных единиц.

4. Точные решения нелинейных волновых уравнений. Получено, что скорость жидкости, нормированная на величину $5/4 + \alpha_1/\alpha$, при ее течении в вязко-эластичной трубке в различные моменты времени подчиняется следующим эволюционным уравнениям

$$u_t + uu_x = \frac{\lambda}{2\alpha} u_{xx} \quad (4.1)$$

$$u_t + uu_x + \frac{\gamma - \beta}{2\alpha} u_{xxx} = 0 \quad (4.2)$$

$$u_t + uu_x + \frac{\delta}{2\alpha} u_{xxxx} = 0 \quad (4.3)$$

Аналогичным уравнениям подчиняются возмущения давления и радиуса трубки.

В настоящее время уравнение Бюргерса (4.1) и уравнение Кортевега – де Вриза (4.2) хорошо изучены. Преобразованием Коула – Хопфа [21, 22] уравнение (4.1) приводится к линейному уравнению теплопроводности

$$u = -\frac{\lambda}{\alpha} \frac{\partial \ln Z}{\partial x}, \quad Z_t = \frac{\lambda}{2\alpha} Z_{xx}$$

Решение задачи Коши для уравнения (4.2) находится методом обратной задачи рассеяния [23, 24].

Изучим возможные решения уравнения (4.3). В переменных бегущей волны $u(x, t) = u(z)$, $z = x - C_0 t$ уравнение (4.3) после интегрирования по z принимает вид

$$C_1 - C_0 u + \frac{1}{2} u^2 + v u_{zzz} = 0, \quad v = \frac{\delta}{2\alpha} \quad (4.4)$$

В отличие от уравнений (4.1) и (4.2), уравнение (4.3) не относится к классу точно решаемых уравнений. Это доказывается проверкой уравнения на свойство Пенлеве [24]. Полагая $u = a_0/(z - z_0)^p$, получаем $p = 3$, $a_0 = 120v$. Полагая $u = a_0/(z - z_0)^p + \Lambda(z - z_0)^{j-3}$ и приравнявая нулю слагаемые при первой степени Λ , находим индексы Фукса для (4.4):

$$j_1 = -1, j_{2,3} = (13 \pm i\sqrt{71})/2.$$

Два индекса Фукса являются комплексно-сопряженными и поэтому уравнение (4.4), а следовательно и нелинейное эволюционное уравнение (4.3) не относится к классу точно решаемых уравнений.

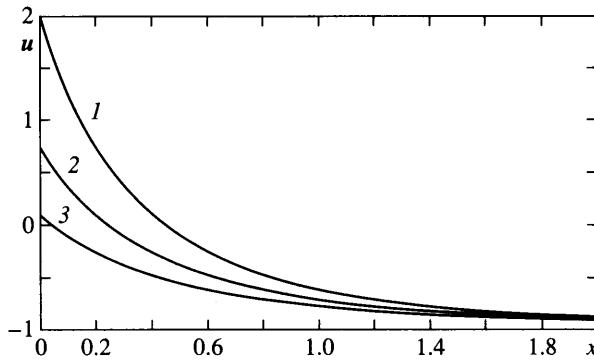
Для поиска точных решений уравнения (4.4) можно использовать ряд методов. Однако ниже используется метод простейших уравнений [25], который недавно предложен одним из авторов данной работы и является обобщением предложенных ранее подходов [26, 27].

Учитывая, что общее решение уравнения (4.4) имеет полюс третьего порядка, решение этого уравнения можно искать в виде

$$y(z) = A_0 + A_1 Y(z) + A_2 Y(z)^2 + A_3 Y(z)^3 \quad (4.5)$$

где предполагается, что $Y(z)$ удовлетворяет уравнению Риккати

$$Y_z = -Y^2 + aY(z) + b \quad (4.6)$$



Фиг. 1. Решение уравнения (4.3) в моменты времени: $t = 0, 0.2, 0.4$ (кривые 1–3)

После подстановки (4.5) и (4.6) в уравнение (4.4) находятся коэффициенты

$$A_3 = 120v, \quad A_2 = -180va, \quad A_1 = 90va^2, \quad A_0 = C_0 + 15va^3, \quad b = -a^2/4$$

Решение уравнения (4.4) при $C_1 = C_0^2/2$ принимает вид

$$u(x, t) = C_0 + \frac{120v}{(x - C_0t + C_2)^3} \quad (4.7)$$

где C_0 и C_2 – произвольные постоянные.

Решение задачи, описываемой уравнением (4.3) на полубесконечной прямой при заданном граничном условии в точке $x = 0$, соответствующим (4.7) при $t_1 = 0, t_2 = 0.2$ и $t_3 = 0.4$, иллюстрирует фиг. 1. При построении решений использованы значения параметров: $C_0 = -1.0, v = 0.025, C_2 = 1.0$. Точное решение (4.7) использовано для проверки численных решений, описываемых нелинейным волновым уравнением (4.3).

Периодические решения уравнения (4.4) могут быть найдены также методом простейших уравнений, с учетом полюса третьего порядка общего решения уравнения (4.4). Если в качестве простейшего уравнения брать уравнение для эллиптической функции Якоби, то решение уравнения (4.4) ищется в виде

$$y(z) = A_0 + A_1Q + A_2Q^2 + A_3Q^3 + B_1Q_z + B_2QQ_z \quad (4.8)$$

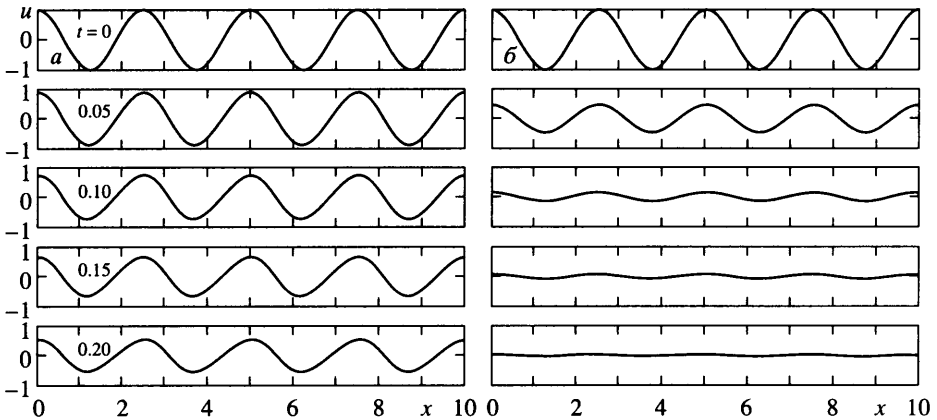
где коэффициенты A_0, A_1, A_2, A_3, B_1 и B_2 находятся после подстановки (4.8) в уравнение (4.4), $Q(z)$ является решением уравнения для эллиптической функции Якоби

$$Q_z^2 - Q^4 - aQ^3 - bQ^2 - cQ - d = 0 \quad (4.9)$$

Подставляя (4.8) в уравнение (4.4) и принимая во внимание уравнение (4.9), после приравнивания выражений при одинаковых степенях $Q(z)$ нулю, получаем

$$\begin{aligned} A_0 &= C_0 \pm 15vc, & A_1 &= \pm 30vb, & A_2 &= \pm 45va, & A_3 &= \pm 60v \\ B_1 &= -15va, & B_2 &= -60v, & d &= \frac{1}{4}ac - \frac{1}{12}b^2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$C_1 = \frac{1}{2}C_0^2 - 20v^2b^3 + \frac{135}{2}v^2bca - \frac{135}{2}v^2c^2 + \frac{45}{8}v^2a^2b^2 - \frac{135}{8}v^2a^3c$$



Фиг. 2. Эволюция периодической волны давления, описываемая уравнением Бюргерса (а) и уравнением (4.3) (б)

Решение, выраженное через эллиптические функции Якоби, имеет вид

$$y(z) = C_0 \pm 15vc \pm 30bvQ \pm 45avQ^2 \pm 60vQ^3 - 15avQ_z - 60vQQ_z$$

Здесь $Q(z)$ удовлетворяет уравнению (4.9) при ограничении (4.10) на параметр d .

5. Численные решения задач распространения возмущений в вязко-эластичной трубке. Численное моделирование переноса импульса давления в вязко-эластичной трубке, описываемого уравнениями Бюргерса и Кортевега – де Вриза, в настоящее время не представляет трудностей. Эволюция динамики импульсов, описываемых этими уравнениями, детально изучена в литературе (например, [28–30]).

Импульс, описываемый уравнением Бюргерса, с течением времени уменьшается по амплитуде из-за диссипации и одновременно искажается по форме из-за нелинейности.

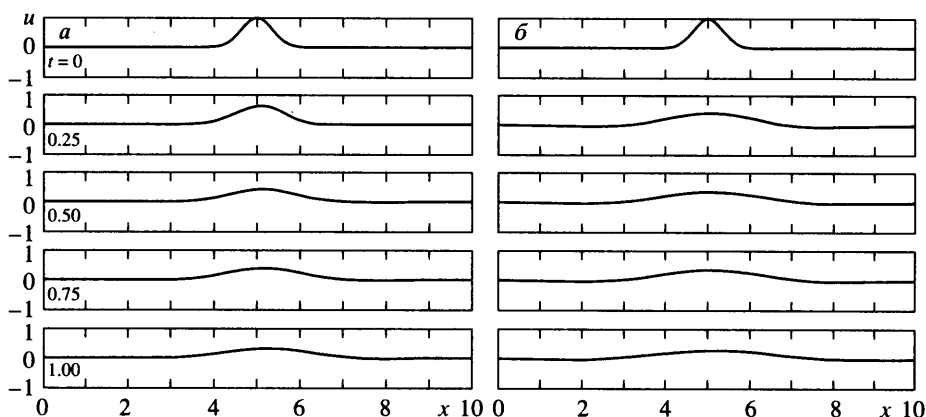
Уравнение Кортевега – де Вриза имеет решения в форме солитонов, которые переносятся в среде без искажения и диссипации. Если начальный импульс не соответствует солитонному решению, то возможен распад первоначального импульса на несколько солитонов, каждый из которых переносится без искажения и с постоянной скоростью, зависящей от амплитуды.

Рассмотрим распространение импульса давления по вязко-эластичной трубке, описываемое уравнением (4.3). Для численной реализации использована неявная двухслойная пятиточечная конечно-разностная схема. На точном решении (4.7) с шагом по координате $h = 0.05$ и по времени $\tau = h^2$ она дает относительную погрешность менее одного процента.

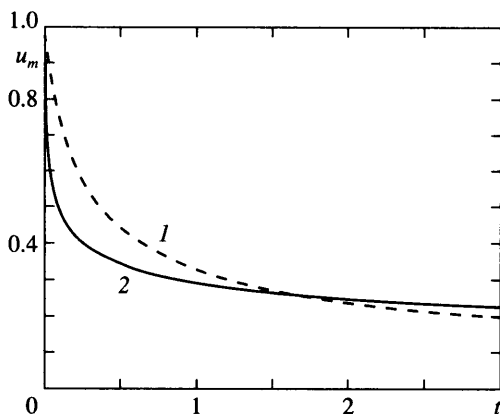
Сравнивая импульсы давления, описываемые уравнением Бюргерса и уравнением (4.3) при периодических граничных условиях, можно сделать выводы об особенностях волн, подчиняющихся этим уравнениям.

В качестве начального профиля были взяты периодический импульс давления в виде: $u(x, 0) = \cos(4/5\pi x)$ и уединенный гауссовский импульс давления: $u(x, 0) = \exp(-4(x-5)^2)$ на отрезке длины $l = 10$. При расчете полагалось: $\alpha, \delta, \lambda = 1$.

Старшие производные в уравнениях (4.1) и (4.3) описывают диссипативные процессы. Однако диссипация волн, описываемых уравнениями (4.1) и (4.3), происходит по-разному (фиг. 2–4). Для нелинейных волн эволюционного уравнения четвертого порядка (4.3) происходит дополнительное сглаживание импульсов давления. В линеаризованном случае коротковолновые гармоники в начальном профиле затухают быстрее, чем в случае уравнения Бюргерса (4.1), а длинноволновые, напротив, медленнее.



Фиг. 3. Эволюция уединенной волны давления, описываемая уравнением Бюргера (4.1) (а) и уравнением (4.3) (б)



Фиг. 4. Зависимость амплитуды уединенной волны давления u_m от времени, описываемая уравнением Бюргера (кривая 1) и уравнением (4.3) (кривая 2)

Заключение. В качестве особенностей распространения нелинейных волн в вязко-эластичной трубке, отметим, что на начальном этапе (характерное время t порядка ε^{-2}) возмущения затухают в соответствии с уравнением Бюргера (4.1). Основным фактором диссипации волн на этом этапе является сопротивление среды при движении стенки. На втором этапе ($t \sim \varepsilon^{-3}$) распространение волн описывается уравнением Кортевега – де Вриза (4.2). Нелинейные волны при этом переносятся без искажения формы. Определяющим фактором здесь являются чисто упругие свойства стенки. На третьем этапе ($t \sim \varepsilon^{-4}$) распространение нелинейных волн подчиняется уравнению (4.3). На этом этапе характерно расплывание (демпфирование) волны. Главным фактором при этом становятся вязкие свойства стенки. На всем протяжении эволюции возмущения крутизна профиля волны определяется нелинейной упругостью стенки.

Авторы выражают благодарность А.В. Мигите за полезные обсуждения и рецензенту за ценные замечания, способствующие улучшению работы. Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научно-технического центра (проект В-1213).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *O'Rourke M.* Mechanical principles in arterial disease // Hypertension. 1995. V. 26. № 1. P. 2–9.
2. *Лондон Ж.* Ремоделирование артерий и артериальное давление у больных с уреимией // Нефрология и диализ. 2000. Т. 2. № 3. 11 с.
3. *Поливода С.Н., Черенок А.А.* Ремоделирование артериальных сосудов у больных с гипертонической болезнью // Укр. ж. кардиологии. 2003. № 6. 9 с.
4. *Fung Y.C.* Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues. N.Y. etc: Springer, 1993. 568 p.
5. *Кокс Р.Г.* Сравнение моделей артериального движения крови, основанных на линеаризованных теориях распространения волн // Гидродинамика кровообращения. М.: Мир, 1971. С. 43–60.
6. *Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У.* Механика кровообращения. М.: Мир, 1981. 624 с.
7. *Регирер С.А.* Некоторые вопросы гидродинамики кровообращения // Гидродинамика кровообращения. М.: Мир, 1971. С. 242–258.
8. *Miekisz S.* Non-linear theory of viscous flow in elastic tubes // Phys. Med. Biol. 1961. V. 6. № 1. P. 103–109.
9. *Регирер С.А., Шадрина Н.Х.* Элементарная модель сосуда со стенкой, чувствительной к механическим стимулам // Биофизика. 2002. Т. 47. № 5. С. 908–913.
10. *Šanic S., Mikeli A.* Effective equations modeling the flow of a viscous incompressible fluid through a long elastic tube arising in the study of blood flow through small arteries // SIAM J. Appl. Dynam. Systems. 2003. V. 2. № 3. P. 431–463.
11. *Formaggia L., Lamponi D., Quarteroni A.* One dimensional models for blood flow in arteries // J. Eng. Math. 2003. V. 47. № 3–4. P. 251–276.
12. *Demiray H.* On some nonlinear waves in fluid-filled viscoelastic tubes: weakly dispersive case // Commun. Nonlinear Sci. and Numer. Simulation. 2005. V. 10. № 4. P. 425–440.
13. *Pontrelli G.* A multiscale approach for modelling wave propagation in an arterial segment // Comput. Methods in Biomech. and Biomed. Eng. 2004. V. 7. № 2. P. 79–89.
14. *Cascaval R.C.* Variable coefficient KdV equations and waves in elastic tubes // Lecture Notes in Pure and Appl. Math. Evolution Equations. 2003. V. 234. 12 p.
15. *Волобуев А.Н.* Течение жидкости в трубках с эластичными стенками // Успехи физ. наук. 1995. Т. 165. № 2. С. 177–186.
16. *Quarteroni A., Tuveri M., Veneziani A.* Computational vascular fluid dynamics: problems, models and methods // Comp. Vis. Science. 2000. V. 2. № 4. P. 163–197.
17. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т.7. Теория упругости. М.: Физматлит, 2001. 264 с.
18. *Ottesen J.T.* Valveless pumping in a fluid-filled closed elastic tube-system: one-dimensional theory with experimental validation // J. Math. Biol. 2003. V. 46. № 4. P. 309–332.
19. *Su C.H., Gardner C.S.* Korteweg – de Vries equation and generalizations. III. Derivation of the Korteweg – de Vries and the Burgers equation // J. Math. Phys. 1969. V. 10. № 5. P. 536–539.
20. *Вицлеб Э.* Функции сосудистой системы // Физиология человека / Под ред. Шмидта Р. и Тевса Г. М.: Мир, 1986. Т. 3. С. 101–190.
21. *Hopf E.* The partial differential equation $u_t + uu_x = u_{xx}$ // Commun. Pure Appl. Math. 1950. V. 3. № 3. P. 201–230.
22. *Cole J.D.* On a quasi-linear parabolic equation occuring in aerodynamics // Quart. Appl. Math. 1950. V. 9. № 3. P. 225–236.
23. *Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M.* Method for solving the Korteweg – de Vries equation // Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. № 19. P. 1095–1097.
24. *Кудряшов Н.А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. Москва-Ижевск:Ин-т компьют. исследований, 2004. 360 с.
25. *Kudryashov N.A.* Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations // Chaos, Solitons and Fractals. 2005. V. 24. № 5. P. 1217–1231.
26. *Кудряшов Н.А.* Точные солитонные решения обобщенного эволюционного уравнения волновой динамики // ПММ. 1988. Т. 52. № 3. С. 465–470.
27. *Kudryashov N.A.* Exact solutions of the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation // Phys. Lett. A. 1990. V. 147. № 5/6. P. 287–291.
28. *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Наука. Физматлит, 1997. 495 с.
29. *Ньюэлл А.* Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989. 233 с.
30. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. 480 с.