

УДК 532.51.013.3

© 2006 г. К. В. КАРЕЛЬСКИЙ, А. С. ПЕТРОСЯН

ЗАДАЧА О СТАЦИОНАРНОМ ОБТЕКАНИИ СТУПЕНЬКИ В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Для задачи стационарного обтекания неподвижного уступа в приближении мелкой воды найдена зависимость режима течения от глубины потока справа от уступа по отношению к его размеру и направлению течения жидкости. Получена область допустимых значений потока жидкости как функция расхода жидкости и величины уступа.

Ключевые слова: уравнения мелкой воды, уступ, стационарное решение.

Работа посвящена решению задачи о стационарном обтекании ступеньки потоком жидкости в приближении мелкой воды и исследованию ограничений, накладываемых условием односвязности области, занимаемой жидкостью около ступеньки, на характер возможных течений. Рассмотрены ограничения на возможные течения в зависимости от направления потока. Найдены все режимы течений, характеризующиеся отношением глубины потока к высоте ступеньки и направлением потока. Получены аналитические выражения для ограничений значений гидродинамических параметров течения в каждом режиме.

В приближении мелкой воды могут быть решены такие задачи, как описания движений тяжелого газа и охлажденных масс атмосферы планет (т.е. склоновых ветров). Эти движения могут быть рассмотрены как движение более плотного охлажденного газа в окружающем его менее плотном газе, движение газа с тяжелыми примесями над препятствиями, например, распространение загрязненной атмосферы или пылевого облака над городом, в энергетике – расчет потоков при возведении плотин. Классические уравнения мелкой воды на ровной границе с точностью до обозначений совпадают с уравнениями сжимаемого газа [1] и для их решения используются различные аналитические и численные методы [2, 3]. Это позволяет применить газодинамическую терминологию при описании таких течений, в частности число Прандтля играет роль числа Маха, и в зависимости от его абсолютной величины поток называется дозвуковым или сверхзвуковым.

Стационарное обтекание ступеньки – частное решение нестационарной задачи о распаде произвольного разрыва над ступенькой (далее “нестационарная задача”) [4–6]. Кроме того, для аналитического решения нестационарной задачи предполагается, что всегда над ступенькой есть область стационарности. Поэтому решение стационарной задачи обтекания ступеньки потоком является основой для решения нестационарной задачи. Наличие стационарной зоны было подтверждено как лабораторными экспериментами [7], так и численными расчетами [8]. В [4–6] была показана единственность решения нестационарной задачи, и, как следствие, ее частного случая – стационарной задачи. Однако, уравнения мелкой воды являются приближением уравнений Эйлера для невязкой жидкости со свободной поверхностью в поле силы тяжести, и, следовательно, наследуют все ограничения, принимаемые при выводе этих уравнений, в частности, условие односвязности области, занимаемой жидкостью в непосредственной близости от ступеньки. В данной работе учет указанного условия позволил обнаружить стационарные режимы течения, отличные от [4, 5].

1. Стационарные уравнения мелкой воды. Области допустимых решений. Система уравнений, описывающая стационарное течение невязкой тяжелой жидкости, имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) &= 0 \\ (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} &= -\frac{1}{\rho}\nabla P - \mathbf{g} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где ρ – плотность, \mathbf{V} – скорость, P – давление, \mathbf{g} – ускорение свободного падения.

Граничные условия: условие непротекания и условие на свободной поверхности

$$(\mathbf{V}_b, \mathbf{n}) = 0, \quad P_s = P_A \quad (1.2)$$

где \mathbf{V}_b – скорость жидкости на дне, \mathbf{n} – нормальный вектор к подстилающей поверхности, P_s – давление в жидкости на поверхности, P_A – внешнее давление.

Рассматривая жидкость несжимаемой и однородной, система (1.1) в двумерном случае переписывается таким образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} &= 0 \\ V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= 0 \\ V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + g &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

где x, y – декартовы координаты, причем вертикальная ось y направлена в сторону, противоположную направлению силы тяжести.

Модель мелкой воды описывает те течения, в которых глубина жидкости много меньше характерных линейных размеров течения. Предполагается, что давление в жидкости распределено по известному гидростатическому закону

$$P(y) = P_A + \rho g(h - y) \quad (1.4)$$

где $h(x)$ – глубина жидкости. Внешнее давление P_A в (1.4) полагается постоянным вдоль поверхности и равным атмосферному давлению.

Из этого следует малость вертикальных ускорений

$$\frac{dV_y}{dt} = 0 \quad (1.5)$$

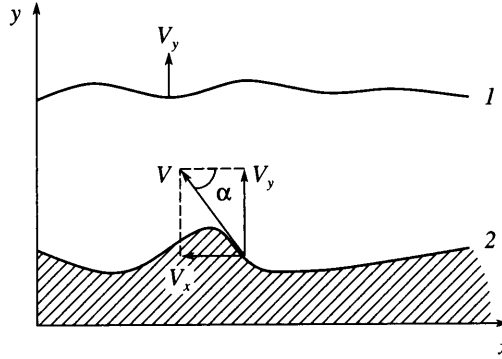
Первое и второе уравнения из (1.3) интегрируются по вертикали

$$\begin{aligned} \int_z^h \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) dy &= 0 \\ \int_z^h \left(V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \right) dy &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Граничные условия (1.2) в прямоугольной системе координат записываются так

$$\begin{aligned} \frac{V_y(x, y)}{V_x(x, y)} &= \frac{\partial z}{\partial x}, \quad y = z \\ V_y(x, y) &= \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} V_x(x, y), \quad y = h \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $z(x)$ – функция, задающая подстилающую поверхность (фиг. 1).



Фиг. 1. Граничные условия, используемые при интегрировании системы (1.3) : 1 – $h(x)$; 2 – $z(x)$; $V_y = dh(x)/dt$; $\text{tg } \alpha = dz/dx$

Используя правило дифференцирования Лейбница, система (1.6) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_z^h V_x dy = 0 \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_z^h V_x^2 dy + g(h-z) \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

Горизонтальная составляющая скорости V_x представляется в виде суммы средней скорости $u = \langle V_x \rangle$ и $V'_x(x, y)$ – отклонения от среднего

$$V_x = u + V'_x(x, y), \quad \int_z^h V'_x(x, y) dy = 0, \quad u = \frac{1}{h-z} \int_z^h V_x(x, y) dy \tag{1.9}$$

Подставляя в (1.8) горизонтальную составляющую скорости (1.9) и предполагая при некотором удалении от ступеньки, что изменение по горизонтали усредненного по высоте квадрата отклонения горизонтальной составляющей скорости от ее среднего значения мало

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_z^h (V'_x)^2 dy \approx 0 \tag{1.10}$$

Опираясь на (1.10), система (1.8) преобразуется к виду

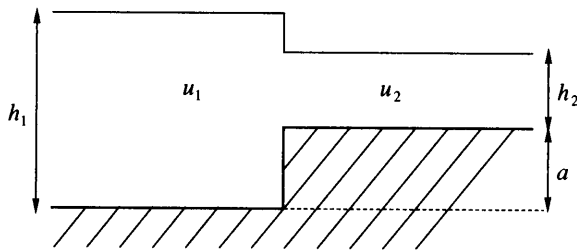
$$\frac{\partial}{\partial x} [(h-z)u] = 0 \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [(h-z)u^2] + g(h-z) \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

Введя новую переменную $h' = h - z$, отсчитываемую от подстилающей поверхности, опуская штрих, перепишем систему (1.11) в виде

$$\frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + gh \frac{\partial(h+z)}{\partial x} = 0$$



Фиг. 2. Стационарное решение системы (1.14)

Система (1.12) – одномерные стационарные уравнения Сен-Венана. Частные решения и задача Римана для $z(x)$, задаваемой линейной функцией, получены в [9, 10].

В дальнейшем удобнее использовать эквивалентный вид системы (1.12)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(hu) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2} + hg + zg\right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Интегрируя систему (1.13) по горизонтали ($z(x)$ считаем кусочно-постоянной), получаем соотношения

$$\begin{aligned} h_1 u_1 &= h_2 u_2 \\ h_1 + \frac{u_1^2}{2g} &= h_2 + \frac{u_2^2}{2g} + a \end{aligned} \quad (1.14)$$

где h_1, u_1 – глубина жидкости и её скорость слева от ступеньки, h_2, u_2 – соответствующие параметры справа от ступеньки, a – высота ступеньки (фиг. 2). С помощью замены

$$\begin{aligned} Q &= gq = gh_i u_i \\ c_i^2 &= gh_i \\ b^2 &= ga \end{aligned} \quad (1.15)$$

решение системы (1.14) сводится к решению уравнения более высокого порядка

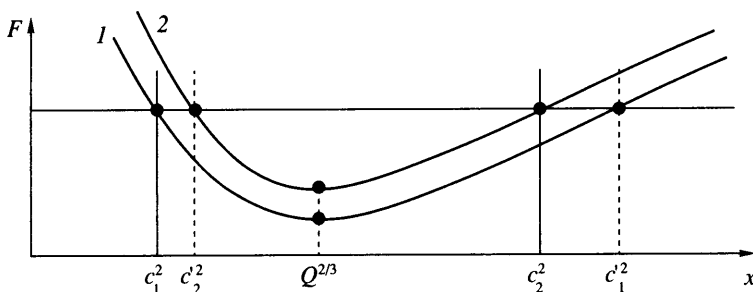
$$c_1^2 + \frac{Q^2}{2c_1^4} = c_2^2 + \frac{Q^2}{2c_2^4} + b^2 \quad (1.16)$$

где c_i – скорость поверхностных гравитационных волн, b^2 – приведенная высота ступеньки и Q – приведенный поток.

Уравнение (1.16) может быть переписано в виде

$$Q^2 = 2c_1^4 c_2^2 \frac{c_2^2 - c_1^2 + b^2}{c_2^4 - c_1^4} \quad (1.17)$$

В силу условия $Q^2 > 0$ из (1.17) следует, что если $c_1^2 > c_2^2$, то и $c_1^2 > c_2^2 + b^2$, т.е. если глубина слева от ступеньки больше, чем глубина справа, то она больше суммы глубины справа и высоты ступеньки. Нетрудно показать, что минимум функции $f(x) = x + Q^2/2x^2$ в



Фиг. 3. Графическая интерпретация решения уравнения (1.16) : 1 – $F_1(x)$; 2 – $F_2(x)$

области, где параметры уравнения имеют физический смысл, достигается точка $x_{\min} = Q^{2/3}$. Из фиг. 3 видно, что c_1^2 не может быть равно $Q^{2/3}$, из этого следует, что слева от ступеньки поток жидкости не может быть звуковым, так как число Фруда $Fr = u/c = q/hc = (q \cdot g)/(c \cdot c^2) = Q/c^3$, и при $c^2 = Q^{2/3}$, $Fr = 1$. Это означает, что в рамках приближения модели мелкой воды, волна разряжения не может проходить через ступеньку ни в одном направлении и примыкать к ней слева [4, 5]. Однако, в природе указанные решения наблюдаются и в [8] такие решения были получены численно, благодаря использованию квазидвухслойной модели, обеспечивающей диссипацию кинетической энергии на ступеньке.

Для каждого значения потока Q решением уравнения (1.16) является такой набор значений c_1^2 и c_2^2 , который удовлетворяет условию равенства двух функций

$$F_1(x) = x + \frac{Q^2}{2x^2} \tag{1.18}$$

$$F_2(x) = x + \frac{Q^2}{2x^2} + b^2 \tag{1.19}$$

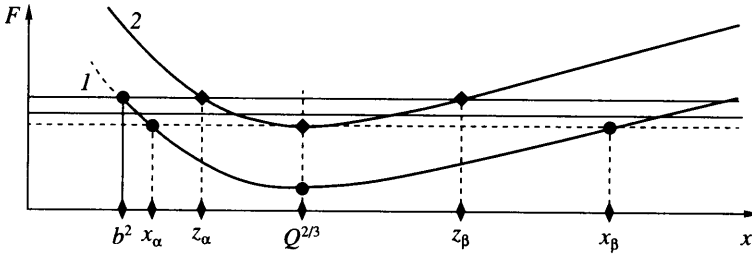
где первая и вторая функции представляют левую и правую части уравнения (1.16).

Решением задачи в [4, 5] объявлялся один из корней уравнения (1.16). Однако, из-за того, что при выборе игнорировалось условие односвязности области, занимаемой жидкостью в непосредственной близости от ступеньки, в качестве решений использовались значения переменных, выходящие за рамки ограничений, накладываемых физикой процесса, описываемой уравнениями Эйлера. Эти ограничения возникают при выводе уравнений мелкой воды из исходных уравнений гидродинамики несжимаемой идеальной жидкости в поле силы тяжести. В настоящей работе эти ограничения учтены и рассмотрены различные режимы течения, совместимые с исходными уравнениями жидкости.

Для выделения неразрывных решений наложим условие превышения глубиной жидкости слева от ступеньки ее высоты на все решения уравнения (1.16)

$$c_1^2 > b^2 \tag{1.20}$$

Именно условие (1.20) в дальнейшем приведет к появлению особых режимов стационарных течений в приближении мелкой воды. Заметим, что если $F_1(c_1^2) < F_2(x_{\min})$ (фиг. 3), то уравнение (1.16) не имеет решений. Определим связанные с этим ограничения на c_1^2 .



Фиг. 4. Границы областей различных режимов течения : 1 – $F_1(x)$; 2 – $F_2(x)$

Для этого найдем решение уравнения $F_1(x) = F_2(x_{\min})$, которое с учетом (1.18) и (1.19) принимает вид

$$x^3 - \left(\frac{3}{2}Q^{2/3} + b^2\right)x^2 + \frac{Q^2}{2} = 0 \quad (1.21)$$

Применяя формулы Кардано – Виетта к уравнению вида $x^3 + \psi x^2 + \phi = 0$, получаем выражения для корней

$$x_1 = \frac{2}{3}|\psi| \left\{ \frac{1}{2} + R \right\}, \quad R = \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(1 - \frac{27}{2} \frac{\phi}{|\psi|^3} \right) \right] \quad (1.22)$$

$$x_{2,3} = \frac{2}{3}|\psi| \left\{ \frac{1}{2} + T \right\}, \quad T = \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(1 - \frac{27}{2} \frac{\phi}{|\psi|^3} \right) \pm \frac{2\pi}{3} \right] \quad (1.23)$$

Условие отрицательности определителя уравнения равносильно совокупности следующих условий:

$$\phi > 0, \quad \psi < 0, \quad \frac{\phi}{|\psi|^3} < \frac{4}{27} \quad (1.24)$$

Для решений (1.22) и (1.23) справедливо соотношение

$$x_2 < 0 < x_3 < x_1 \quad (1.25)$$

Вводя обозначения

$$K = b^2 + \frac{3}{2}Q^{2/3}, \quad \Theta = \frac{1}{3} \arccos \left(1 - \frac{27}{4} \frac{Q^2}{K^3} \right)$$

и применяя (1.22) и (1.23) к уравнению (1.21) и учитывая (1.25), получаем (фиг. 4)

$$x_\alpha = \frac{2}{3}K \left(\frac{1}{2} + \cos \left(\Theta - \frac{2\pi}{3} \right) \right) \quad (1.26)$$

$$x_\beta = \frac{2}{3}K \left(b^2 + \frac{1}{2} \cos(\Theta) \right) \quad (1.27)$$

Корни x_α, x_β существуют при любом соотношении между Q и b^2 . Таким образом

$$c_1^2 \in (0, x_\alpha) \cup (x_\beta, +\infty) \quad (1.28)$$

и (1.28) определяет область возможных глубин слева от ступеньки в зависимости от размера ступеньки и величины расхода жидкости.

В связи с тем, что на глубину жидкости до ступеньки наложено ограничение (1.20), возникает ограничение на глубину жидкости после ступеньки: если $b^2 < x_\alpha$, что равносильно

$$b^2 < \frac{Q^{2/3}}{\sqrt{3}} \quad (1.29)$$

то существует решение, при котором течение до ступеньки сверхзвуковое, следовательно, $c_1^2 \in (b^2, x_\alpha)$. Ограничения на глубину жидкости после ступеньки получены из решения уравнения

$$F_2(z) = F_1(b^2) \Leftrightarrow z + \frac{Q^2}{2z^2} + b^2 = b^2 + \frac{Q^2}{2b^4} \quad (1.30)$$

При выполнении (1.29) справедливы условия (1.24), поэтому корни уравнения (1.30) записываются в виде

$$z_\alpha = A \left(\frac{1}{2} + \cos \left(\Omega - \frac{2\pi}{3} \right) \right) \quad (1.31)$$

$$z_\beta = A \left(\frac{1}{2} + \cos(\Omega) \right) \quad (1.32)$$

$$\Omega = \frac{1}{3} \arccos \left(1 - 54 \frac{b^{12}}{Q^4} \right), \quad A + \frac{1}{3} \frac{Q^2}{b^4}$$

При условии (1.29), если $c_1^2 \in (b^2, x_\alpha)$

$$c_2^2 \in (z_\alpha, z_\beta) \quad (1.33)$$

и (1.31), (1.33) фиксирует область возможных глубин справа от ступеньки.

Если известны поток Q и глубина жидкости до ступеньки, то глубина после ступеньки находится из уравнения

$$F_2(c_2^2) = F_1(c_1^2) \Leftrightarrow c_2^2 + \frac{Q^2}{2c_2^2} + b^2 = c_1^2 + \frac{Q^2}{2c_1^2} \quad (1.34)$$

Уравнение (1.34) имеет решения

$$c_{2\alpha}^2 = B \left(\frac{1}{2} + \cos \left(\Psi - \frac{2\pi}{3} \right) \right), \quad c_{2\beta}^2 = B \left(\frac{1}{2} + \cos(\Psi) \right) \quad (1.35)$$

В (1.35) использованы обозначения

$$B = \frac{2}{3} \left(c_1^2 + \frac{Q^2}{2c_1^4} - b^2 \right), \quad \Psi = \frac{1}{3} \arccos \left(1 - \frac{27Q^2}{4Z} \right), \quad Z = \left(c_1^2 + \frac{Q^2}{2c_1^4 - b^2} \right)^3$$

2. Анализ возможных режимов обтекания ступеньки. Объединяя найденные решения, получаем три режима течения, которые характеризуются соотношением между величиной потока и высотой ступеньки.

1. Дозвуковой поток до ступеньки, сверхзвуковой или дозвуковой поток после ступеньки. Этот режим реализуется при любых Q и b при условии $h_1 > h_2 + a$. Заметим, что для этого режима существуют два случая реализации потока после ступеньки: сверхзвуковой и дозвуковой.

2. *Сверхзвуковой поток до ступеньки, сверхзвуковой или дозвуковой поток после ступеньки.* Этот режим реализуется при $b^2 < Q^{2/3}/\sqrt{3}$, когда $h_1 > a$ и $h_1 < h_2$.

3. *Сверхзвуковой поток до ступеньки, звуковой поток после ступеньки (критический режим).* Этот режим реализуется при $b^2 = Q^{2/3}/\sqrt{3}$ и $gh_2 = Q^{2/3}$.

Однако предположение (1.20) привело к потере решений, в которых сверхзвуковой поток натекает на ступеньку и глубина потока до ступеньки меньше, чем высота ступеньки, поскольку при разбиении течений на режимы выше не учитывалось направление потока. Из опыта известно, что существуют стационарные течения, в которых поток жидкости полностью обтекает препятствия, возвышающиеся над средним уровнем жидкости. В рамках данной модели это соответствует повышению уровня жидкости за счет торможения потока, обусловленного совершением ступенькой работы над потоком. Течение перед ступенькой становится дозвуковым, и его глубина становится больше, чем высота ступеньки. Уравнение (1.16) допускает переход потока из сверхзвукового в дозвуковой до ступеньки, что означает возникновение стоячей ударной волны слева от ступеньки. Поскольку указанное течение реализуется в каждом режиме, то для нахождения полного решения будет достаточно добавить вторую неподвижную ударную волну в качестве отдельного режима с учетом направления потока. Следовательно, полное решение выглядит таким образом

$$c_1^2 \in [x_\beta, +\infty), \quad c_2^2(c_1^2) = c_{2\alpha}^2 < Q^{2/3} \vee c_2^2(c_1^2) = c_{2\beta}^2 > Q^{2/3}, \quad \forall Q, b$$

$$c_1^2 \in (b^2, x_\alpha], \quad c_2^2 \in (z_\alpha, z_\beta), \quad c_2^2(c_1^2) = c_{2\alpha}^2 < Q^{2/3} \vee c_2^2(c_1^2) = c_{2\beta}^2 > Q^{2/3}$$

$$b^2 < \frac{Q^{2/3}}{\sqrt{3}}, \quad \forall Q$$

$$b^2 = \frac{Q^{2/3}}{\sqrt{3}} = c_1^2 = x_\alpha, \quad c_2^2 = Q^{2/3} = z_\alpha = z_\beta$$

$$c_1^2 \in (0, \min(x_\beta, b^2)], \quad c_2^2(c_1^2) = c_{2\alpha}^2 < Q^{2/3} \vee c_2^2(c_1^2) = c_{2\beta}^2 > Q^{2/3}, \quad Q > 0$$

Выше было физически обосновано решение, включающее в себя стоячую ударную волну слева от ступеньки, для потока, глубина которого меньше высоты ступеньки. Но уравнению (1.16) будет удовлетворять и решение, которое включает в себя несколько ударных волн слева от ступеньки.

Так как с точки зрения (1.16) область над ступенькой справа по своим свойствам не отличается от области слева, то точно так же могут возникнуть стоячие ударные волны справа от ступеньки.

Поскольку реальные течения устойчивы к малому изменению высоты ступеньки, то течение при $h_1 = a - \varepsilon$ мало будет отличаться от течения при $h_1 = a + \varepsilon$, где $\varepsilon \ll a$. Следовательно, стоячая ударная волна до и(или) после ступеньки может входить в решение и тогда, когда глубина потока больше высоты ступеньки, что не противоречит уравнению (1.16). Тогда аналогичные рассуждения возможно применить к течениям, глубина жидкости в которых до ступеньки больше, чем высота ступеньки, и поток жидкости направлен не только на ступеньку, но и от ступеньки.

Таким образом, существует два типа неоднозначности решения задачи. Первый тип – неоднозначность, обусловленная существованием двух решений задачи с одними и теми же параметрами течения слева (или справа). Второй тип – неоднозначность, обусловленная тем, что уравнения допускают переход потока из сверхзвукового в дозвуковой

неограниченное количество раз как до ступеньки, так и после нее. Неоднозначности обоих типов являются недостатком модели.

Для того, чтобы перевести поток из дозвукового в сверхзвуковой, нужно совершить над ним положительную работу, то есть разогнать. Для перевода потока из сверхзвукового в дозвуковой необходимо его затормозить, т.е. совершить над ним отрицательную работу. Поскольку без совершения работы поток ни разогнаться, ни затормозиться не может, а единственным источником работы является ступенька, то изменение режима течения при натекании жидкости на ступеньку будет обуславливаться исключительно переходом потока из сверхзвукового в дозвуковой. При стекании жидкости со ступеньки поток не может перейти после ступеньки из дозвукового в сверхзвуковой. Поскольку взаимодействие со ступенькой – единственное вынуждающее воздействие, способное обеспечить соответствующее ускорение. Аналогично решается вопрос о каскаде ударных волн. Несмотря на то, что уравнения допускают переход потока до ступеньки из сверхзвукового в дозвуковой неограниченное число раз, физически осмысленным будет лишь переход, обусловленный торможением потока о ступеньку. Это означает, что вторая стоячая ударная волна может возникать только при положительном направлении течения. Таким образом, неоднозначность второго типа также является устранимой.

В приведенном выше полном решении задачи с учетом направления потока для каждой области значений глубины жидкости до ступеньки существуют два значения глубины жидкости после ступеньки, которые соответствуют дозвуковому и сверхзвуковому течениям (неоднозначность первого типа). Из двух возможных корней уравнения физически осмысленному решению задачи ставится в соответствие одно: если поток до ступеньки сверхзвуковой, и глубина незначительно отличается от высоты ступеньки, то ступенька для него будет являться существенным препятствием, достаточным для перехода в дозвуковой режим. В этом случае реализуется дозвуковое решение справа от ступеньки. Если же поток до ступеньки сверхзвуковой, и его глубина много больше высоты ступеньки, то ступенька будет являться несущественным препятствием, оставляя поток по-прежнему сверхзвуковым и после ступеньки. Тогда выбирается сверхзвуковое решение справа от ступеньки. Таким образом, разрешается неоднозначность первого типа в случаях существенного и несущественного влияния ступеньки.

Полезно отметить, что в [4] косвенно осуществляется аналогичный выбор решения в предположении того, что волновая картина в нижнем слое жидкости, для которого ступенька может рассматриваться как непротекаемая граница, формируется много быстрее, чем в верхнем слое. Это соответствует выбору дозвукового решения после ступеньки и, соответственно, существенному влиянию ступеньки на поток, т.е. размер ступеньки сравним с глубиной жидкости. Ситуации значительного превышения глубиной жидкости высоты ступеньки (т.е. несущественного влияния ступеньки на поток) будет соответствовать предположение, что волновая картина в верхнем слое формируется быстрее, чем в нижнем. Результаты, полученные численно, оправдывают такой выбор решений [8].

Однако проблема с выбором решения справа от ступеньки, когда глубина потока слева превышает высоту ступеньки на величины порядка самой ступеньки, остается открытой. Это особенно актуально при решении полной нестационарной задачи о распаде произвольного разрыва над ступенькой.

Недостатки модели (неединственность решения и невозможность прохождения ударной волны через ступеньку и примыкания к ступеньке) следуют из того, что при выводе уравнений мелкой воды предположено гидростатическое распределение давления в жидкости и в уравнениях (1.8), пренебрежено слагаемым (1.10), отвечающим за изменение по горизонтали усредненного по высоте отклонения горизонтальной скорости от ее среднего значения. В дальнейшем планируется учесть эти слагаемые в уравнениях путем приближения их известными функциями и решать уточненные уравнения.

Заключение. Решена задача о стационарном обтекании ступеньки потоком жидкости в приближении мелкой воды. Показано, что ограничения, накладываемые условием односвязности области, занимаемой жидкостью около ступеньки, определяют характер возможных течений. Установлена связь найденных ограничений с направлением потока жидкости и определены характеристики задачи, обусловленные отношением глубины потока к высоте ступеньки. Получены аналитические выражения для ограничений значений гидродинамических параметров течения в каждом режиме. Результаты, полученные в настоящей работе, являются неотъемлемой частью решения нестационарной задачи.

Авторы выражают признательность А.М. Фридману за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
2. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
3. Рожественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978. 687 с.
4. Alcrudo F., Benkhaldon F. Exact solutions to the Rieman problem of shallow water equation with bottom step // *Comput. Fluids*. 2001. V. 30. P. 643–671.
5. Остапенко В.В. Течения, возникающие при разрушении плотины над ступенькой дна // *ПМТФ*. 2003. Т. 44. № 4. С. 51–63.
6. Остапенко В.В. О разрывных решениях уравнений “мелкой воды” над уступом дна // *ПМТФ*. 2002. Т. 43. № 6. С. 62–74.
7. Букреев В.И., Гусев А.В. Гравитационные волны при распаде разрыва над уступом дна открытого канала // *ПМТФ*. 2003. Т. 44. № 4. С. 64–75.
8. Карельский К.В., Петросян А.С., Славин А.Г. Трансформация разрыва для потоков мелкой воды на скачке. Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность. Междунар. конф. по механике сплошной среды. М., 2004. С. 111–117.
9. Karelsky K.V., Papkov V.V., Petrosyan A.S. The initial discontinuity decay problem for shallow water equations on slopes. *Phys. Let. A*. 2000. V. 271. № 5/6. P. 349–357.
10. Karelsky K.V., Papkov V.V., Petrosyan A.S., Tsygankov D.V. Particular solutions of shallow water equations over non-flat surface. *Phys. Let. A*. 2000. V. 271. № 5/6. P. 341–348.

Москва

Поступила в редакцию
31.III.2005