

УДК 532.526 : 532.527

© 2005 г. А. М. ГАЙФУЛЛИН

АВТОМОДЕЛЬНОЕ НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотрены четыре примера автомодельного течения вязкой жидкости: отрывное обтекание расширяющейся пластины неограниченным нестационарным потоком вязкой жидкости, эволюция поля скоростей вихреисточника, течение жидкости около нестационарно движущейся плоской проницаемой пластины и около нестационарно вращающегося диска. Для первого примера построено численное решение, для следующих двух – аналитическое решение, решение для последней задачи представлено в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: нестационарность, автомодельность, вязкость, вихрь.

Если линейные размеры меняются пропорционально корню из времени \sqrt{t} ($0 \leq t < \infty$), а значения скорости в соответствующих точках уменьшаются пропорционально $1/\sqrt{t}$, то движение вязкой жидкости будет автомодельным [1]. Для подтверждения этого факта рассмотрим уравнения Навье–Стокса и неразрывности для плоских течений в декартовой системе координат x_1, y_1 . Пусть

$$x_1 = a\sqrt{t}x, \quad y_1 = a\sqrt{t}y$$

$$u_1(x_1, y_1, t) = \frac{au(x, y)}{\sqrt{t}}, \quad v_1(x_1, y_1, t) = \frac{av(x, y)}{\sqrt{t}} \quad (0.1)$$

$$p_1(x_1, y_1, t) = \frac{\rho_1 a^2 p(x, y)}{t}$$

где u_1, v_1 – компоненты скорости вдоль осей x_1, y_1 ; p_1 – давление; ρ_1 – плотность; a – постоянная, определяющая кинематическую размерность задачи; величины без индекса – автомодельные переменные. Уравнения движения приобретают вид

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}u + \left(u - \frac{1}{2}x\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(v - \frac{1}{2}y\right)\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}}\Delta u \\ -\frac{1}{2}v + \left(u - \frac{1}{2}x\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \left(v - \frac{1}{2}y\right)\frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}}\Delta v \end{aligned} \quad (0.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \text{Re} = \frac{a^2}{\nu}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Здесь ν – кинематический коэффициент вязкости. Уравнения (0.2) не зависят явно от времени, что подтверждает предположение об автомодельности течения.

Уравнения, аналогичные (0.2), можно получить и для трехмерного и для одномерного автомодельных течений.

Ниже рассматривается несколько примеров течений, удовлетворяющих соотношениям (0.1).

1. Плоское обтекание расширяющейся пластины неограниченным нестационарным потоком вязкой жидкости. Рассмотрим плоское обтекание расширяющегося по закону (0.1) тела. Граничными условиями для системы уравнений (0.2) будут условия затухания возмущений на бесконечности и прилипания на поверхности тела. Для выполнения второго условия необходимо задать закон деформации поверхности тела.

Будем считать, что соотношения $x_1 = a\sqrt{t}x$, $y_1 = a\sqrt{t}y$ определяют не только изменение геометрии, но и скорость движения точки на поверхности тела: $u_1 = \partial x_1 / \partial t$, $v_1 = \partial y_1 / \partial t$. (Возможно помещение на поверхность тела особенностей типа вихрей и стоков, удовлетворяющих автомодельным условиям и меняющих тангенциальную и нормальную скорость.)

Запишем уравнения (0.2) в переменных завихренность ω и функция тока ψ :

$$\omega - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{1}{2}x \right) \frac{\partial \omega}{\partial x} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2}y \right) \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \omega = 0$$

$$\Delta \psi + \omega = 0 \tag{1.1}$$

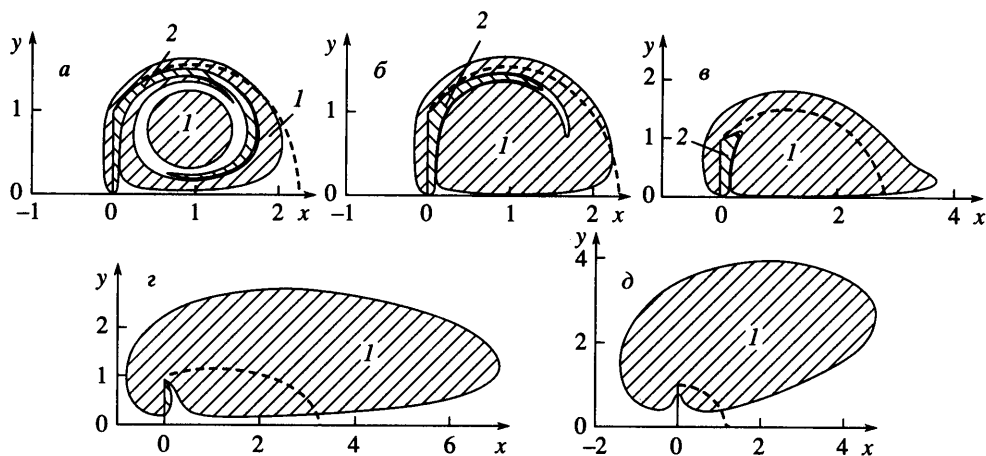
$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

В качестве примера вязкого автомодельного течения рассмотрим обтекание пластины. Координаты пластины в автомодельных переменных $x = 0$, $-1 \leq y \leq 1$. Компоненты скорости на бесконечности u_∞ , v_∞ . В случае отсутствия вязкости завихренность в следе за пластиной сосредоточена в двух дискретных вихрях с постоянной интенсивностью [2]. В начальный момент времени длина пластины равна нулю. Вихри конечной интенсивности появляются из-за особенности в скоростях на кромках пластины в начальный момент времени. Сошедшие в поток два вихря управляют течением таким образом, чтобы препятствовать дальнейшему сходу завихренности с кромок пластины. Расстояние между вихрями и кромками пластины растет пропорционально \sqrt{t} .

Уравнения (1.1) решались численно с помощью замены решения стационарных уравнений на асимптотически устанавливающееся решение нестационарных уравнений. Нули в правой части уравнений (1.1) заменялись соответственно на $\partial \omega / \partial t$ и $\partial \psi / \partial t$.

Ограничимся симметричным случаем, т.е. будем считать, что $v_\infty = 0$. Решение задачи зависит от двух параметров: u_∞ и Re (в обозначениях, принятых в работе [2], $\alpha_0 = 2u_\infty$). На фиг.1 представлена поля завихренности, соответствующие $u_\infty = 5$. Изображена только верхняя половина течения, завихренность в нижней половине течения асимметрична завихренности в верхней половине.

Проведем качественные рассуждения о влиянии вязкости на структуру отрывного образования около пластины в случае $u_\infty = 5$. При достаточно больших числах Re пограничный слой, сходящий с различных берегов кромки пластины, образует слой смешения, который впоследствии наматывается на основную часть вихревого следа. Такая структура вихревого течения хорошо видна на фиг. 1, а. Предельный случай $\text{Re} \rightarrow \infty$ соответствует тому, что суммарный поток завихренности в слое смешения равен нулю. При этом условии основная часть вихревого следа превращается в дискретные вихри постоянной интенсивности. При числах Re , отличных от бесконечности, часть завихренности находится вне области, ограниченной линией $\psi = 0$. Эта часть завихренности со временем уходит вслед за отрывным образованием. Вместе с тем поток



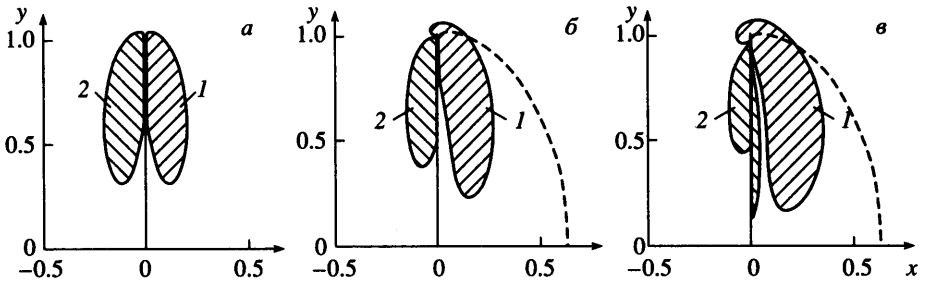
Фиг. 1. Поле завихренности и нулевая функция тока (штриховая линия), $u_\infty = 5$: $Re = 100; 40; 10; 1; 0.2$ (а-д). Верхняя половина течения: 1 – $\omega \leq -1$, 2 – $\omega \geq 1$. Белому цвету соответствует $|\omega| < 1$

завихренности через область, ограниченную снаружи линией $\psi = 0$ и лежащую в верхней полуплоскости (или в нижней), согласно (0.1), должен быть величиной постоянной. Следовательно, суммарный поток завихренности в слое смешения, сходящем с кромки пластины, уже не будет равен нулю. Пограничный слой, сходящий с наветренной части пластины, привносит в поток бóльшую циркуляцию, чем пограничный слой, сходящий с подветренной части пластины. При уменьшении числа Re все большая часть завихренной области уходит вслед за отрывным образованием. Этот факт остается верным и при малых числах Re , когда понятие пограничного слоя теряет свой смысл.

В работе [2] для случая идеальной жидкости было также исследовано поле автомодельных траекторий. При достаточно больших u_∞ течение и на наветренной, и на подветренной частях пластины направлено от центра к кромкам. При уменьшении u_∞ сначала на наветренной ($u_\infty \leq 0.66$), а затем и на подветренной ($u_\infty \leq 0.27$) сторонах появляются критические точки, разделяющие жидкость на текущую от критической точки или к кромке, или к центру пластины. При очень малых $u_\infty \leq 0.15$ критическая точка, которая при больших u_∞ была на наветренной стороне, садится на кромку. При таких малых u_∞ жидкость не сходит с кромки, а, наоборот, натекает на нее. При $u_\infty = 0$ вихри в потоке не образуются.

Если при больших u_∞ характеристики отрывного обтекания пластины в рамках модели вязкой жидкости при числах $Re \geq 10$ и в рамках модели невязкой жидкости близки, то при малых u_∞ различие наблюдается даже при числе $Re = 100$. На наветренной стороне появляется достаточно мощный вихрь, сравнимый по размерам с вихрем на подветренной части пластины. На фиг. 2 представлены поля завихренности, соответствующие $Re = 100$. При $u_\infty = 0.2$ критическая точка находится на наветренной стороне недалеко от кромки пластины, а при $u_\infty = 0.1$ критическая точка садится на кромку.

2. Вихресточник в вязкой жидкости. Вращающийся вокруг своей оси бесконечно тонкий протяженный цилиндр за бесконечное время в вязкой жидкости порождает вокруг себя поле скоростей, соответствующее прямолинейной вихревой нити. Если вдобавок цилиндр является пористым и через его поверхность имеется ненулевой расход



Фиг. 2. Поле завихренности и нулевая функция тока, $Re = 100$: $u_\infty = 0; 0.1; 0.2$ (а–в). Верхняя половина течения: 1 – $\omega \leq -1$, 2 – $\omega \geq 1$. Белому цвету соответствует $|\omega| < 1$

жидкости, то в поперечном сечении цилиндра будет поле скоростей, индуцированное вихреисточником. Радиальная скорость $v_1 = Q/r_1$, окружная скорость $w_1 = \Gamma/r_1$ где r_1 – расстояние от оси течения, $Q \geq 0$ и Γ – некоторые константы. Пусть в момент времени $t = 0$ цилиндр прекращает свое вращение, но по-прежнему сохраняется расход жидкости через его поверхность. Значение радиальной скорости останется равным Q/r_1 , а окружная скорость будет функцией от времени и радиуса. Уравнение для окружной скорости при $t > 0$ имеет вид

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + v_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial r_1} + \frac{w_1}{r_1} \right) = \nu \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial w_1}{\partial r_1} - \frac{w_1}{r_1^2} \right) \quad (2.1)$$

$$w_1(t, 0) = 0, \quad \lim_{r_1 \rightarrow \infty} w_1(t, r_1) = \Gamma/r_1$$

Безразмерной линейной величиной в такого рода диффузионных процессах является $r = r_1/\sqrt{4\nu t}$. Так как начальное значение скоростей обратно пропорционально радиусу, то должно реализовываться автомодельное течение (0.1). При $t > 0$

$$v_1 = \frac{Q}{\sqrt{4\nu t}} \frac{1}{r}, \quad w_1 = \frac{\Gamma}{\sqrt{4\nu t}} w(r)$$

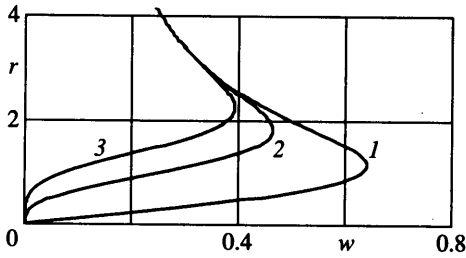
Подставляя последнее представление в уравнение (2.1), получаем

$$w'' + \frac{w'}{r} - \frac{w}{r^2} - \left(\frac{Q}{\nu r^2} - 2 \right) (w'r + w) = 0 \quad (2.2)$$

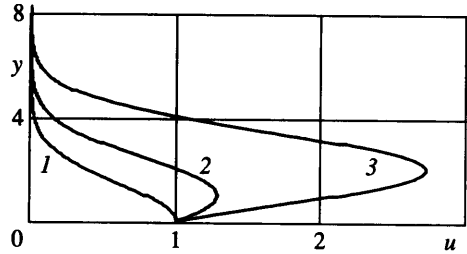
$$w(0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} w(r) = 1/r$$

Решение уравнения (2.2) имеет вид

$$w = \frac{c}{r} \int_0^r r^{1+Q/\nu} e^{-r^2} dr, \quad c^{-1} = \int_0^\infty r^{1+Q/\nu} e^{-r^2} dr$$



Фиг. 3. Безразмерная окружная скорость $w(r)$: $Q/v = 0; 2; 4$ (кривые 1-3)



Фиг. 4. Безразмерная скорость $u(y)$: $\beta/\sqrt{v} = 0; 0.5; 1$ (кривые 1-3)

Для трех значений интенсивности источника зависимость $w(r)$ представлена на фиг. 3

$$Q = 0: w = \frac{1}{r}(1 - e^{-r^2}); \quad \frac{Q}{v} = 2: w = \frac{1}{r}[1 - (1 + r^2)e^{-r^2}]$$

$$\frac{Q}{v} = 4: w = \frac{1}{r}\left[1 - \left(1 + r^2 + \frac{r^4}{2}\right)e^{-r^2}\right]$$

3. Нестационарное движение плоской проницаемой пластины и нестационарное вращение диска в вязкой жидкости. Пусть при $t > 0$ плоская бесконечная пластина начинает двигаться параллельно самой себе со скоростью $u_1 = \alpha/\sqrt{t}$, при этом на проницаемой поверхности пластины задается вертикальная скорость $v_1 = \beta/\sqrt{t}$, где α и β – некоторые константы. Ось x_1 направим вдоль пластины, а ось y_1 – перпендикулярно ей. Будем рассматривать течение в области $y_1 \geq 0$ и ограничимся случаем $\beta \geq 0$. Значения компонент скорости при $t > 0$ не зависят от x_1 , следовательно, уравнение Навье–Стокса примет вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\beta}{\sqrt{t}} \frac{\partial u_1}{\partial y_1} = \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2}; \quad u_1(t, 0) = \frac{\alpha}{\sqrt{t}}, \quad u_1(t, \infty) = 0 \tag{3.1}$$

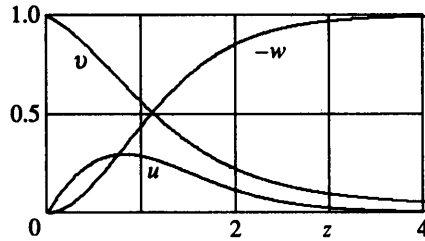
Введем функцию $u(y) = u_1(t, y_1)\sqrt{t}/\alpha$, где $y_1 = y\sqrt{t}$. В новых переменных уравнение (3.1) преобразуется в следующее

$$u'' + u' \left(\frac{y}{2} - \frac{\beta}{\sqrt{\nu}} \right) + \frac{u}{2} = 0, \quad u(0) = 1, \quad u(\infty) = 0$$

Решение последнего уравнения

$$u = \exp\left(-\frac{y^2}{4} + y \frac{\beta}{\sqrt{\nu}}\right)$$

На фиг. 4 представлена зависимость $u(y)$ при трех значениях интенсивности выдува.



Фиг. 5. Безразмерные скорости $u(z)$, $v(z)$, $-w(z)$

Пусть при $t > 0$ плоский бесконечный диск начинает вращаться вокруг оси, перпендикулярной его плоскости, с угловой скоростью ω/t , где ω – некоторая константа. Ось z_1 направим вдоль оси вращения, r_1 – расстояние до оси вращения, u_1 , v_1 , w_1 – радиальная, окружная и осевая компоненты скорости, диск лежит в плоскости $z_1 = 0$. Аналогично случаю установившегося вращения диска с постоянной угловой скоростью [3] представим решение в виде

$$u_1(z_1, r_1) = \sqrt{\frac{v}{t}} r u(z), \quad v_1(z_1, r_1) = \sqrt{\frac{v}{t}} r v(z)$$

$$w_1(z_1, r_1) = \sqrt{\frac{v}{t}} w(z), \quad p_1(z_1, r_1) = \frac{\rho_1 v}{t} p(z) \quad (3.2)$$

$$z_1 = \sqrt{v} t z, \quad r_1 = \sqrt{v} t r$$

Подставляя (3.2) в уравнения Навье–Стокса и неразрывности, получаем

$$u'' = -u - \frac{1}{2} u' z + u^2 + w u' - v^2, \quad v'' = -v - \frac{1}{2} v' z + 2u v + w v'$$

$$w'' = -\frac{1}{2} w - \frac{1}{2} w' z + w w' + p', \quad w' + 2u = 0 \quad (3.3)$$

Граничные условия:

$$u(0) = w(0) = 0, \quad v(0) = \omega, \quad u(\infty) = v(\infty) = 0 \quad (3.4)$$

Численное решение уравнений (3.3) с граничными условиями (3.4) при $\omega = 1$ представлено на фиг. 5. Так же, как и в случае стационарного вращения [3], действие диска на окружающую жидкость подобно вентилятору: радиальная и окружная компоненты скорости довольно быстро затухают с ростом z , а осевая компонента скорости стремится к не зависящей от z величине. В отличие же от стационарного случая величина осевого потока уменьшается с течением времени.

Заключение. Представлены решения четырех задач об автомодельном нестационарном течении вязкой жидкости. Характерная особенность таких течений: поток завихренности через любую область, неизменную в автомодельных переменных, есть величина не зависящая от времени.

Задача об отрывном обтекании расширяющейся пластины, установленной либо под прямым, либо под нулевым углом к набегающему потоку, решена численно. Характеристики и топология течения зависят от отношения скорости набегающего потока к скорости расширения пластины и от числа Рейнольдса.

Решения задач об эволюции вихреисточника, о нестационарном движении плоской проницаемой пластины и о нестационарно вращающемся диске зависят от одного параметра. Для первых двух задач этот параметр пропорционален расходу жидкости через твердые поверхности, а для последней задачи пропорционален угловой скорости вращения диска.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 04-01-00765).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биркгоф Г. Гидродинамика. Методы. Факты. Подобие. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 244 с.
2. Никольский А.А., Бетяев С.К., Мальшев И.П. О предельной форме отрывного автомодельного течения идеальной жидкости // Проблемы прикладной математики и механики. К 60-летию академика А.А. Дородницына. М.: Наука, 1971. С. 262–268.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.XII.2004