

УДК 532.532 + 532.59

© 2005 г. В. И. БУКРЕЕВ

## О ГЛУБИНЕ ВОДЫ В ПРОРАНЕ ПРИ ЧАСТИЧНОМ РАЗРУШЕНИИ ПЛОТИНЫ

Приведены теоретические и экспериментальные данные, позволяющие определить расход, количество движения и энергию жидкости, поступающей в нижний бьеф после распада разрыва (разрушения плотины) в прямоугольном канале с ровным дном, со ступенькой (резким повышением дна вниз по потоку), с уступом (резким понижением дна) и с порогом на дне.

*Ключевые слова:* разрушение плотины, распад разрыва, критическая глубина, критическая скорость.

**1. Постановка задачи и методика эксперимента.** В случае мгновенного полного разрушения плотины масса, количество движения и энергия жидкости, поступающей в нижний бьеф, определяются через заданные параметры начального состояния [1]. При частичном разрушении плотины эти величины зависят от заранее не известных размеров и формы образовавшегося отверстия (прорана). В случае размыва земляной плотины размеры и форма прорана изменяются во времени.

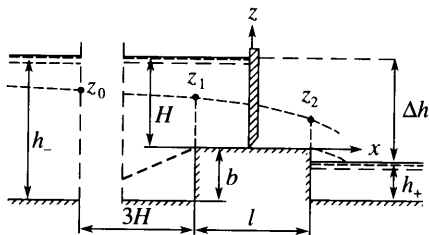
В такой неопределенной ситуации разумно изучить задачу в постановке, которая дает заведомое завышение массы, количества движения и энергии жидкости, поступающей в нижний бьеф, но не столь большое, как в схеме полного разрушения плотины. Этому условию удовлетворяет задача о распаде разрыва уровня свободной поверхности над порогом, расположенным на горизонтальном дне прямоугольного канала. При равной площади расхода через проран, форма которого отличается от прямоугольной, будет меньше. Термин “распад разрыва” используется при теоретическом анализе разрывных решений гиперболических уравнений в газовой динамике [2] и гидравлике [3]. В гидравлике эти решения проверяются на процессах после быстрого удаления тонкого щита, создающего начальный перепад уровня свободной поверхности. В задаче с порогом на дне канала термин “распад разрыва” более уместен, чем термин “разрушение плотины”, и в физическом эксперименте.

В гидравлике потоки массы  $M$ , количества движения  $K$  и энергии  $E$  жидкости через какое-либо поперечное сечение прямоугольного канала шириной  $B$  определяются объемным расходом  $Q$  и глубиной  $h$  в этом сечении

$$M = \rho Q, \quad K = \rho QU, \quad E = \rho QU^2, \quad U = Q/Bh$$

где  $\rho$  – плотность жидкости. Чтобы определить  $M$ ,  $Q$  и  $E$  в проране, нужно знать зависимость  $Q$  и  $h$  в этом поперечном сечении от заданных параметров начального состояния системы. В данной работе обсуждается имеющаяся в литературе информация по этому вопросу и приводятся результаты опытов по схеме (фиг. 1).

Опыты выполнялись в прямоугольном канале длиной 7.2 м, шириной 20 см и высотой 24 см со стеклянными стенками и горизонтальным металлическим дном. Порог располагался на расстоянии 2.4 м от расположенной вниз по потоку торцевой стенки канала. В основных опытах форма порога была прямоугольной. В некоторых опытах передняя грань порога была наклонена под углом  $30^\circ$  ко дну (фиг. 1). Щит толщиной



Фиг. 1. Схема эксперимента

1.5 см располагался посередине порога и удалялся вертикально вверх с помощью рычага вручную за время не более 0.1 с. Закон движения щита регистрировался реохордным датчиком. Этот закон был линейным. Начальные уровни свободной поверхности измерялись пьезометрами с погрешностью не более 0.5 мм. Процессы после удаления щита регистрировались волномерами и видеосъемкой. Обработка первичной информации осуществлялась на компьютере. Среднеквадратичная погрешность измерения вертикальной координаты свободной поверхности  $z$  не превышала 2% от наименьшего в опытах напора  $H$  над порогом.

Далее рассматривается только неподтопленный режим сопряжения бьефов. Режим сопряжения называется неподтопленным, если процессы в нижнем бьефе не влияют на процессы в верхнем бьефе [4]. Основное внимание уделялось интервалам времени  $t$  после начала подъема щита, на которых еще не проявлялось влияние конечной длины канала. Наименьшее значение этого интервала составляло 3.9 с. Как показали опыты, за такое время течения над порогом успевало выходить на стационарный режим с погрешностью не более 3%. Среднеквадратичная погрешность измерения времени не превышала 2% от упомянутых 3.9 с.

Если не учитывать вязкость жидкости и поверхностное натяжение, а также считать, что канал бесконечно широкий и длинный, а щит удаляется мгновенно, то рассматриваемые процессы зависят от пяти заданных параметров (фиг. 1): начальных глубин верхнего  $h_-$  и нижнего  $h_+$  бьефов, высоты  $b$  и длины  $l$  порога и ускорения свободного падения  $g$ . В случае достаточно больших значений  $l$  процессы зависят от положения щита относительно передней грани порога. С конечным временем удаления щита и со смещением щита относительно середины порога связана задержка времени установления автомодельных режимов течения. Вязкость ограничивает область существования автомодельного режима по продольной координате и во времени.

При принятых допущениях время содержится в размерности только одного основного параметра, причем в комбинации с длиной. В такой вырожденной с точки зрения теории размерности ситуации из заданных параметров нельзя составить ни одного безразмерного критерия кинематического подобия, и динамическая система имеет свободу выбора характерного масштаба скорости. В общем случае этот масштаб скорости можно представить в виде  $V = \beta \sqrt{gH}$ , где  $H = h_- - b$  — напор над гребнем порога,  $\beta$  — безразмерный коэффициент. Поскольку  $H$  не единственный заданный линейный размер, то  $\beta$  может отличаться от единицы и зависеть от других геометрических параметров. Далее при переходе к безразмерным величинам в качестве масштаба длины используется  $H$ , масштаба скорости  $\sqrt{gH}$ , масштаба времени  $\sqrt{H/g}$ . Безразмерные величины отмечаются верхним индексом “нуль”.

При различных значениях  $H$  в неподтопленном режиме изучались профили свободной поверхности непосредственно над порогом и в верхнем бьефе. В верхнем бьефе имеет место наиболее существенное отличие от случаев распада разрыва над

ровным дном и уступом. В нижнем бьефе за порогом процессы в неподтопленном режиме во многом аналогичны процессам за уступом при тех же значениях  $M$ ,  $K$  и  $E$ . Этот частный случай задачи о распаде разрыва уже достаточно хорошо изучен (см. п. 3). Особое внимание уделялось вертикальным координатам (глубинам) над передней  $z_1$  и задней  $z_2$  гранями порога, а также вертикальной координате  $z_0$  на расстоянии  $3H$  вверх по потоку от передней грани порога (фиг. 1), где в стационарном течении уровень свободной поверхности практически выходит на постоянное значение.

В общем случае картина течения после удаления щита зависит от времени и заданных параметров сложным образом. С точки зрения задачи о частичном разрушении плотины наибольший интерес представляют большие времена, неподтопленный режим и значения  $b^0$  и  $l^0$  порядка единицы. Это учитывалось при проведении опытов. Строго полученные результаты применимы только к рассмотренным в опытах диапазонам  $h_+ < b$ ,  $0.15 < b^0 < 1.4$ ,  $0.1 < l^0 < 1.5$ . Далее приводится имеющаяся в литературе информация о стационарных и нестационарных течениях в асимптотических условиях по параметрам  $b^0$  и  $l^0$ , которая позволяет экстраполировать полученные результаты за пределы указанного диапазона.

**2. Стационарные течения.** В гидравлике при классификации различных режимов стационарного течения над ровным дном ( $b = 0$ ) используется понятие критической глубины  $h_* = (q^2/g)^{1/3}$ , где  $q = Q/B$  – удельный расход [4]. Этому значению глубины соответствует критическая скорость  $V_* = q/h_*$ . При более детальной классификации стационарных течений в открытом канале полезно использовать также понятие второй критической глубины  $h_{**} \cong 0.77h_*$  [5–7]. Соответствующая этой глубине вторая критическая скорость  $V_{**} \cong 1.3V_*$ .

В случае  $l^0 \rightarrow 0$  используется термин “водослив с тонкой стенкой” [4]. Глубина над гребнем такого водослива больше  $h_*$ . Это обусловлено дополнительным сжатием потока снизу при обтекании острой кромки. При стационарном истечении через водослив с тонкой стенкой в неподтопленном режиме  $z_1^0 = z_2^0 \cong 0.85$ , а на расстоянии вверх по потоку, превышающем примерно  $3H$ , свободная поверхность становится практически горизонтальной, так что  $z_0^0 \cong 1$ . Расход через такой водослив зависит от  $b^0$ , а в подтопленном режиме также от  $h_+^0$ . Соответствующие эмпирические формулы приведены в [4].

Для частных случаев порога, когда  $b \neq 0$ , а  $l \rightarrow \infty$  либо справа, либо слева от начала координат, используются термины “ступенька” (повышение дна вниз по потоку) и “уступ” (понижение дна вниз по потоку). Картины течения в этих двух случаях существенно различаются. При стационарном течении они детально изучены в [5, 6, 8]. В частности, отрыв потока от передней кромки ступеньки приводит к тому, что профиль свободной поверхности приобретает волнообразный вид [6], а отрыв потока за уступом может сопровождаться образованием воздушных каверн [8].

Для диапазона  $b \neq 0$ ,  $2 < l^0 < 12$  используется термин “водослив с широким порогом” [4]. Для дальнейшего существенно, что при стационарном обтекании широкого порога и неподтопленном режиме в некоторой точке  $0 < x^0 < l^0$  устанавливается критическая глубина  $h_*$ . При достаточно больших значениях  $b^0$  над передней гранью широкого порога и над ступенькой устанавливается глубина  $z_1^0 \cong 1.48h_*$ , а над задней гранью широкого порога и над уступом – вторая критическая глубина, т.е.  $z_2^0 \cong h_{**}^0$  [6].

**3. Ранее изученные течения при распаде разрыва.** В случае  $b = 0$  получены автомоделные решения уравнений первого приближения теории мелкой воды [1], разработаны эффективные численные методы расчетов на основе уравнений Сен-Ве-

нана с учетом уклона дна, формы поперечного сечения и гидравлических сопротивлений реальных русел [9, 10] и выполнены численные эксперименты на основе уравнений Эйлера и Навье – Стокса для прямоугольного канала и небольших расстояний вниз по потоку от створа плотины [11]. Из экспериментальных работ можно отметить [12, 13], в которых наиболее детально проверены автомоделные решения.

Найдено, в частности, что в неподтопленном режиме в створе плотины устанавливается критическая глубина  $h_*$ , причем она выражается через начальную глубину верхнего бьефа:  $h_* = 4h_0/9$ . Верхняя граница неподтопленного режима определяется условием  $h_+ < 0.138h_-$ . Связь  $h_*$  и  $h_-$  определяет расход  $q = 8(gh_-)^{3/2}/27g$ , количество движения  $K_1 = \rho qV_*$  и энергию  $E_1 = \rho qV_*^2$ , поступающие в нижний бьеф в единицу времени через единицу ширины канала. Особо выделяется случай первоначально сухого дна в нижнем бьефе, когда  $h_+ = 0$ .

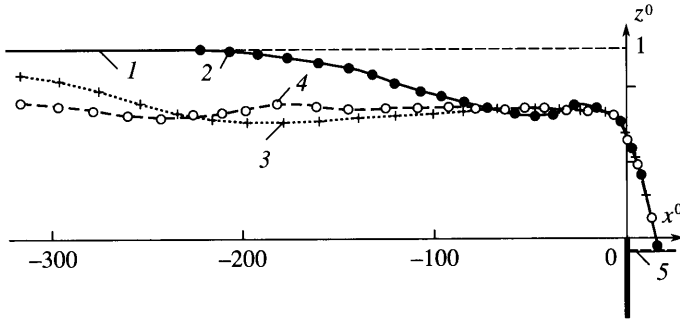
Эксперименты показали, что автомоделные решения первого приближения теории мелкой воды удовлетворительно описывают характерные высоты и скорости распространения прерывных волн в нижнем бьефе в случае первоначально обводненного дна ( $h_+ > 0$ ). Вместе с тем эта математическая модель занижает скорость распространения волн в верхнем бьефе, существенно расходится с экспериментом в случае сухого дна и совсем не описывает ондуляции (колебания уровня свободной поверхности за передним фронтом гидравлического прыжка).

Недавно на основе этой же модели получены автомоделные решения задачи о распаде разрыва над уступом и ступенькой дна [14, 15]. Их экспериментальная проверка [15, 16] дала в качественном отношении те же результаты, что и в случае ровного дна. В частности, в неподтопленном режиме на некотором расстоянии вверх по потоку от уступа устанавливается критическая глубина, равная  $4H/9$ , где  $H$  – начальная глубина перед уступом (фиг. 1), равная в данном случае  $h_-$ . Как и при распаде разрыва над ровным дном, это позволяет определить  $q$ ,  $K_1$  и  $E_1$  по начальным данным.

Метод расчета характерных глубин и скоростей при распаде разрыва над ступенькой приведен в [15]. Метод основан на первом приближении теории мелкой воды. Задача определения  $M$ ,  $K$  и  $E$  по начальным данным сводится к решению системы алгебраических уравнений. При этом пространство заданных параметров  $h_-$ ,  $b$  и  $h_+$  разделяется на две подобласти, которым соответствуют различные картины волн и алгоритмы расчета  $M$ ,  $K$  и  $E$ . Эксперимент подтвердил результаты теории относительно картины волн в нижнем бьефе. Для адекватного описания волн в верхнем бьефе необходимо использовать, по крайней мере, второе приближение теории мелкой воды [15].

Распад разрыва над водосливом с тонкой стенкой не изучался. Автору известна только одна работа [17], в которой получены единичные записи колебаний уровня в нескольких точках при распаде разрыва над широким порогом. Вопрос о том, как связана глубина над широким порогом с заданными параметрами, остался открытым. Диапазон  $0 < l^0 < 2$  слабо изучен даже при стационарном течении.

**4. Результаты опытов.** На фиг. 2 приведен пример профилей свободной поверхности  $z^0(x^0 || l^0, b^0, t^0)$  в верхнем бьефе в три момента времени после начала подъема щита (вертикальная черта означает, что следующие за ней аргументы фиксированы). На малых временах перед порогом на фоне общего понижения уровня образуется локальный бугор (линия 2 на фиг. 2). Это обусловлено тем, что при достаточно большой высоте порога в окрестности его передней грани появляется значительная вертикальная компонента скорости, направленная вверх. Поскольку в окрестности передней грани течение докритическое, это локальное возмущение распространяется и вниз, и вверх по потоку в виде вторичной волны.



Фиг. 2. Профили свободной поверхности в верхнем бьефе:  $H = 13.0$  см,  $b^0 = 0.43$ ,  $l^0 = 0.28$ ,  $h_+^0 = 0.42$ ; 1 – начальный уровень верхнего бьефа, 2 –  $l^0 = 9.9$ , 3 – 18.2, 4 – 28.3, 5 – начальный уровень нижнего бьефа

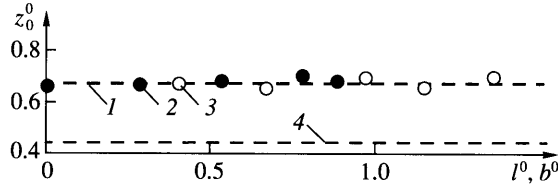
После некоторого момента времени  $t_{as}^0$  картина течения в окрестности порога становится стационарной. При этом в верхнем бьефе вторичная волна “убегает на бесконечность”. Значение  $t_{as}^0$  зависит от безразмерного времени подъема щита. В обсуждаемых опытах имело место  $t_{as}^0 \cong 18$ . В размерном виде при наибольшем в опытах значении  $H = 15$  см этому соответствовало  $t_{as} = 2.2$  с.

Графики на фиг. 2 показывают, что со временем на непрерывно расширяющемся влево интервале  $x_{as}^0(l^0) < x^0 < x_-^0$  уровень свободной поверхности в верхнем бьефе ( $x < 0$ ) выходит на постоянное значение  $z_0^{as}$ . Затем ниже по течению от точки с координатой  $x_-^0$  уровень свободной поверхности понижается. Значения  $x_-^0$  и  $z_0^{as}$ , а также стационарный профиль свободной поверхности над самым порогом зависят от параметров  $b^0$  и  $l^0$ . В обсуждаемом примере получено  $x_-^0 \cong 3.2$ ,  $z_0^{as} \cong 0.66H$ . Эти значения сохранялись с ростом  $b^0$  и  $l^0$  в изученном диапазоне. При достаточно больших значениях  $b^0$  и  $l^0$  профиль над самым порогом может иметь волнообразную форму [6]. При  $b^0 \rightarrow 0$  устанавливаются закономерности, характерные для случая разрушения плотины над ровным дном.

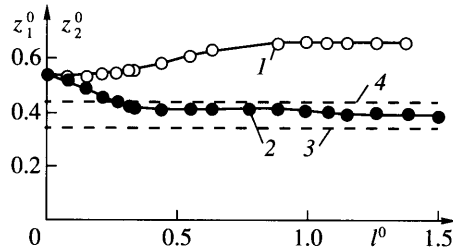
В рассматриваемом течении, так же как и в случае распада разрыва над ровным дном, ступенькой и уступом [13, 15, 16, 18], скорость распространения передней точки волны в верхнем бьефе в опытах примерно на 30% больше, чем предсказывает первое приближение теории мелкой воды.

На фиг. 3 приведены экспериментальные данные о зависимости  $z_0^{as}$  от параметров  $b^0$  и  $l^0$  в неподтопленном режиме. Они показывают, что при  $b^0 > 0.4$  значение  $z_0^0 = z_0^{as}/H$  не зависит от  $b^0$  и равно примерно 0.66 при всех значениях  $l^0 > 0$ . В таком асимптотическом режиме могут использоваться справочные данные о коэффициенте расхода [4] и другие приведены в [6] закономерности обтекания порога стационарным докритическим потоком с учетом следующего различия постановок задач.

В задаче обтекания порога стационарным докритическим потоком задан расход  $q$  и тем самым кинетическая энергия, а асимптотическая глубина перед порогом  $z_0^{as} = H$



Фиг. 3. Вертикальная координата свободной поверхности на расстоянии  $3H$  вверх по потоку от передней кромки порога при  $b^0 > 0.4$ ,  $1 - z_0^0 = 2/3$ ,  $2 - z_0^0(l^0)$ ,  $3 - z_0^0(b^0)$ ,  $4 - h_0 = 4/9$



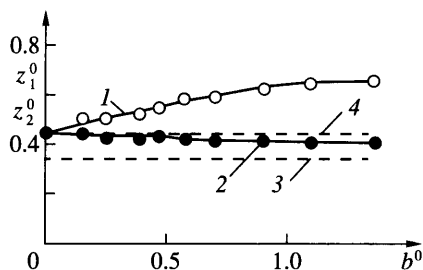
Фиг. 4. Зависимость глубин над передней и задней гранями порога от  $l^0$ :  $1 - z_1^0(l^0)$ ,  $2 - z_2^0(l^0)$ ,  $3 - h_{**} = 0.77h_*$ ,  $4 - h_*^0 = 4/9$

определяется коэффициентом расхода [4], зависящим только от геометрии порога. Величина  $H$  служит мерой потенциальной энергии жидкости относительно гребня порога и в обсуждаемой постановке задачи характеризует часть начальной кинетической энергии, перешедшей перед порогом в потенциальную форму.

В задаче о распаде разрыва задано  $H$  (потенциальная энергия). На обтекание порога затрачивается только часть избыточной энергии. Другая ее часть расходуется волной понижения уровня в верхнем бьефе на разгон покоящейся жидкости. Первая часть в свою очередь распределяется между кинетической энергией, мерой которой служит определяемое самой системой значение  $q^2$ , и потенциальной энергией перед порогом, мерой которой служит  $z_0^{as}$ . При такой постановке задачи величина  $z_0^{as}$  играет ту же роль, что и  $H$  в задаче с заданным расходом.

Время существования стационарного режима обтекания порога зависит от длины канала. В бесконечно длинном канале избыточная энергия и время существования стационарного режима бесконечны. При ограниченной длине верхнего бьефа строго стационарный режим существует только до тех пор, пока волна понижения уровня не достигнет конца канала. Выполненные опыты показали, что если канал сообщается с бассейном большой площади, то существенные изменения в картине обтекания порога начинаются только после прихода отраженной волны.

На фиг. 4 приведены зависимости глубин над передней  $z_1^0$  (линия 1) и задней  $z_2^0$  (линия 2) гранями порога от его длины  $l^0$ . Двумя горизонтальными штриховыми линиями показаны характерные глубины  $h_*^0 = 4/9$  (линия 4) и  $h_{**}^0 = 0.77h_*^0$  (линия 3). При  $l^0 > 0.3$  линия 4 расположена между линиями 1 и 2. Это означает, что где-то над порогом устанавливается критическая глубина  $h_*^0 = 4/9$ , что позволяет определить расход  $q$  по заданному значению  $H$ .



Фиг. 5. Зависимость глубин над передней и задней гранями порога от  $b^0$ . Обозначения те же, что на фиг. 4

При  $l^0 \rightarrow 0$  порог обращается в водослив с тонкой стенкой и  $z_1^0 \rightarrow z_2^0$ . Из данных на фиг. 4 следует, что в этом случае глубина над гребнем водослива примерно равна  $0.85 z_0^{as}$ . Такое же значение числового коэффициента фигурирует в зависимости глубины над гребнем порога от напора  $H$  при обтекании водослива с тонкой стенкой докритическим потоком с заданным стационарным расходом (разд. 2). Это еще один признак того, что в задаче о распаде разрыва над порогом  $z_0^{as}$  играет ту же роль, что и  $H$  в стационарном течении с заданным расходом.

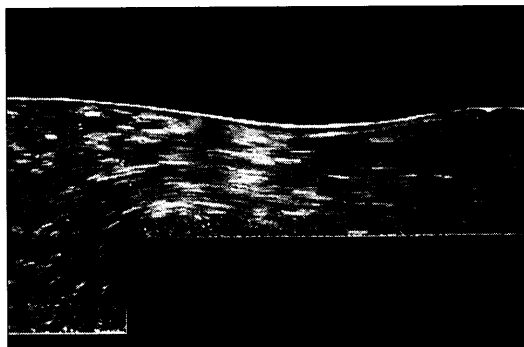
При достаточно больших значениях  $b^0$  (см. ниже) и  $l^0 > 0.8$  стационарное значение  $z_1^0 \cong 1.48 h_*^0$ , т.е. становится таким же, как в случае распада разрыва над ступенькой (разд. 3). Как и в течении с заданным расходом, отношение  $z_1/z_0^{as}$  уменьшается с ростом  $l^0$ .

В течении с заданным расходом глубина над задней кромкой порога при достаточно больших значениях  $l^0$  равна второй критической глубине  $h_{**}^0$ . Эта же тенденция прослеживается в поведении линии 2 на фиг. 4.

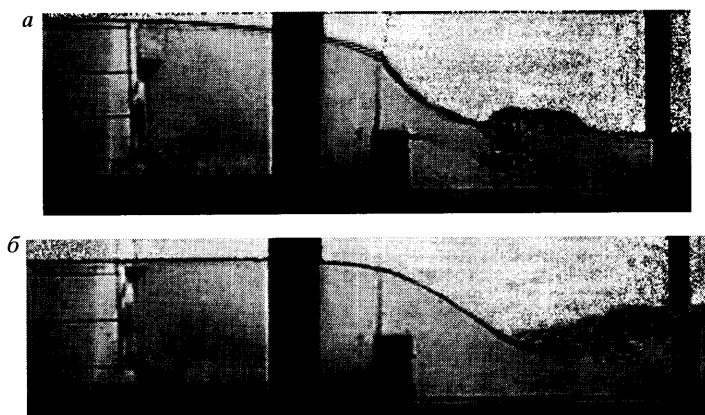
На фиг. 5 приведены зависимости глубин  $z_1^0$  (линия 1) и  $z_2^0$  (линия 2) от высоты порога  $b^0$  при  $l^0 > l_{as}^0$ . В предельном случае ровного дна  $b^0 \rightarrow 0$ ,  $z_1^0 \rightarrow z_2^0 \rightarrow 4/9$ . При  $b^0 > 1.5$  и  $l^0 > 0.8$  глубина  $z_1^0 \cong 1.48 h_*^0$ , как в случае распада разрыва над ступенькой. Линия 2 на фиг. 5 также стремится ко второй критической глубине с ростом  $b^0$ .

На фиг. 6 приведен фотоснимок траекторий частиц-меток (алюминиевой пудры) в окрестности передней грани широкого порога в стационарном докритическом потоке с заданным расходом. Перед передней гранью образуется вихрь и появляется вертикальная компонента скорости. За этой гранью образуется зона отрыва потока и свободная поверхность приобретает волнообразный характер. Аналогичная картина наблюдается при распаде разрыва. За порогом может образоваться воздушная каверна [8, 16].

На фиг. 7 приведены фотоснимки картины течения при распаде разрыва над порогом с небольшим значением  $l^0$  в начальной стадии процесса (а) и в стационарном режиме движения в окрестности порога (б). По параметру  $h_+^0$  начальные условия такие, что за порогом образуются два гидравлических прыжка, один из которых движется с постоянной скоростью по покоящейся перед ним жидкости глубиной  $h_+^0$ , а



Фиг. 6. Картина обтекания передней грани порога стационарным потоком,  $H = 6.6$  см,  $h_*^0 = 0.58$ ,  $b^0 = 0.63$ ,  $l^0 = 3.9$



Фиг. 7. Картина течения в окрестности порога:  $H = 13.0$  см,  $b^0 = 0.43$ ,  $l^0 = 0.28$ ,  $h_*^0 = 0.42$ ;  $a - l^0 = 1.9$ ,  $б - l^0 = 28.2$

второй – в среднем неподвижен. С ростом  $h_*^0$  остается только один движущийся прыжок. При меньших значениях  $h_*^0$  задний прыжок также движется вслед за передним с меньшей скоростью. В качественном отношении картина волн за порогом аналогична картине волн за уступом [16]. При идентичных значениях  $q$ ,  $K$  и  $E$  совпадают и количественные значения характеристик волн в нижних бьефах за уступом и порогом. Профили волн в верхних бьефах существенно различаются в этих двух случаях, особенно при небольших значениях  $l^0$ .

**Заключение.** Выполненные опыты показали, что в неподтопленном режиме и при значениях  $l^0$  и  $b^0$ , типичных для соответствующих размеров прорана при частичном разрушении плотины, в некотором поперечном сечении потока над порогом устанавливается критическая глубина  $h_*^0 = 4/9$ , как и в случае распада разрыва над ровным дном. При этом картина волн в нижнем бьефе аналогична ранее изученной картине волн при распаде разрыва уровня свободной поверхности над уступом дна канала. Конфигурация волны понижения уровня в верхнем бьефе зависит от коэф-



фициента расхода через проран. В изученном диапазоне значений  $l^0$  и  $b^0$  коэффициент расхода мало отличался от такового для водослива с тонкой стенкой, и уровень свободной поверхности в верхнем бьефе асимптотически стремился к значению  $z_{as}^0 \cong 2/3$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 44-01-00040) и Федеральной целевой программы "Ведущие научные школы России" (грант НШ-22-2003.5).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стокер Дж. Дж.* Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 617 с.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
3. *Атавин А.А., Гладышев М.Т., Шугрин С.М.* О разрывных течениях в открытых руслах // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Изд-во Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1975. Вып. 22. С. 37–64.
4. *Киселев П.Г.* Справочник по гидравлическим расчетам. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1961. 352 с.
5. *Букреев В.И.* Обтекание порога бурным потоком в открытом канале // ПМТФ. 2002. Т. 43. № 6. С. 54–61.
6. *Букреев В.И., Гусев А.В.* Волны за ступенькой в открытом канале // ПМТФ. 2003. Т. 44. № 1. С. 62–70.
7. *Букреев В.И.* О критических скоростях и глубинах при неравномерном установившемся течении в открытом канале // Водные ресурсы. 2004. Т. 31. № 1. С. 40–45.
8. *Букреев В.И., Гусев А.В.* Каверны за водосливом с широким порогом // ПМТФ. 2002. Т. 43. № 2. С. 129–135.
9. *Атавин А.А., Васильев О.Ф., Воеводин А.Ф., Шугрин С.М.* Численные методы решения одномерных задач гидравлики // Водные ресурсы. 1983. № 4. С. 38–47.
10. *Беликов В.В., Зайцев А.А., Милитеев А.Н.* Математическое моделирование сложных участков русел крупных рек // Водные ресурсы. 2002. Т. 29. № 6. С. 698–705.
11. *Colicchio G., Colagrossi A., Greco M., Landrini M.* Free-surface flow after a dam break: a comparative study // Schiffstechnik (Ship technol. res.). 2002. В. 49, № 3. Р. 95–104.
12. *Dressler R.F.* Comparison of theories and experiments for the hydraulic dambreak wave // Intern. Assoc. Sci. Hydrol. 1954. V. 3. № 38. P. 319–328.
13. *Букреев В.И., Гусев А.В., Мальшева А.А., Мальшева И.А.* Экспериментальная проверка газогидравлической аналогии на примере задачи о разрушении плотины // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 5. С. 143–152.
14. *Остапенко В.В.* Течения, возникающие при разрушении плотины над уступом дна // ПМТФ. 2003. Т. 44. № 6. С. 107–122.
15. *Букреев В.И., Гусев А.В., Остапенко В.В.* Волны в открытом канале, образующиеся при удалении щита перед неровным дном типа шельфа // Водные ресурсы. 2004. Т. 31, № 5. С. 540–545.
16. *Букреев В.И., Гусев А.В., Остапенко В.В.* Распад разрыва свободной поверхности жидкости над уступом дна канала // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 6. С. 72–83.
17. *Шаталина В.Н.* Распространение волны прорыва над порогом на дне канала. Эксперимент // Тр. Новосиб. гос. архитектур. строит. ун-та, 2001. Т. 4. № 2 (13). С. 162–167.
18. *Ляпидевский В.Ю., Тешуков В.М.* Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 419 с.