

УДК 532.528

© 2005 г. Д. В. МАКЛАКОВ, Г. М. ФРИДМАН

СТРУЙНОЕ ОБТЕКАНИЕ ПЛАСТИНЫ С ИНТЕРЦЕПТОРОМ ПРИ НАЛИЧИИ ЗАСТОЙНОЙ ЗОНЫ

Получено точное аналитическое решение задачи струйного обтекания плоской пластины с интерцептором при наличии застойной зоны вблизи интерцептора. Для построения решения применен метод особых точек Чаплыгина и теория эллиптических тета-функций. Давление в застойной зоне определено из условия гладкого отрыва Бриллюэна–Вилла. Установлено, что коэффициенты подъемной силы и сопротивления как функции длины застойной зоны имеют экстремумы в точках, соответствующих условию гладкого отрыва.

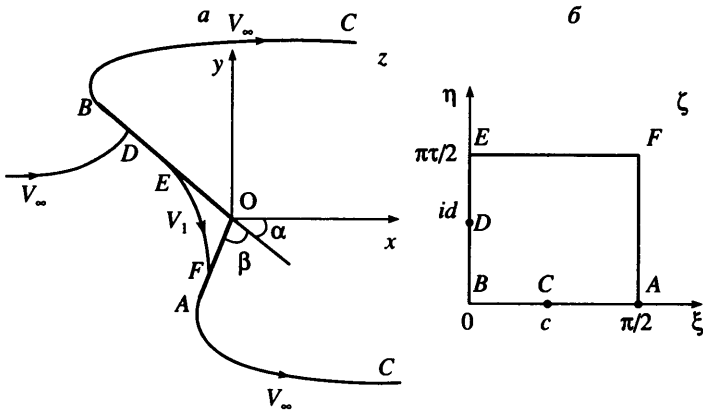
Ключевые слова: струйное обтекание, застойная зона, аналитическое решение, интерцептор.

Схема обтекания плоской пластинки с застойной зоной впервые предложена С.А. Чаплыгиным [1]. Так же, как и в каверне за телом, давление в застойной зоне предполагается постоянным, однако большим, чем атмосферное p_{∞} , и, следовательно, скорость на границе застойной зоны будет меньше, чем скорость набегающего потока. Один из выводов, сделанных в [1], состоит в следующем: “во всякой задаче о струевом течении жидкости любая критическая точка с нулевой скоростью, образовавшаяся на стенке, может быть заменена конечную массу спокойной жидкости; размеры площади сечения этой массы плоскостью xy зависят, вообще говоря, от некоторого произвольного в известных пределах количества”. Эта идея С.А. Чаплыгина получила свое дальнейшее развитие в ряде работ, ссылки на которые можно найти в классических монографиях по теории струй идеальной жидкости (см. [2, 3]).

При решении задачи о кавитационном обтекании гидропрофиля с интерцептором, расположенным на его задней кромке, вязкий отрыв потока вблизи интерцептора может быть смоделирован застойной зоной. При этом положение точки отрыва не определено. Задача об обтекании решетки профилей с интерцепторами при наличии застойной зоны исследовалась в [4], где методом сращиваемых асимптотических разложений найдено приближенное аналитическое решение. В [5, 6] представлено точное решение локальной задачи обтекания полубесконечной пластины с интерцептором при наличии застойной зоны (причем точка отрыва считалась заданной) и численно исследовано влияние этой зоны на эффективность интерцептора.

В настоящей работе находится точное аналитическое решение задачи струйного обтекания одиночной пластины с интерцептором при наличии застойной зоны. Положение точки отрыва определяется из условия гладкого отрыва Бриллюэна–Вилла.

1. Постановка задачи и ее аналитическое решение. Рассматривается струйное обтекание плоской пластины длины l под углом атаки α потоком идеальной несжимаемой невесомой жидкости плотности ρ . На задней кромке пластины расположен интерцептор длины ϵ , наклоненный под углом $\beta \in (0; \pi)$ к поверхности пластины. Началом декартовой системы координат является концевая точка O пластины. Ось x направлена параллельно вектору скорости набегающего потока, ось y вертикально вверх. Вблизи интерцептора предполагается наличие застойной зоны. Граница зоны – свободная поверхность, начинающаяся в некоторой неизвестной точке E на пластине и заканчивающаяся в точке F на интерцепторе (фиг. 1, а). Таким образом, область течения огра-



Фиг. 1. Схема обтекания пластины с интерцептором: физическая z (а) и параметрическая ζ (б) плоскости

ничена твердыми стенками BE , FA и свободными поверхностями AC , BC , EF , причем длины отрезков BE и FA заранее неизвестны и должны быть найдены в ходе решения. Так как рассматривается струйное обтекание пластины, то скорость на полубесконечных свободных поверхностях AC , BC постоянна и совпадает со скоростью набегающего потока V_∞ . Отметим, что данная задача может быть интерпретирована как схема обтекания клина с застойной зоной. Такая схема была предложена Х. Вилла [3, с. 97].

Отобразим конформно область течения на прямоугольник $\pi/2 \times \pi\tau/2$, где τ – чисто мнимая величина параметрической плоскости ζ . Соответствие точек между плоскостями $z = x + iy$ и $\zeta = \xi + i\eta$ показано на фиг. 1, а, б. С помощью метода особых точек Чаплыгина [3] построим точное решение задачи в виде двух производных комплексного потенциала $w = \phi + i\psi$ по переменным z и ζ . Решение выражается через тэта-функции θ_i , $i = 1, 2, 3, 4$ с квазипериодами π и $\pi\tau$

$$f(\zeta) = \frac{dw}{V_\infty dz} = e^{i\alpha} \frac{\theta_1(\zeta - id)}{\theta_1(\zeta + id)} \exp\left(i \frac{2\beta}{\pi} \zeta\right) \tag{1.1}$$

$$\frac{dw}{d\zeta} = -N \frac{\theta_1(2\zeta)\theta_1(\zeta - id)\theta_1(\zeta + id)}{\theta_1^3(\zeta - c)\theta_1^3(\zeta + c)} \tag{1.2}$$

откуда следует

$$\begin{aligned} z(\zeta) &= \int_0^\zeta \frac{dz}{d\zeta} d\zeta + z_B = \int_0^\zeta \frac{dz}{dw} \frac{dw}{d\zeta} d\zeta + z_B = \\ &= -\frac{N}{V_\infty} e^{-i\alpha} \int_0^\zeta \exp\left(-i \frac{2\beta}{\pi} \zeta\right) \frac{\theta_1(2\zeta)\theta_1^2(\zeta + id)}{\theta_1^3(\zeta - c)\theta_1^3(\zeta + c)} d\zeta + z_B \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $z_B = le^{i(\pi - \alpha)}$. Применяются обозначения для тэта-функций согласно [7].

Заданные параметры – длины пластины $l = OB$ и интерцептора $\epsilon = OA$, углы атаки α и установки интерцептора β . Будем считать, что в точке схода застойной зоны E выполняется условие гладкого отрыва Бриллюэна–Вилла: кривизна свободной поверхности EF в точке E конечна и совпадает с кривизной твердой стенки BE , т.е. для данной задачи равна нулю.

Неизвестными математическими параметрами задачи будут $\pi\tau$, N , c , d . Вместо чисто мнимого параметра $\pi\tau$, определяющего квазипериод тета-функций, удобно ввести действительный параметр $q = \exp(\pi i\tau)$, $0 < q < 1$. Для определения c , d , q , N необходимо сформулировать четыре соотношения.

Из условия на бесконечности $\frac{dw}{dz}(c) = V_\infty$ и формулы (1.1) найдем, что

$$\alpha + \frac{2\beta c}{\pi} = 2 \arg \theta_1(c + id) \quad (1.4)$$

Пусть $\gamma = \angle ABO$ в треугольнике BOA . Угол γ может быть определен из решения треугольника BOA по заданным сторонам $BO = l$, $OA = \varepsilon$ и углу $\pi - \beta$ между ними. С другой стороны, угол γ можно найти с помощью формулы (1.3), проинтегрировав функцию $dz/d\zeta$ по отрезкам BE , EF и FA параметрического четырехугольника. В результате приходим к соотношению

$$\gamma(c, d, q) = \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon \sin \beta}{l + \varepsilon \cos \beta} \quad (1.5)$$

Здесь

$$\gamma(c, d, q) = -\arg(J_1 + J_2 + J_3)$$

$$J_1(c, d, q) = -i \int_0^{\pi|\tau|/2} \frac{\theta_1(2i\eta)\theta_1^2(i\eta + id)}{|\theta_1(c + i\eta)|^6} e^{2\eta\beta/\pi} d\eta$$

$$J_2(c, d, q) = q^{\beta/\pi} e^{2d} \int_0^{\pi/2} \frac{\theta_1(2\xi)\theta_4^2(\xi + id)}{\theta_4^3(\xi + c)\theta_4^3(\xi - c)} e^{-2i\xi\beta/\pi} d\xi$$

$$J_3(c, d, q) = ie^{-i\beta} \int_0^{\pi|\tau|/2} \frac{\theta_1(2i\eta)\theta_2^2(i\eta + id)}{|\theta_2(c + i\eta)|^6} e^{2\eta\beta/\pi} d\eta$$

Если в точке схода застойной зоны E выполняется условие гладкого отрыва, то аналогично [3, с. 123] найдем, что

$$\frac{d}{d\zeta} \ln \frac{dw}{dz} = 0, \quad \zeta = \frac{\pi\tau}{2}$$

С помощью формулы (1.1) это соотношение можно привести к виду

$$\operatorname{Im} \left[\frac{\theta_4'(id)}{\theta_4(id)} \right] = \frac{\beta}{\pi} \quad (1.6)$$

Параметр N определяется из решения треугольника BOA и формулы (1.3)

$$N = \frac{lV_\infty}{|J_1 + J_2 + J_3|} \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin \beta} \quad (1.7)$$

Таким образом, необходимо разрешить систему (1.4)–(1.6) относительно математических параметров c , d , q , а затем по формуле (1.7) определить параметр N . Решение системы (1.4)–(1.6) можно найти, например, методом Ньютона.

После нахождения параметров c, d, q, N вычислим все интересующие характеристики течения. Обозначим через D силу сопротивления пластины, а через L – ее подъемную силу. Проводя рассуждения, аналогичные [3, с. 116–118], выводим, что

$$D + iL = \frac{i\rho V_\infty}{2} \oint_{C_\gamma} \frac{dw}{V_\infty dz} \frac{dw}{d\zeta} d\zeta$$

где черта означает комплексно-сопряженную величину, C_γ – окружность бесконечно малого радиуса с центром в точке S параметрической плоскости ζ . С помощью теории вычетов и формул (1.1), (1.2) найдем, что

$$D = \frac{1}{2} N \pi \rho V_\infty a_1 b_1^2, \quad L = -N \pi \rho V_\infty (a_1 b_2 + a_2 b_1) \quad (1.8)$$

$$a_1 = \frac{|\theta_1(c + id)|^2}{[\theta_1']^3 \theta_1^2(2c)}, \quad a_2 = a_1 \left[-\frac{\theta_1'(2c)}{\theta_1(2c)} + 2 \operatorname{Re} \frac{\theta_1'(c + id)}{\theta_1(c + id)} \right]$$

$$b_1 = 2 \operatorname{Im} \frac{\theta_1'(c + id)}{\theta_1(c + id)} - \frac{2\beta}{\pi}, \quad b_2 = \operatorname{Im} \left\{ \frac{\theta_1''(c + id)}{\theta_1(c + id)} - \left[\frac{\theta_1'(c + id)}{\theta_1(c + id)} \right]^2 \right\}$$

Длину застойной зоны $l_e = OE$ определим из решения треугольников BOA и EOF и формулы (1.3)

$$l_e = l \frac{\sin(\beta + \arg J_2) |J_2|}{\sin(\beta - \gamma) |J_1 + J_2 + J_3|}$$

Введем коэффициент давления C_{pz} в застойной зоне

$$C_{pz} = \frac{p_z - p_\infty}{\rho V_\infty^2 / 2} = 1 - \frac{V_1^2}{V_\infty^2}$$

где p_z и p_∞ – давления внутри застойной зоны и на бесконечности, V_1 – скорость на границе застойной зоны. Из соотношения

$$\frac{dw(\pi\tau)}{dz\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)} = \frac{V_1}{V_\infty} e^{i\alpha}$$

с помощью формулы (1.1) выводим, что

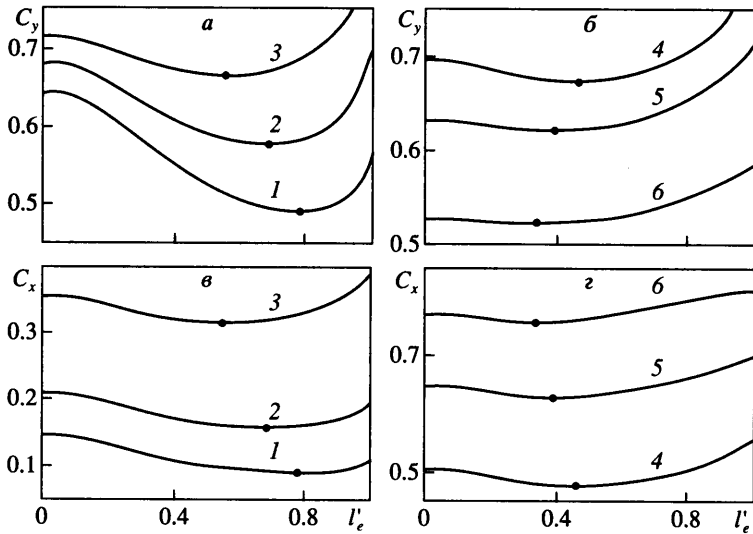
$$C_{pz} = 1 - e^{-4d} q^{2\beta/\pi}$$

2. Результаты числовых расчетов. Если отказаться от выполнения условия гладкого отрыва в точке E , то имеем только два уравнения (1.4), (1.5) для определения трех математических параметров c, d и q . Удобно ввести параметр

$$k = \frac{2d}{\pi|\tau|} = -\frac{2d}{\ln q}$$

и считать его заданным. При известном q этот параметр определяет положение точки D в параметрической плоскости

$$d = -\frac{k}{2} \ln q \quad (2.1)$$

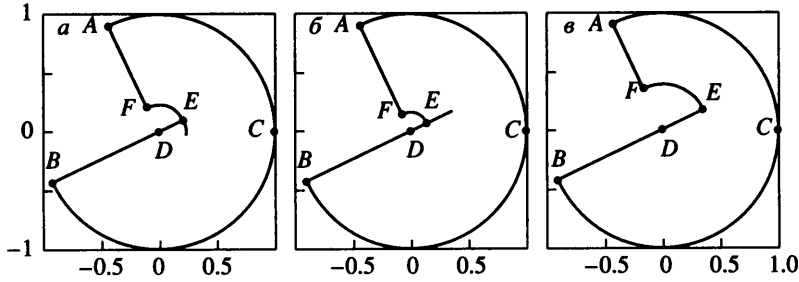


Фиг. 2. Зависимости коэффициентов C_y (а, б) и C_x (в, г) от длины l'_ϵ при $\epsilon' = 0.1$, $\beta = 90^\circ$: 1–6 – $\alpha = 5, 10, 20, 30, 40$ и 50°

а пределы его изменения $0 < k < 1$ известны заранее. При заданном k параметры c и d находятся из решения системы (1.4), (1.5) с учетом (2.1). Теперь посредством изменения k можно строить различные параметрические зависимости между характеристиками течения.

Зависимости коэффициентов подъемной силы C_y и сопротивления C_x на фиг. 2 от длины застойной зоны $l'_\epsilon = l_\epsilon/l$ для различных углов атаки пластины α при фиксированных длине интерцептора $\epsilon' = \epsilon/l = 0.1$ и угле его установки $\beta = 90^\circ$ показывают, что при некотором значении l'_ϵ эти зависимости имеют минимумы. Аналогичные минимумы получаются и при всех других значениях ϵ' и β . Более того, детальный численный анализ позволяет сделать вывод, что эти минимумы и для C_y , и для C_x имеют место при одном и том же значении l'_ϵ , когда в точке отрыва застойной зоны E выполняется условие гладкого отрыва (1.6). Для различных α , ϵ' и β проводился численный поиск минимумов C_y и C_x как функций параметра k , а затем этот параметр находился из условия гладкого схода (1.6). Установлено, что все три величины совпадают с очень высокой точностью, которая определяется погрешностями поиска минимумов и решения нелинейной системы уравнений (1.4)–(1.6).

Г.Ю. Степанов [8] впервые обнаружил, что в точках отрыва Бриллюэна–Вилла реализуется экстремум гидродинамических характеристик. Это было численно установлено в случаях кавитационного обтекания кругового цилиндра [3, 9] и произвольного гидропрофиля [10, 11]. Отметим, однако, что в [3, 9] и [10, 11] условие гладкого отрыва выполнялось на искривленной твердой поверхности, а решение соответствующих задач сводилось к решению нелинейного интегрального уравнения типа уравнения Вилла совместно с системой функциональных соотношений для отыскания параметров. Гидродинамические характеристики потока для указанных выше задач могут быть вычислены, хотя и с высокой степенью точности, но все же приближенно. Это обстоятельство не дает возможности получить точный ответ на вопрос: действительно ли в точках гладкого отрыва реализуются экстремумы. Задача, рассматрива-



Фиг. 3. Типы областей годографа скорости *a–в* для $k = 0.55, 0.06$ и 0.188704 при $\alpha = 25^\circ, \beta = 90^\circ, \epsilon' = 0.2$

емая в данной статье, проще, так как препятствие полигонально, и нет необходимости решать нелинейное интегральное уравнение. Поэтому для данной задачи эти экстремумы могут быть найдены с весьма высокой точностью.

Исследуем более детально физические аспекты применения условия гладкого отрыва для данной задачи. Возьмем, например, $\alpha = 25^\circ, \beta = 90^\circ, \epsilon' = 0.2$. Тогда гладкий отрыв достигается при $k = 0.188704$. Положим теперь, что $k = 0.55 > 0.188704$. На фиг. 3, *a* изображена область изменения функции

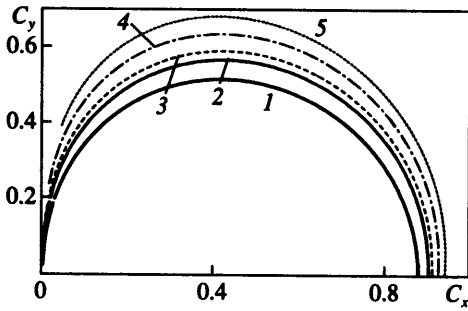
$$\frac{dW}{V_\infty dz} = \frac{V}{V_\infty} e^{-i\theta} = V_x - iV_y$$

для этого значения k (область годографа скорости). Здесь V – модуль, а θ – аргумент вектора скорости. Видно, что в силу наличия кругового “аппендикса”, на участке свободной поверхности FE углы наклона вектора скорости сразу после точки отрыва превосходят угол наклона пластины. Это означает, что свободная поверхность FE будет пересекать пластину BO , что физически невозможно. Таким образом, если точка отрыва E расположена ближе к концу пластины B , чем точка гладкого отрыва, то получается нереальное течение. Аналогичный результат имеет место и при применении условия гладкого отрыва для искривленных тел [3]. Из приведенных выше рассуждений следует, что условие гладкого отрыва обеспечивает максимальную, физически возможную длину застойной зоны l_c .

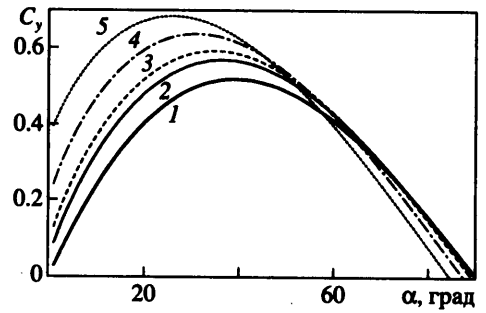
Положим теперь, что $k = 0.06 < 0.188704$. Область годографа для данного значения k показана на фиг. 3, *б*. В этом случае прямолинейный аппендикс имеет участок DE , расположенный на пластине. Его наличие означает, что скорость на пластине сначала возрастает от точки торможения D , а затем начинает убывать. Можно показать с помощью формул (1.1), (1.2), что при приближении к точке E градиент давления становится бесконечно большим. Этот неблагоприятный градиент давления должен привести к неизбежному отрыву потока до предполагаемой точки отрыва E .

Годограф скорости для случая гладкого отрыва изображен на фиг. 3, *в*. Здесь внутренний аппендикс отсутствует, однако и этот случай не лишен физического противоречия, так как градиент давления всюду благоприятный, а значит, нет причин для возникновения отрыва пограничного слоя. Разрешение этого парадокса было дано В.В. Сычевым в его теории самоиндуцированного отрыва [12], согласно которой предельным состоянием потока при числе Рейнольдса, стремящемся к бесконечности, будет невязкое течение, удовлетворяющее условию Бриллюэна–Вилла.

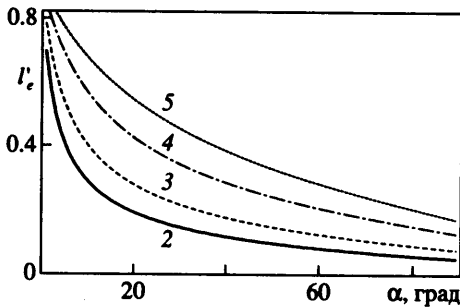
Эффективность установки интерцептора демонстрируют кривые на фиг. 4. Графики построены для случая гладкого отрыва и представляют собой зависимости ко-



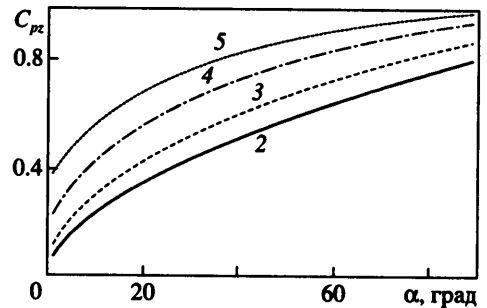
Фиг. 4. Зависимости коэффициента C_y от коэффициента C_x при $\beta = 90^\circ$: 1-5 - $\epsilon' = 0, 0.01, 0.02, 0.05$ и 0.1



Фиг. 5. Зависимости коэффициента C_y от угла атаки α при $\beta = 90^\circ$: 1-5 - $\epsilon' = 0, 0.01, 0.02, 0.05$ и 0.1



Фиг. 6. Зависимости длины застойной зоны l'_z от угла атаки α при $\beta = 90^\circ$: 2-5 - $\epsilon' = 0.01, 0.02, 0.05$ и 0.1



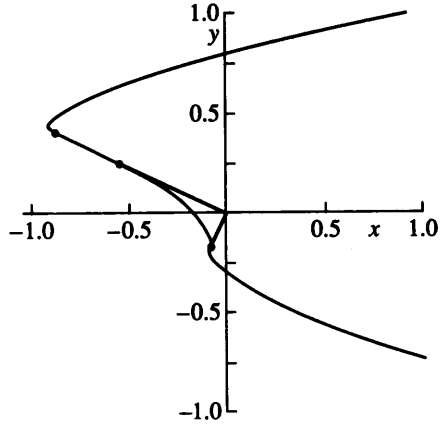
Фиг. 7. Зависимости коэффициента давления C_{pz} от угла атаки α при $\beta = 90^\circ$: 2-5 - $\epsilon' = 0.01, 0.02, 0.05, 0.1$ и $\beta = 90^\circ$

эффицента C_y от коэффициента C_x для различных длин интерцептора $\epsilon' = 0, 0.01, 0.02, 0.05$ и 0.1 при изменении углов атаки от 1° до 89° . Если $\epsilon = 0$, то нормальная к пластине сила R вычисляется по формуле Релея [3]

$$R = \frac{2\pi \sin \alpha}{4 + \pi \sin \alpha}$$

Как видно из графиков, даже интерцептор с относительно небольшой длиной $\epsilon' = 0.02$ создает значительную добавочную подъемную силу по сравнению с пластиной без интерцептора при одной и той же силе сопротивления.

На фиг. 5-7 показаны зависимости коэффициента C_y , длины застойной зоны l'_z и коэффициента давления в застойной зоне C_{pz} от угла атаки α в предположении, что в точке отрыва E выполняется условие (1.6). Зависимости $C_y(\alpha)$ - имеют максимумы, положение которых с увеличением длины интерцептора смещается в сторону меньших углов атаки. Кроме того, наблюдается довольно значительное увеличение подъемной силы с ростом ϵ' . Из фиг. 6 также вытекает, что с уменьшением углов



Фиг. 8. Пример картины течения около пластинки с интерцептором при $\alpha = 25^\circ$, $\varepsilon' = 0.2$, $\beta = 90^\circ$

атаки точка отрыва E смещается к передней кромке пластины B . Пример картины течения для пластины с интерцептором и застойной зоной, у которой начальная точка отрыва удовлетворяет условию (1.6), показан на фиг. 8.

Закключение. Показано, что давление в застойной зоне может быть определено из хорошо известного условия гладкого отрыва (условия Бриллюэна–Вилла). Следует отметить, что в данной задаче это условие определяет точку отрыва не на криволинейном, а на полигональном препятствии, а именно на пластине. Установлено, что если положение точки отрыва находится ближе к передней кромке пластины, чем положение, даваемое условием гладкого отрыва, то свободная поверхность пересечет пластину, и течение теряет физический смысл. Если же точка отрыва находится ближе к задней кромке пластины, чем положение, даваемое условием Бриллюэна–Вилла, то неограниченно возрастающий градиент давления приведет к неизбежному отрыву потока до предполагаемой точки отрыва.

Численно показано, что точка отрыва застойной зоны, определенная по условию Бриллюэна–Вилла, дает экстремумы одновременно и подъемной силы и силы сопротивления. Подобное поведение интегральных гидродинамических характеристик было впервые отмечено Г.Ю. Степановым. Математически строгого объяснения этого факта пока не найдено.

Работа Д.В. Маклакова при получении результатов данной статьи была поддержана РФФИ (№ 05-01-00794 и 03-01-00015).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чаплыгин С.А. К вопросу о струях в несжимаемой жидкости // Тр. отд. физ. наук о-ва любителей естествознания. 1899. Т. 10. № 1. С. 35–40.
2. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М.: Мир, 1964. 466 с.
3. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
4. Илюшкин В.М., Лотфуллин М.В., Маклаков Д.В. Обтекание решетки суперкавитирующих профилей с интерцепторами // Тр. семинара по краевым задачам, Казань, 1985. № 22. С. 95–103.
5. Rozhdestvensky K.V., Fridman G.M. Matched asymptotics for free surface lifting flows with spoilers // Mathematical Approaches in Hydrodynamics. SIAM: Philadelphia, U.S.A., 1991. P. 499–517.

6. *Rozhdestvensky K.V., Fridman G.M.* Supercavitating nonlinear flow problems: matched asymptotics // *Supercavitating Flows*. NATO – RTO Lecture Series 005. 2002. P. 19(1)–19(30).
7. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Г.Н.* Курс современного анализа. Ч. 2. Трансцендентные функции. М.: Физматгиз, 1963. 515 с.
8. *Гогши Л.В., Степанов Г.Ю.* Отрывные и кавитационные течения. М: Наука, 1990. 384 с.
9. *Terentiev A.G., Dimitrieva N.A.* Theoretical investigation of cavitating flows // *Proc. of 3rd Intern. Symp. on Cavitation*. Grenoble, France, 1998. V. 2. P. 275–280.
10. *Маклаков Д.В., Наборова М.В.* Кавитационное обтекание профиля произвольной формы // *Изв. РАН. МЖГ*. 1995. № 5. С. 86–90.
11. *Маклаков Д.В.* Нелинейные задачи гидродинамики потенциальных течений со свободными границами. М.: Янус-К, 1997. 280 с.
12. *Сычев В.В.* О ламинарном отрыве // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1972. № 3. С. 47–59.

Казань
Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
26.VII.2004