

УДК 533.6.011.8:533.6.011.55

© 2005 г. В. А. ТИТАРЕВ, Е. М. ШАХОВ

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ПОПЕРЕЧНОГО ОБТЕКАНИЯ ХОЛОДНОЙ ПЛАСТИНЫ ГИПЕРЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА

Рассматривается поперечное обтекание пластины гиперзвуковым потоком разреженного газа в широком диапазоне изменения числа Кнудсена. Задача ставится для модельного кинетического уравнения и решается с помощью неявного конечно-разностного метода второго порядка точности. Представленные результаты иллюстрируют влияние чисел Кнудсена и Маха на аэродинамические характеристики пластины и картину обтекания.

Ключевые слова: разреженный газ, гиперзвуковое обтекание, кинетическое уравнение, S -модель, неявная квазимонотонная схема второго порядка аппроксимации.

Поперечное обтекание пластины разреженным газом рассматривалось в [1–4]. Так, в [3] проводился анализ гиперзвукового течения для чисел Маха набегающего потока $5.48 \leq M_\infty \leq 32.85$ на основе численного решения модельного кинетического уравнения для функции распределения молекул по скоростям. Основная цель – расчет зоны донного вакуума за холодной пластиной для чисел Кнудсена $Kn_\infty \geq 1$. В [4] методом прямого статистического моделирования исследовалось обтекание пластины для $0.015 \leq Kn_\infty \leq 5$ и $5 \leq M_\infty \leq 15$. Представлены результаты расчетов аэродинамических характеристик пластины, а также анизотропии компонент температуры в зависимости от числа Кнудсена. При этом распределение макропараметров газа по поверхности пластины, а также структура течения в донной области в [4] не рассматривались. Отметим также [5], в которой на основе совместного решения уравнений Больцмана и Навье – Стокса исследовалось нестационарное обтекание решетки пластин.

Цель настоящего исследования – подробный анализ гиперзвукового обтекания пластины разреженным газом для $M_\infty = 5.48$ и 10.95 . Все представляемые результаты получены численным решением кинетического уравнения с S -модельным интегралом столкновений [6, 7] с помощью неявной схемы второго порядка аппроксимации. Основные отличия настоящего исследования от [3, 4] состоят в следующем. Во-первых, анализ обтекания проводится в более широком диапазоне изменения числа Кнудсена $0.003 \leq Kn_\infty \leq \infty$. Во-вторых, используется численный метод, позволяющий аккуратно рассчитать распределение макропараметров газа по пластине, а также зону возвратного течения за пластиной для всех чисел Кнудсена, включая переходный режим и режим обтекания, близкий к сплошной среде. Таким образом, полученные результаты дают возможность проанализировать картину гиперзвукового обтекания для практически произвольной степени разреженности газа.

1. Постановка задачи. Рассмотрим поперечное обтекание разреженным газом пластины нулевой толщины и конечной ширины L . Невозмущенный поток характеризуется плотностью n_∞ , температурой T_∞ и скоростью U_∞ . Введем систему координат: ось x направим по нормали к пластине, в направлении скорости U_∞ , y, z – вдоль и по размаху пластины. Считаем пластину однородной. Тогда функция распределения f не зависит от z .

Задачу будем решать для кинетического уравнения Больцмана для функции распределения f молекул по скоростям с S -модельным интегралом столкновений [6, 7]. Для плоских течений функция распределения зависит от времени t , пространственных координат $(x, y) = (x_1, x_2)$ и трех компонент молекулярной скорости $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_x, \xi_y, \xi_z)$. Перейдем к безразмерным величинам, выбрав в качестве масштабов пространственных координат x, y , времени t , скорости $(u_x, u_y) = (u_1, u_2)$, плотности n , температуры T , вязкости μ , потока тепла $(q_x, q_y) = (q_1, q_2)$ и функции распределения f соответственно

$$L, \quad L/\sqrt{2RT_\infty}, \quad \sqrt{2RT_\infty}, \quad n_\infty, \quad T_\infty$$

$$\frac{5}{16}mn_\infty\sqrt{2\pi RT_\infty}\lambda_\infty, \quad mn_\infty(2RT_\infty)^{3/2}, \quad n_\infty(2RT_\infty)^{-3/2}$$

Здесь m – масса молекулы, λ_∞ – длина свободного пробега в невозмущенном газе. В дальнейшем безразмерные величины обозначаются теми же буквами, что и соответствующие им размерные. Следуя [8], понизим размерность задачи, перейдя от f к паре функций $\Phi = (\phi_1, \phi_2)^T$

$$\Phi = \int (1, \xi_z^2)^T f d\xi_z$$

В безразмерных переменных модельное кинетическое уравнение для Φ имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\xi_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \xi_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{I}, \quad \mathbf{I} = \mathbf{v}(\Phi^+ - \Phi), \quad \mathbf{v} = \frac{8}{5\sqrt{\pi}} \frac{nT}{\mu} \frac{1}{\text{Kn}_\infty}$$

$$\phi_1^+ = \phi_M(1 + \Delta(c_1^2 + c_2^2 - 2)), \quad \phi_2^+ = \frac{1}{2}T\phi_M(1 + \Delta(c_1^2 + c_2^2 - 1)) \quad (1.1)$$

$$\phi_M = n(\pi T)^{-1} \exp(-c_1^2 - c_2^2), \quad \Delta = (4/5)(1 - \text{Pr})(S_1 c_1 + S_2 c_2)$$

$$v_i = \xi_i - u_i, \quad c_i = T^{-1/2} v_i, \quad S_i = 2q_i n^{-1} T^{-3/2}, \quad \text{Kn}_\infty = \lambda_\infty / L$$

Здесь число Кнудсена Kn_∞ определяет степень разреженности набегающего потока. Макропараметры газа, входящие в модельный интеграл столкновений, выражаются через функции Φ в виде интегралов по молекулярной скорости

$$(n, nu_x, nu_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (1, \xi_x, \xi_y) \phi_1 d\xi_x d\xi_y$$

$$\frac{3}{2}nT + n(u_x^2 + u_y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ((\xi_x^2 + \xi_y^2) \phi_1 + \phi_2) d\xi_x d\xi_y \quad (1.2)$$

$$(q_x, q_y) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (v_x, v_y) (v_x^2 + v_y^2) \phi_1 + \phi_2 d\xi_x d\xi_y$$

Сформулируем граничные условия задачи. На поверхности пластины (на обеих ее сторонах $x = \pm 0$, $|y| \leq 1/2$) примем условия диффузного рассеяния молекул с полной тепловой аккомодацией к температуре поверхности T_w

$$\xi_n < 0: \quad \Phi_w = \left(1, \frac{1}{2}T_w\right)^2 n_w (\pi T_w)^{-1} \exp(-(\xi_x^2 + \xi_y^2)/T_w) \quad (1.3)$$

Плотность отраженных частиц n_w находится из условия непротекания

$$n_w = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{2RT_w}} N_i, \quad N_i = - \int_{\xi_n < 0} \xi_n \phi_1 d\xi$$

Здесь N_i – поток падающих частиц. Температура отраженных молекул T_w определяется из условий баланса энергии газа при его взаимодействии со стенкой:

$$T_w = \alpha_w T_\infty + (1 - \alpha_w) \frac{E_i}{N_i}$$

где в безразмерных переменных $T_\infty = 1$, а поток энергии падающих молекул E_i вычисляется по формуле

$$E_i = -\frac{1}{2} \int_{\xi_n < 0} \xi_x ((\xi_x^2 + \xi_y^2) \phi_1 + \phi_2) d\xi_x d\xi_y$$

Здесь α_w – коэффициент аккомодации энергии. Значение $\alpha_w = 1$ соответствует случаю холодной пластины ($T_w = 1$). Случай теплоизолированной (горячей) пластины получается при $\alpha_w = 0$; при этом полный поток энергии через поверхность равен нулю.

На бесконечности вверх по течению имеет место условие невозмущенного потока

$$\Phi(t, -\infty, y, \xi_x, \xi_y) = \Phi(t, x, \pm\infty, \xi_x, \xi_y) = \left(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}\right)^T \exp(-((\xi_x - S_\infty)^2 + \xi_y^2)) \quad (1.4)$$

где скоростное отношение $S_\infty = U_\infty / \sqrt{2RT_\infty}$ связано с числом Маха набегающего потока по формуле $M_\infty = \sqrt{6/5} S_\infty$.

Согласно кинетическому уравнению краевые условия при $x \rightarrow \infty$ также должны быть выставлены. Принималось, что вниз по потоку при $x \gg 1$ функция распределения f близка к локально-максвелловской

$$\Phi(t, \infty, y, \xi_x, \xi_y) = \frac{n}{\pi T} \left(1, \frac{1}{2} T\right)^T \exp(-c_1^2 - c_2^2) \quad (1.5)$$

где c_1, c_2 определены в (1.1). В практических расчетах данное условие выставлялось на правой границе расчетной области. При этом неизбежные ошибки, связанные с таким заданием граничного условия на бесконечности, практически не распространяются вверх по потоку в силу сверхзвукового характера течения.

2. О методе решения. Сформулированная задача (1.1)–(1.5) решалась численно методом конечных разностей. Как обычно, в расчетах выбиралась конечная область изменения переменных x, y, ξ_x, ξ_y , так чтобы влиянием ее границ можно было пренебречь. Для больших чисел Кнудсена $Kn_\infty \geq 1$ использовался метод стационарных итераций [1]. Основную трудность в расчетах представляет учет разрывов функции распределения, которые распространяются от кромок пластины. Влияние разрывов особенно велико в области донного вакуума за пластиной, где локальное число Кнудсена значительно больше Kn_∞ . Для улучшения точности счета в [1] разрывы учитываются явным образом в разностной схеме первого порядка точности с помощью интегрирования кинетического уравнения вдоль характеристик.

В настоящем исследовании применяется улучшенный вариант [1], основанный на [3, 9]. Основное отличие от [1] состоит в учете разрывов функции распределения со

вторым порядком точности как в разностной схеме [9], так и вычислении интегралов по молекулярной скорости [3]. Численные эксперименты, проведенные в [3], показали значительное увеличение точности счета в области донного вакуума за пластиной по сравнению с [1, 9].

Метод стационарных итераций в принципе позволяет вести расчеты течений с произвольными числами Кнудсена. Однако с уменьшением Kn_∞ на фиксированной скоростной сетке сходимость метода замедляется вследствие его неконсервативности по интегралу столкновений. При достаточно малых Kn_∞ изменение макропараметров газа за итерацию становится сравнимым с ошибкой в законах сохранения, и начиная с некоторого Kn_∞ итерации начинают расходиться [10]. Данную проблему можно обойти, сгущая сетку по молекулярной скорости. Однако при этом время, необходимое для расчета одного варианта течения, значительно возрастает.

Расчет течений с умеренными и малыми числами Кнудсена $\text{Kn}_\infty \leq 1$ требует использования численных методов, консервативных по оператору столкновений. Такие методы, основанные на аппроксимации кинетического уравнения в нестационарной форме методом расщепления на этапы свободно-молекулярного разлета и релаксации, были предложены в [11, 12]. При этом стационарное решение строится счетом на установление. Для ускорения счета можно использовать полностью неявные разностные схемы, позволяющие вести расчет с большим шагом по времени. Также желательно применять схемы без расщепления по процессам с тем, чтобы предельное стационарное решение не зависело от величины шага по времени.

В данном исследовании применяется консервативный неявный метод счета на установление, основанный на [13, 14]. Введем в расчетной области в переменных x, y неравномерную конечно-объемную сетку с центрами ячеек x_i, y_j и сгущением к поверхности пластины. Обозначим через $(\xi_x)_k, (\xi_y)_l$ узлы равномерной расчетной сетки в пространстве молекулярных скоростей; $k = 1, \dots, K, l = 1, L$. Пусть также $\Delta t = t^{n+1} - t^n$, $\Phi_{ijkl}^n = \Phi(t^n, x_i, y_j, (\xi_x)_k, (\xi_y)_l)$, $\delta\Phi_{ijkl} = \Phi_{ijkl}^{n+1} - \Phi_{ijkl}^n$. Для заданного вектора молекулярной скорости ξ_x, ξ_y из расчетной сетки неявная разностная схема для кинетического уравнения записывается в виде [13, 15] (индексы k, l опущены для простоты)

$$\left(1 + \Delta t \xi_x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta t \xi_y \frac{\partial}{\partial y} + \Delta t v_{ij}\right) \delta\Phi_{ij} = \Delta t \mathbf{H}_{ij} \quad (2.1)$$

где величина \mathbf{H}_{ij} является аппроксимацией правой (стационарной) части кинетического уравнения (1.1):

$$\mathbf{H}_{ij} = -\xi_x \frac{\Phi_{i+1/2, j}^n - \Phi_{i-1/2, j}^n}{\Delta x_i} - \xi_y \frac{\Phi_{ij+1/2}^n - \Phi_{ij-1/2}^n}{\Delta y_j} + \mathbf{I}_{ij}^n \quad (2.2)$$

В выражении (2.2) значения функции распределения на границах ячеек $\Phi_{i+1/2, j}^n$, $\Phi_{ij+1/2}^n$ определяются с помощью монотонной кусочно-линейной интерполяции [16, 17], что обеспечивает второй порядок аппроксимации по пространству на гладких решениях и гарантирует отсутствие нефизических осцилляций на разрывах функции распределения. Вычисление величин Φ^+ , входящих в \mathbf{I} в правой части схемы (2.1), требует знания шести макропараметров газа – плотности, температуры, двух компонент скорости и вектора теплового потока. Прямая аппроксимация (1.2) при помощи квадратной формулы приводит к неконсервативному численному методу, в котором нарушаются дискретные законы сохранения массы, импульса и энергии газа, имеющие вид

$$\sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L (I_1, \xi_x I_1, \xi_y I_1, (\xi_x^2 + \xi_y^2) I_1 + I_2)_{kl}^T A_{kl} = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

где A_{kl} – веса составной квадратурной формулы Симпсона, использующей для интегрирования по молекулярной скорости. Неконсервативность метода сильно затрудняет расчет при малых числах Кнудсена. В [20] консервативность счета обеспечивается коррекциями ϕ^+ . В [18, 19] для более простой модели Крука [20] предложено находить плотность, скорость и температуру газа непосредственно из системы уравнений (2.3). Однако для S -модели законов сохранения недостаточно, так как остаются неопределенными компоненты вектора потока тепла. Следуя [14, 21], добавим к (2.3) дискретный вариант условий, обеспечивающих правильную релаксацию вектора потока тепла в S -модели

$$\sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L (v_x, v_y)^T ((v_x^2 + v_y^2) I_1 + I_2)_{kl} A_{kl} = -\frac{4}{3} v(q_x, q_y)^T \quad (2.4)$$

Система уравнений (2.3)–(2.4) легко решается методом Ньютона.

Таким образом, правая часть схемы (2.1) полностью определена. Производные по пространству в дифференциальном операторе, стоящем в левой части схемы, аппроксимируются направленными разностями первого порядка точности в зависимости от знака вектора молекулярной скорости. На границах расчетной области и на поверхности пластины полагаем $\delta\phi = 0$. При этом граничное условие на пластине используется при аппроксимации значений функции распределения в величине \mathbf{H} в правой части схемы (2.1). В результате значения $\delta\phi_{ij}$ выражаются явным образом по схеме бегущего счета. Заметим, что в силу симметрии течения в расчетах достаточно ограничиться полуплоскостью $\xi_y > 0$.

Полученный консервативный конечно-объемный численный метод не имеет ограничений на шаг по времени, связанных условием Куранта или аппроксимацией интеграла столкновений. В частности, возможен счет с $v_{ij}\Delta t \gg 1$, что позволяет значительно ускорить сходимость к стационарному решению. При $t \rightarrow \infty$ метод аппроксимирует кинетическое уравнение в стационарной форме; при этом получаемое решение не зависит от величины шага по времени.

Заметим, что описанный численный метод решения не пригоден для исследования нестационарных течений газа, поскольку в нем теряется аппроксимация кинетического уравнения по времени вследствие вычисления ϕ на верхнем слое в модельном интеграле столкновений. Однако если интеграл столкновений в правой части схемы вычислять явным образом, то получающийся консервативный метод вполне пригоден для нестационарных течений. Соответствующие результаты могут быть найдены в [14].

3. Параметры расчетов. Все приводимые ниже результаты относятся к случаю $\mu = \sqrt{T}$, что соответствует межмолекулярному взаимодействию по закону твердых сфер. Число Прандтля принято $Pr = 2/3$. Расчеты обтекания пластины были выполнены для $0.003 \leq Kn_\infty \leq \infty$ при скоростном отношении $S_\infty = 5$ и 10. Соответствующие числа Маха набегающего потока $M_\infty = 5.48$ и 10.95. Наиболее подробные результаты получены для случая холодной пластины ($\alpha_w = 1$).

Для чисел Кнудсена $1 \leq Kn_\infty \leq \infty$ решение строилось улучшенным методом стационарных итераций [3]. С учетом симметрии функции распределения для $S_\infty = 10$ и граничного условия холодной пластины расчетная сетка состояла из 200×200 пространственных узлов и 160×200 скоростных узлов. В качестве критерия сходимости принималось условие, что изменение макропараметров газа за итерацию меньше 10^{-3} . В области донного вакуума также проверялось условие малости относительного из-

менения значений плотности за итерацию. Расчет велся продвижением по числам Кнудсена от $\text{Kn}_\infty = \infty$ к 1. При этом для заданного числа Кнудсена решение по предыдущему (большему) Kn_∞ использовалось как начальное значение. Для расчета самого сложного варианта с $\text{Kn}_\infty = 1$ и $S_\infty = 10$ потребовалось около 50 итераций.

Гораздо более трудоемкое – решение задачи для малых чисел Кнудсена. С учетом симметрии функции распределения для $S_\infty = 10$ и граничного условия холодной пластины расчетная область в переменных x, y, ξ_x, ξ_y имела размеры $-3 \leq x \leq 6, |y| \leq 6, |\xi_x| \leq 25, 0 \leq \xi_y \leq 25$. Соответствующая расчетная сетка состояла из 115×120 ячеек в пространственных переменных и 100×50 узлов в переменных ξ_x, ξ_y . Полное число ячеек четырехмерной расчетной сетки равнялось 72 млн. При этом поперек пластины приходилось 40 ячеек сетки со сгущением к краям. По координате x производилось сгущение сетки к пластине так, что в слое Кнудсена непосредственно около поверхности размер ячейки $\Delta x \approx 10^{-4}$. Вдали от пластины пространственная сетка была равномерной с постоянным размером ячейки $\Delta x \approx \Delta y \approx 0.2$ везде, кроме области торможения перед пластиной, где использовалась более подробная сетка по x с размером ячейки $\Delta x = 0.08$. Для $S_\infty = 5$ размер расчетной области по переменной y был в два раза больше, а по времени как по переменным ξ_x, ξ_y – в два раза меньше. Общее число расчетных ячеек равнялось 31 млн.

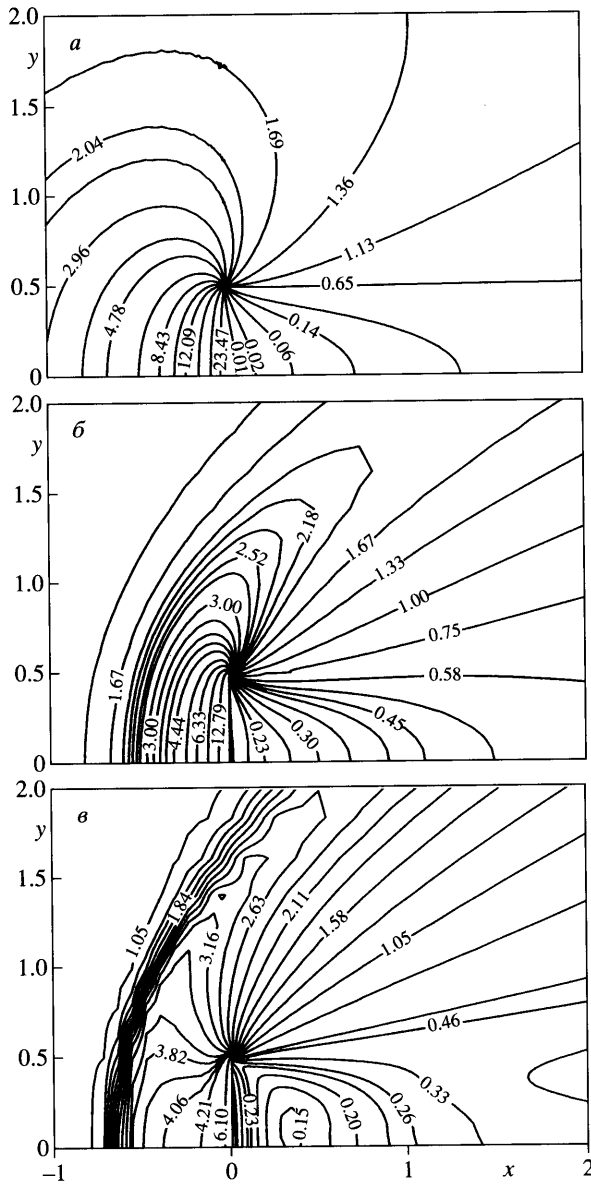
В качестве критерия сходимости к стационарному режиму обтекания использовалось условие малости нормы невязки в законах сохранения $\|\mathbf{R}\|_{L_2} \leq \epsilon$, где компоненты вектора невязки \mathbf{R} определяются численным интегрированием правой части разностной схемы (2.1)

$$\mathbf{R} = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L (H_1, \xi_x H_1, \xi_y H_1, (\xi_x^2 + \xi_y^2) H_1 + H_2)^T A_{kl}$$

Обычно принималось $\epsilon = 0.01$ для $S_\infty = 5$ и $\epsilon = 0.1$ для $S_\infty = 10$. Как и в случае больших чисел Кнудсена, расчет велся продвижением от $\text{Kn}_\infty = 0.3$ к 0.003. При этом для $\text{Kn}_\infty = 0.003$ требовалось 10000–13000 шагов по времени в зависимости от скорости набегающего потока. Машинное время, требуемое для расчета итерации – 2–3 с на каждый миллион узлов расчетной сетки для персонального компьютера с тактовой частотой 3 гГц. В целом расчет приведенных ниже результатов потребовал нескольких месяцев машинного времени.

4. Анализ картины обтекания. Рассмотрим сначала случай обтекания холодной пластины ($\alpha_w = 1$) со скоростью $S_\infty = 10$. Общее представление о картине течения для чисел $\text{Kn}_\infty = 10, 0.3, 0.01$ дают фиг. 1, 2. Данные значения параметра Kn_∞ соответствуют сильно разреженному (близкому к свободномолекулярному) режиму обтекания, переходному и режиму, близкому к течению сплошной среды соответственно. Профили плотности, температуры, скорости и плотности газа на линии симметрии перед пластиной для тех же чисел Кнудсена приведены на фиг. 3. При этом значения плотности в слое Кнудсена ограничены $n < 30$.

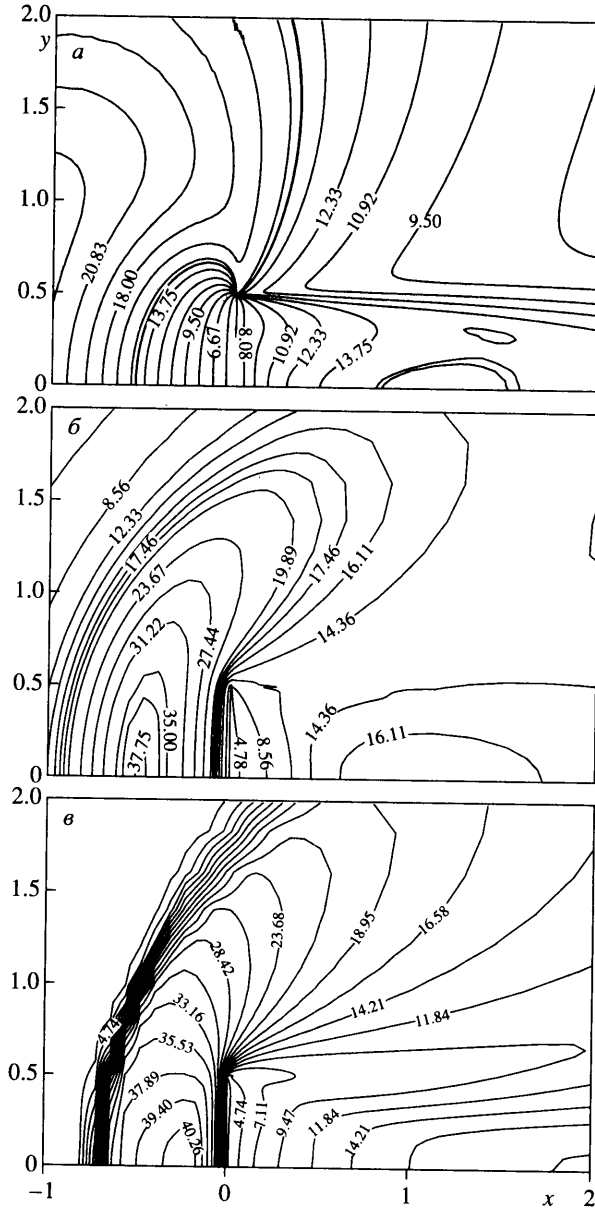
В целом для $\text{Kn}_\infty = 10$ имеем типичную картину обтекания холодной пластины сильно разреженным газом, изученную в [3] для случая максвелловских молекул. Течение характеризуется пологими профилями плотности и температуры на линии симметрии, а также сильным падением плотности газа в области донного вакуума за пластиной. Для $\text{Kn}_\infty = 0.3$ картина течения меняется вследствие более существенной роли межмолекулярных столкновений. Профили макропараметров в зоне торможения как бы прижимаются к поверхности. Видны зачатки формирующейся ударной волны. При дальнейшем уменьшении числа Кнудсена течение в области торможения приближается к режиму обтекания сплошной средой. Для $\text{Kn}_\infty = 0.01$ хорошо видны сформировавшаяся отошедшая ударная волна и пристеночный слой на пластине с большими гради-



Фиг. 1. Изолинии плотности при обтекании холодной пластины при $S_\infty = 10$: а-в – $Kn_\infty = 10, 0.3, 0.01$

ентами плотности и температуры. Однако течение газа за пластиной продолжает оставаться неравновесным в силу достаточно большого значения локального числа Кнудсена $Kn_1 \approx Kn_\infty / (n\sqrt{T})$. Отметим, что обычное предположение теории пограничного слоя о равенстве нулю градиента давления в направлении нормали к поверхности не выполняется в слое Кнудсена, что хорошо видно для $Kn_\infty = 0.3$ на фиг. 3, г.

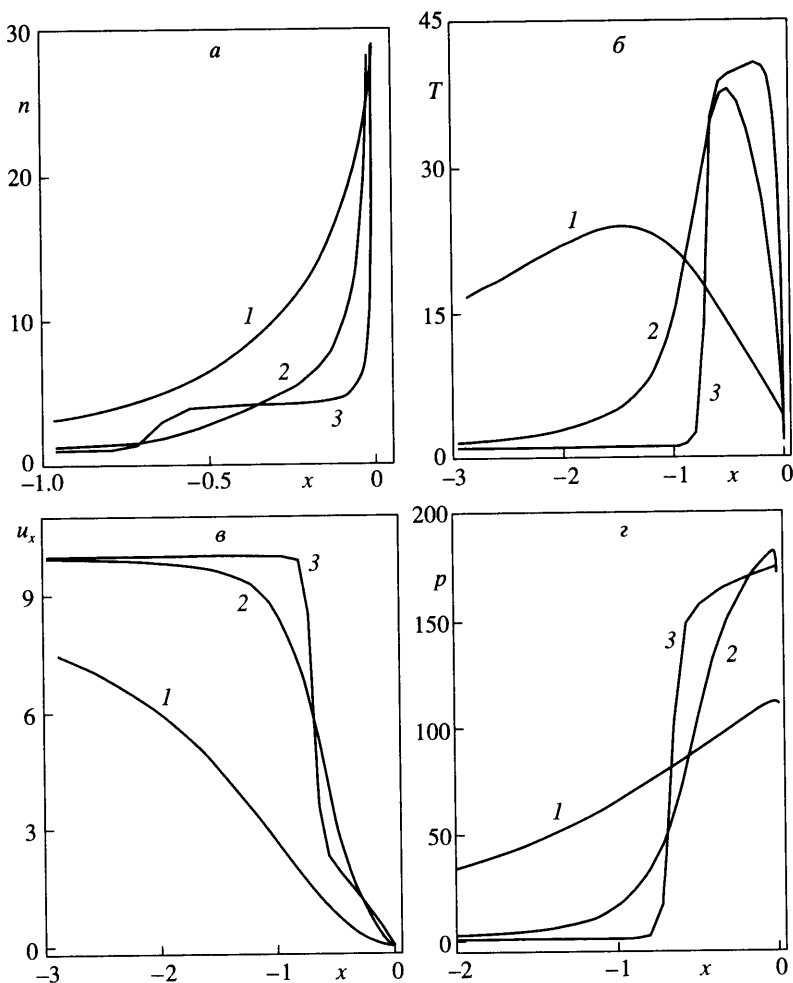
Фигура 4 иллюстрирует распределение по поверхности пластины плотности $n(0\pm, y)$, скорости скольжения $v_s = u_y(0\pm, y)$, скачка температуры $\delta T_\pm = T(0\pm, y) - 1$ и потока



Фиг. 2. Изолинии температуры при обтекании холодной пластины при $S_\infty = 10$: а-в – $Kn_\infty = 10, 0.3, 0.01$

энергии $E_x(0\pm, y)$. При этом для удобства графического представления значения потока энергии для лицевой стороны пластины $x = 0$ – нормированы на значение в невозмущенном газе $E_x^\infty = 512.5$. Соответствующие числовые значения n , T и E_x в передней и задней точке торможения приведены в табл. 1, 2.

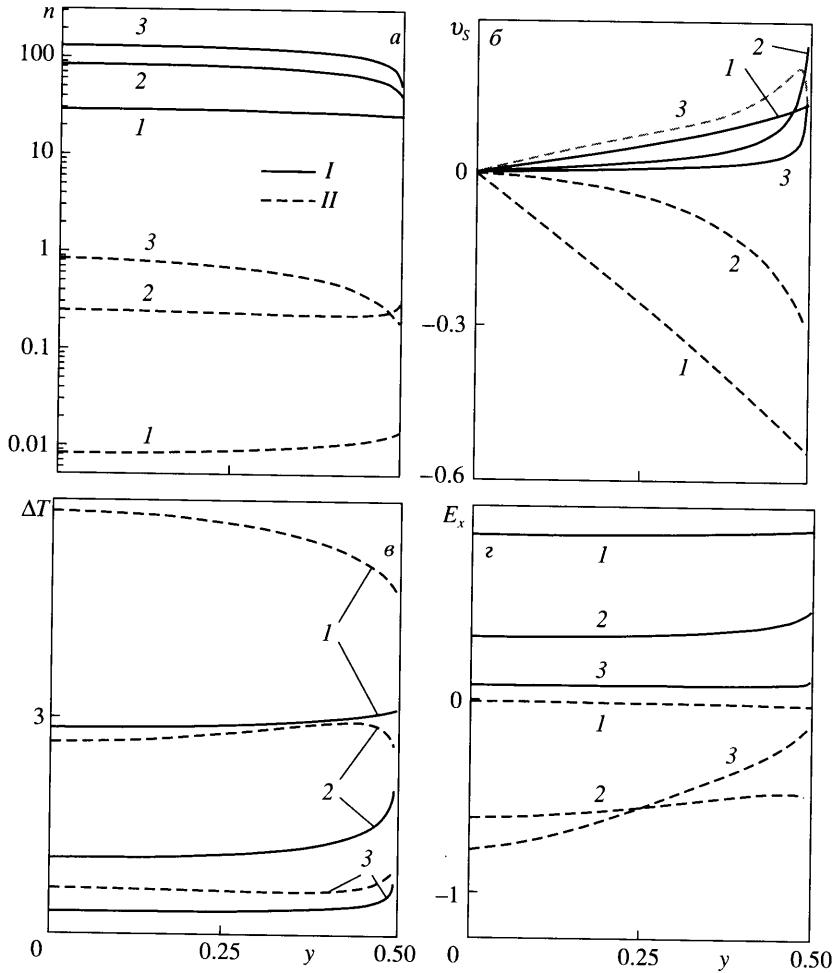
Видно, что с уменьшением числа Кнудсена плотность газа на лицевой стороне пластины растет, а значения скачка температуры и потока энергии падают. Поведение



Фиг. 3. Макропараметры газа: а-г – плотность, температура, скорость и давление на линии симметрии перед холодной пластиной для $S_\infty = 10$; 1-3 – $Kn_\infty = 10, 0.3, 0.01$

ние скорости скольжения v_s немонотонно: для свободномолекулярного обтекания $Kn_\infty = \infty$ имеем $v_s(x \pm 0, y) \equiv 0$, далее со снижением Kn_∞ скорость v_s начинает расти, достигая своего максимума при $Kn_\infty \approx 1$, когда вблизи кромки пластины $v_s(0+, 1/2) \approx 0.265$. При дальнейшем уменьшении Kn_∞ скорость v_s начинает падать, при этом профиль v_s становится существенно нелинейным, а зависимость от y напоминает степенную. Так, для $Kn_\infty = 0.1$ имеем $v_s(0+, 1/2) \approx 0.222$, для $Kn_\infty = 0.003$ – $v_s(0+, 1/2) \approx 0.114$.

На тыльной стороне пластины плотность газа монотонно растет с увеличением числа Кнудсена от $n \approx 0$ при свободномолекулярном обтекании до $n \approx 1.024$ для $Kn_\infty = 0.003$. Значение скачка температуры на тыльной стороне пластины несколько больше, чем на лицевой. Это объясняется тем, что местное число Кнудсена за пластиной на два-три порядка больше, чем в зоне торможения перед пластиной. Соответственно течение за пластиной более неравновесное. Как и для лицевой стороны, поток энергии направлен к пластине, но при этом растет по абсолютной величине с уменьшением Kn_∞ , оставаясь в целом довольно малым.



Фиг. 4. Распределения макропараметров газа: а-г – плотность, скорость скольжения, скачок температуры и поток энергии по поверхности холодной пластины для $S_{\infty} = 10$: I, II – $x = 0$; I-3 – $\text{Kn}_{\infty} = 10, 0.1, 0.01$

При $\text{Kn}_{\infty} \leq 0.1$ за пластиной появляется зона возвратного течения. При этом скорость скольжения газа по тыльной стороне пластины меняет знак. Линии тока газа на фиг. 5 демонстрируют область возвратного течения в виде кривоугольного треугольника с координатами вершин $(0, 1/2)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$.

Увеличение значений плотности на тыльной стороне пластины при уменьшении числа Кнудсена обусловлено следующими факторами, действующими при различных режимах обтекания. С одной стороны, при больших и умеренных Kn_{∞} газ перетекает в область донного вакуума из области повышенной плотности перед пластиной. При этом скорость скольжения по лицевой стороне пластины направлена от центра к кромкам, а по тыльной – от кромок к центру. Поток энергии на тыльную сторону пластины практически равен нулю. С другой стороны, с уменьшением числа Кнудсена за пластиной появляется зона сильного возвратного течения, которое создает поток массы к поверхности. При этом скорость скольжения по лицевой стороне пластины уменьшается, а по тыльной направлена от центра пластины к кромкам.

Таблица 1

Kn_∞	$n(0-, 0)$	$T(0-, 0)$	$E_x(0-, 0)$	$n(0+, 0)$	$T(0+, 0)$	$E_x(0+, 0)$
∞	9.87	2.69	63.75	≈ 0		≈ 0
100	10.32	2.63	62.00	≈ 0		≈ 0
10	12.91	2.38	54.63	0.0042	2.41	-0.00009
1	23.54	1.82	33.80	0.057	2.21	-0.022
0.1	31.97	1.35	12.57	0.197	1.68	-0.12
0.01	37.92	1.14	4.64	0.33	1.29	-0.11
0.003	39.76	1.09	2.89	0.42	1.24	-0.10

Таблица 2

Kn_∞	$n(0-, 0)$	$T(0-, 0)$	$E_x(0-, 0)$	$n(0+, 0)$	$T(0+, 0)$	$E_x(0+, 0)$
∞	18.73	4.55	502.5	≈ 0		≈ 0
100	20.34	4.41	488.8	$7.5 \cdot 10^{-5}$	6.52	≈ 0
10	29.03	3.84	438.8	0.008	6.84	-0.013
1	65.71	2.57	270.5	0.091	4.91	-0.20
0.1	99.26	1.69	102.8	0.43	2.61	-1.00
0.01	130.0	1.31	38.34	0.846	1.63	-0.785
0.003	139.4	1.22	24.06	1.024	1.51	-0.672

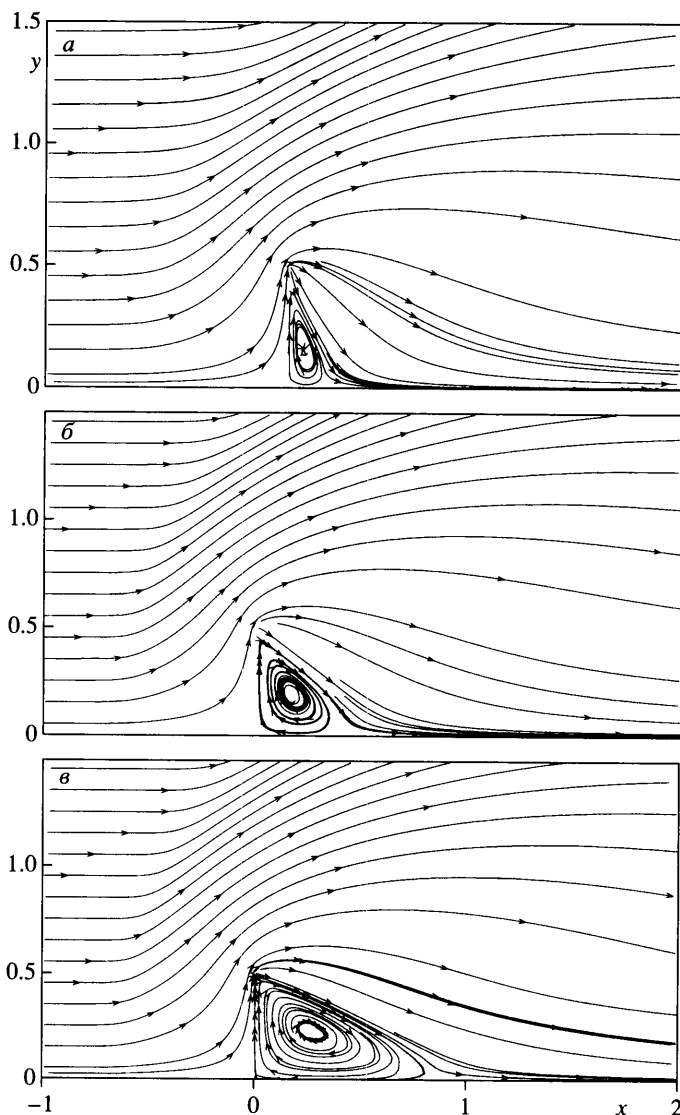
Данный эффект хорошо виден сравнением фиг. 5, в и 1, в: центр области возвратного течения соответствует минимуму плотности. При этом температура газа вблизи тыльной стороны пластины ниже температуры газа в центре зоны возвратного течения. Поскольку поток тепла направлен к поверхности, то можно предположить, что для малых Kn_∞ в области возвратного течения выполняется закон Фурье, связывающий вектор потока тепла и градиент температуры.

На фиг. 6 иллюстрируется влияние числа Кнудсена набегающего потока на степень неравновесности течения, определяемой отклонением компонент температуры T_x, T_y, T_z

$$nT_p = \left(\int \xi_p^2 \phi_1 d\xi_x d\xi_y - nu_p^2 \right), \quad p = 1, 2, \quad nT_z = \int \phi_2 d\xi_x d\xi_y$$

от средней температуры $T = (T_x + T_y + T_z)/3$. Из анализа фиг.6 следует, что при $Kn_\infty \geq 0.1$ течение существенно неравновесное в некоторой области около пластины, однако при $x \rightarrow +\infty$ анизотропия температуры уменьшается. Перед пластиной имеем $T_x > T_z > T_y$, отметим также пик T_x на ударной волне. Данные результаты согласуются с [4]. С падением числа Кнудсена анизотропия температур во всей расчетной области уменьшается. Для $Kn_\infty \leq 0.03$ можно считать, что фронтальная поверхность пластины обтекается сплошной средой. В отличие от [4] в представленных результатах пик T_x на ударной волне исчезает при малых числах Кнудсена. За пластиной для $Kn_\infty \geq 0.03$ имеем (как и в [4]) $T_x < T_z < T_y$, однако для меньших значений Kn_∞ данное соотношение нарушается в области возвратного течения, где $T_y < T_z < T_x$ и температурная анизотропия заметна даже для малых значений Kn_∞ .

В случае обтекания теплоизолированной пластины ($\alpha_w = 0$) фиг. 7 показывает, что отличие от случая холодной пластины состоит в отсутствии тонкой пристеночной области с большими градиентами плотности и температуры. Вследствие этого

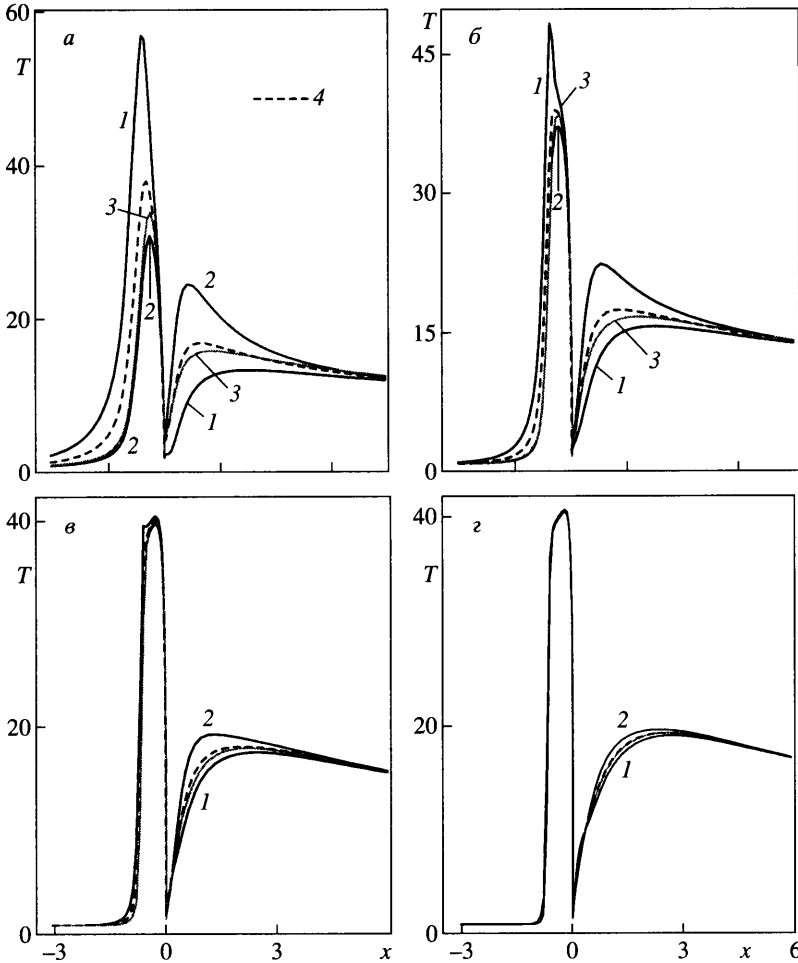


Фиг. 5. Линии тока при обтекании холодной пластины при $S_\infty = 10$: а-в – $\text{Kn}_\infty = 0.1, 0.03, 0.01$

плотность в области донного вакуума за пластиной значительно ниже, а скорость скольжения больше, чем для холодной пластины. Характер распределений плотности и температуры за горячей пластиной другой, чем за холодной, а область возвратного течения меньше. Также отметим, что при обтекании теплоизолированной пластины анизотропия в зоне дозвукового течения за пластиной гораздо более существенна, чем при обтекании холодной пластины, что объясняется большим локальным числом Кнудсена.

5. Аэродинамические характеристики пластины. Зависимости коэффициентов сопротивления c_D и теплоотдачи c_H пластины, определяемых соотношениями

$$c_D = \frac{2}{S_\infty^2} \int_{S_\infty^{-1/2}}^{1/2} (P_{xx}(0-, y) - P_{xx}(0+, y)) dy$$

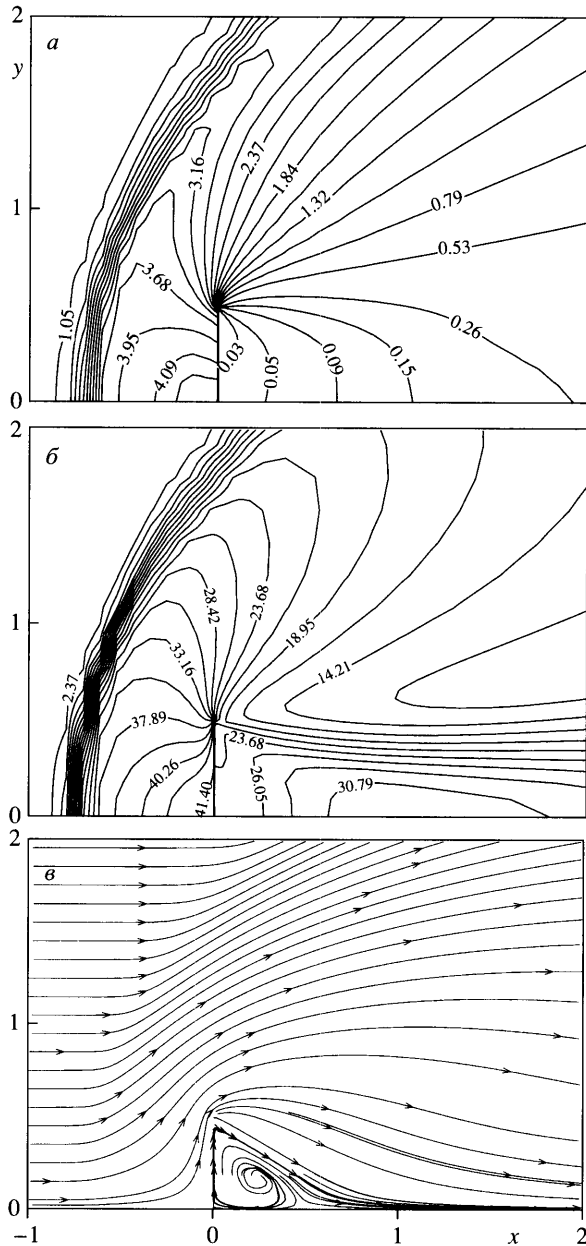


Фиг. 6. Распределения компонент температуры T_x, T_y, T_z на линии симметрии при обтекании холодной пластины для $S_\infty = 10$: а – з – $\text{Kn}_\infty = 0.3, 0.1, 0.03, 0.01$; 1–3 – T_x, T_y, T_z , 4 – средняя температура

$$c_H = \frac{1}{E_x^\infty} \int_{-1/2}^{1/2} (E_x(0-, y) - E_x(0+, y)) dy$$

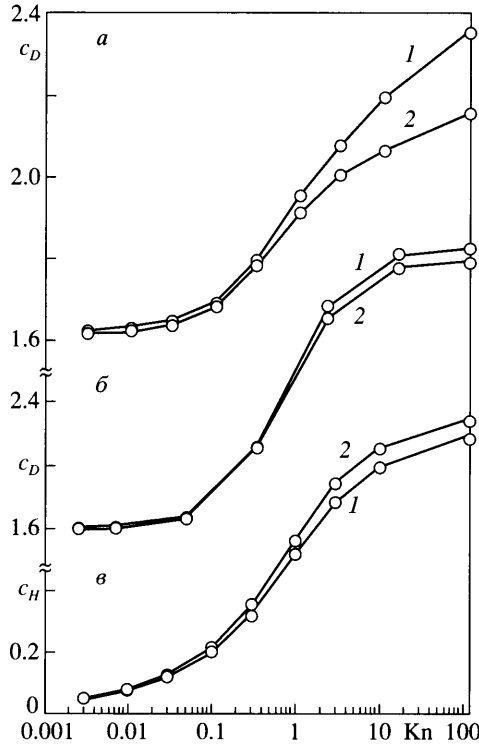
от чисел Kn_∞ и S_∞ представлены на фиг. 8, а, б. Здесь поток энергии в невозмущенном газе E_x^∞ определяется по формуле $E_x^\infty = 1/2 S_\infty^3 + 5/4 S_\infty$. Видно, что для обоих вариантов задания граничного условия на поверхности пластины с уменьшением Kn_∞ коэффициент c_D падает и выходит на некоторое предельное значение. Соответствующие числовые значения таковы:

Kn_∞	0.003	0.01	0.1	1	10	100	∞
$\alpha_w = 0, S_\infty = 5$	1.620	1.626	1.687	2.127	2.991	3.308	3.357
$\alpha_w = 0, S_\infty = 10$	1.601	1.608	1.668	2.117	2.921	3.233	3.281
$\alpha_w = 1, S_\infty = 5$	1.625	1.632	1.693	1.953	2.193	2.351	2.396
$\alpha_w = 1, S_\infty = 10$	1.613	1.620	1.679	1.911	2.061	2.152	2.188



Фиг. 7. Изолинии плотности (а), температуры (б) и линии тока при обтекании теплоизолированной пластины при $S_{\infty} = 10$, $Kn_{\infty} = 0.01$

С другой стороны, при $Kn_{\infty} \geq 100$ отличие от свободномолекулярного значения не превышает нескольких процентов. Для промежуточных значений числа Кнудсена коэффициент сопротивления линейно зависит от $\ln Kn_{\infty}$, что согласуется с [1]. Влияние граничного условия на значения c_D существенно только для $Kn_{\infty} \geq 1$. Наибольшее различие между коэффициентами сопротивления горячей и холодной пластин



Фиг. 8. Коэффициенты сопротивления и теплоотдачи: а, б – c_D для холодной и горячей пластин; в – c_H для холодной пластины; 1, 2 – $S_\infty = 5, 10$

возникает при свободномолекулярном обтекании и составляет примерно 30%. Влияние скорости S_∞ (или соответственно числа Маха) существенно только при обтекании холодной пластины и при $Kn_\infty > 10$ достигает 10%. При этом коэффициент c_D падает с увеличением S_∞ .

Зависимость коэффициента теплоотдачи c_H от скоростного отношения S_∞ при обтекании холодной пластины заметна для всех Kn_∞ . Числовые значения c_H таковы:

Kn_∞	0.003	0.01	0.1	1	10	100	∞
$S_\infty = 5$	0.045	0.073	0.198	0.521	0.803	0.902	0.928
$S_\infty = 10$	0.050	0.080	0.217	0.561	0.865	0.955	0.981

Поскольку при уменьшении Kn_∞ поток энергии на лицевую сторону пластины быстро падает, то и коэффициент c_H снижается.

Также отметим, что в целом с уменьшением числа Кнудсена интегралы по тыльной стороне пластины начинают вносить все больший вклад в коэффициенты сопротивления и теплоотдачи. Отличие представленных расчетов коэффициента сопротивления примерно в 2–3% от результатов [4] может быть вызвано тем, что в [4] данные интегралы отбрасывались.

Заключение. На основе численного решения модельного кинетического уравнения рассчитано поперечное обтекание пластины гиперзвуковым потоком разреженного газа в широком диапазоне изменения числа Кнудсена. Получено распределение макропараметров газа по обеим сторонам пластины, а также в зоне донного вакуума за пластиной. Показано, что граничное условие на поверхности и скорость набегающего

потока влияют на аэродинамические характеристики пластины только для переходных и больших чисел Кнудсена, т.е. когда важны эффекты разреженности. При малых числах Кнудсена анизотропия температур сохраняется только в области дозвукового течения за пластиной. Начиная с $Kn_{\infty} = 0.3$ за пластиной возникает область возвратного течения, расширяющаяся с уменьшением числа Кнудсена.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 04-01-00347).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шахов Е.М. Поперечное обтекание пластины разреженным газом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 6. С. 106–113.
2. Ерофеев А.И., Перепухов В.А. Расчет обтекания пластины потоком разреженного газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 4. С. 106–112.
3. Тумарев В.А., Шахов Е.М. Расчет донного вакуума за пластиной, обтекаемой гиперзвуковым потоком разреженного газа // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 2001. Т. 41. № 9. С. 1444–1456.
4. Мальцев Р.В., Ребров А.К. Поперечное обтекание полосы сверхзвуковым потоком разреженного газа // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 1. С. 159–167.
5. Попов С.П., Черемисин Ф.Г. Обтекание сверхзвуковым потоком разреженного газа решетки плоских поперечных пластин // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 3. С. 159–168.
6. Шахов Е.М. Об обобщении релаксационного кинетического уравнения Крука // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 5. С. 142–145.
7. Шахов Е.М. Метод исследования движений разреженного газа. М.: Наука, 1974. 207 с.
8. Chu C.K. Kinetic-theoretic description of the formation of a shock wave // Phys. Fluids. 1965. V. 8. № 1. P. 12–22.
9. Aoki K., Kanba K., Takata S. Numerical analysis of a supersonic rarefied gas flow past a flat plate // Phys. Fluids. 1997. V. 9. № 4. P. 1144–1161.
10. Бишаев А.М., Рыков В.А. Решение стационарных задач кинетической теории газов при умеренных и малых числах Кнудсена // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т. 15. № 1. P. 172–182.
11. Аристов В.В., Черемисин Ф.Г. Консервативный метод расщепления для решения уравнения Больцмана // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1980. Т. 20. № 1. С. 191–207.
12. Градобоев М.И., Рыков В.А. Консервативный метод численного решения кинетического уравнения при малых числах Кнудсена // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т. 34. № 2. С. 246–266.
13. Yang J.Y., Huang J.C. Rarefied flow computations using nonlinear model Boltzmann equations // J. Comput. Phys. 1995. V. 120. № 2. P. 323–339.
14. Тумарев В.А., Шахов Е.М. Численное исследование нестационарного испарения и теплоотдачи с поверхности сферы // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 1. С. 181–192.
15. Иванов М.Я., Нигматуллин Р.З. Неявная схема С.Г. Годунова повышенной точности для численного интегрирования уравнений Эйлера // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27. № 11. С. 1725–1735.
16. Колган В.П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных течений газовой динамики // Учен. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 68–77.
17. Колган В.П. Конечно-разностная схема для расчета двухмерных разрывных течений нестационарной газовой динамики // Учен. зап. ЦАГИ. 1975. Т. 6. № 1. С. 9–14.
18. Mieussens L. Discrete-velocity models and numerical schemes for the Boltzmann-BGK equation in plane and axisymmetric geometries // J. Comput. Phys. 2000. V. 162. № 2. P. 429–466.
19. Gusarov A.V., Smurov I. Gas-dynamic boundary conditions of evaporation and condensation: numerical analysis of the Knudsen layer // Phys. Fluids. 2002. V. 14. № 12. P. 4242–4255.
20. Bhattachagar P. L., Gross E. P., Krook M. A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems // Phys. Rev. 1954. V. 94. № 511. P. 1144–1161.
21. Тумарев В.А., Шахов Е.М. Численное исследование сильного нестационарного испарения с поверхности сферы // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44. № 7. С. 1314–1328.