

УДК 532.582.2

© 2005 г. М. В. НОРКИН

## МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО УДАРА В ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

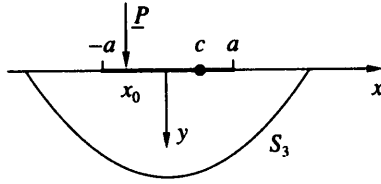
Исследована плоская задача об отрывном ударе пластины, плавающей на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, наполняющей ограниченный бассейн. Особенность данной задачи заключается в том, что область контакта тела с жидкостью заранее неизвестна и подлежит определению вместе с течением жидкости. Вследствие этого поставленная задача – нелинейна и относится к классу задач со свободной границей. Изучено влияние стенок бассейна различной формы на образующуюся на поверхности пластины зону отрыва частиц жидкости. В качестве примеров рассмотрены задачи для слоя и усеченной круговой луночки.

*Ключевые слова:* идеальная жидкость, удар, плавающее тело, ограниченный бассейн, зона отрыва, асимптотика.

Задача об ударе с отрывом была поставлена Л.И. Седовым в монографии [1]. С помощью изложенных в ней методов в ряде конкретных случаев были получены аналитические решения [1–4]. Численный анализ плоской задачи об отрывном ударе плавающих тел проведен в [5]. Во всех указанных работах жидкость предполагалась идеальной, несжимаемой, однородной и неограниченной. Общая теория удара в неоднородной жидкости была построена в [6].

В работах [7, 8] был предложен эффективный асимптотический метод, направленный на решение линейных задач гидродинамического удара в ограниченных областях. В его основе лежит предположение о том, что дно и стенки бассейна удалены от плавающего тела на большие расстояния. Настоящая статья – продолжение перечисленных выше работ и посвящена изучению нелинейных задач гидродинамического удара в ограниченных областях. По существу в ней предложены два принципиально различных подхода к решению задачи об отрывном ударе пластины. Это, во-первых, прямой асимптотический метод, основанный на предположении о том, что стенки бассейна удалены от плавающего тела на большие расстояния и, во-вторых, метод, базирующийся на использовании техники конформных отображений с последующим применением математического аппарата парных интегральных уравнений. Во втором подходе для определения неизвестной области контакта впервые в смешанных задачах гидродинамического удара применяется вариационный принцип Огазо [9]. В качестве конкретных примеров изучены случаи, когда область, занятая жидкостью, представляет собой слой и усеченную круговую луночку. Ранее линейная задача о центральном ударе пластины, плавающей на поверхности жидкости конечной глубины, была решена М.В. Келдышем [10]. Другое решение этой задачи дано в монографии [11]. При построении точных решений ряда нелинейных задач (разд. 4–5) используются методы и приемы, развитые в монографии [11]. Полученные результаты подтверждают справедливость предложенного асимптотического метода.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается плоская задача о вертикальном ударе пластины, плавающей на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, наполняющей ограниченный бассейн произвольной формы. Предполагается, что в момент удара происходит отрыв частиц жидкости от поверхности пластины (удар с отрывом). Пусть



Фиг. 1. Постановка задачи

до удара плавающее тело и жидкость покоятся. Тогда движение жидкости после удара потенциальное, причем потенциал скоростей  $\Phi$ , приобретенных частицами жидкости в результате удара, определяется решением смешанной краевой задачи теории потенциала с неизвестной априори областью контакта [1, 6]

$$\Delta \Phi = 0, \quad r \in D \tag{1.1}$$

$$\Phi \leq 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = V_n, \quad r \in S_{11} \tag{1.2}$$

$$\Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} \geq V_n, \quad r \in S_{12} \tag{1.3}$$

$$\Phi = 0, \quad r \in S_2, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, \quad r \in S_3 \tag{1.4}$$

Здесь  $D$  – область, занятая жидкостью;  $V_n = v_0 - \omega x$ , где  $v_0$  и  $\omega$  ( $\omega > 0$ ) – поступательная и угловая скорости, приобретенные пластиной в результате удара;  $r = (x, y)$ ;  $S_1 = S_{11} \cup S_{12}$  – поверхность пластины, причем  $S_{11} = \{y = 0, -a < x < c\}$  – часть поверхности, на которой не происходит отрыва частиц жидкости, а  $S_{12} = \{y = 0, c < x < a\}$  – зона отрыва;  $S_2$  – свободная поверхность жидкости;  $S_3$  – неподвижная твердая граница бассейна. Декартовы координаты  $x, y$  введены таким образом, что ось  $x$  расположена вдоль линии свободной поверхности, ось  $y$  направлена вертикально вниз, начало координат находится в центре пластины (см. фиг. 1). Импульсивное давление  $p_t$  связано с потенциалом скоростей  $\Phi$  соотношением  $p_t = -\rho\Phi$  ( $\rho$  – плотность жидкости). В случае неограниченной жидкости добавляется условие затухания возмущений от удара на бесконечности:  $\Phi \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$ .

Кроме перечисленных условий нужно еще поставить условие регулярности вблизи точек раздела свободной границы с твердыми поверхностями, где граница области  $D$  теряет гладкость. Если особые точки имеются на границе  $S_3$ , то в них также ставится условие регулярности. Достаточным условием является требование конечности кинетической энергии [6]:

$$\int_D (\nabla \Phi)^2 dD < \infty$$

Считаем, что граница  $S_3$  получена в результате гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом  $h$  некоторой фиксированной поверхности  $S_3^0: S_3 = hS_3^0$  ( $x = hx^0, y = hy^0$ ).

В дальнейшем используем обозначения:  $D^0$  – внутренняя область с границами  $y = 0$  и  $S_3^0$ ;  $G$  – полуплоскость  $y > 0$ ;  $\Phi_1$  и  $c_\infty$  – потенциал скоростей и точка отрыва в случае  $h = \infty$ .

Наряду с классической постановкой задачи (1.1)–(1.4) будет использована ее неклассическая постановка, в которой граничные условия (1.2), (1.3) заменены эквивалентной системой неравенств [9]:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} - V_n \geq 0, \quad \Phi \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} - V_n \right) = 0, \quad \Phi \leq 0 \quad (1.5)$$

Преимущество такой постановки состоит в том, что в ней явно не присутствует неизвестная априори точка отрыва, она определяется после решения задачи как нижняя граница следующего множества:  $\{c : \Phi = 0, y = 0, c < x < a\}$ . Это обстоятельство удобно использовать при построении асимптотики для больших значений  $h$ , так как при постановке задач, ликвидирующих невязки на поверхности пластины, отпадает необходимость каждый раз определять неизвестную точку отрыва. Теперь соответствующие нелинейные граничные условия ставятся на всей поверхности пластины. Отметим, что при построении точных решений ряда задач с неизвестной областью контакта в полуплоскости лучше использовать классическую постановку задачи.

Теорема существования и единственности решения задачи об ударе с отрывом доказана в [6].

Для полной постановки задачи необходимо также учесть уравнения изменения импульса и момента импульса пластины при ударе. С их помощью устанавливается связь между внешним ударным импульсом и точкой его приложения, с одной стороны, и поступательной и угловой скоростями, приобретенными пластиной в результате удара, с другой. Покомпонентная запись этих уравнений в случае однородной пластины приводит к следующим соотношениям:

$$P_x = 0, \quad m v_0 = I + P_y, \quad \gamma \omega = M - x_0 P_y \quad (1.6)$$

$$I = \rho \int_{S_1} \Phi ds \quad M = -\rho \int_{S_1} x \Phi ds \quad (1.7)$$

Здесь  $m$  и  $\gamma$  – масса и момент инерции пластины,  $I$  и  $M$  – полный ударный импульс и его момент относительно начала координат, действующие на пластину во время удара;  $(P_x, P_y)$  – компоненты внешнего ударного импульса, приложенного к пластине в точке  $(x_0, 0)$ . В дальнейшем массой и моментом инерции пластины будем пренебрегать. Тогда координата точки приложения импульса находится по формуле:  $x_0 = -M/I$ .

**2. Случай неограниченной жидкости.** Вначале найдем решение задачи об отрывном ударе пластины, плавающей на поверхности неограниченной жидкости (случай  $h = \infty$ ). Для этого перенесем начало координат в середину отрезка  $[-a, c]$  и при любом фиксированном  $c \in (-a, a)$  построим решение смешанной краевой задачи в полуплоскости, когда на ее границе  $y = 0$  имеется отрезок, разделяющий краевые условия первого и второго рода. Решение данной линейной задачи находится методом разделения переменных в декартовых координатах с последующим применением математического аппарата парных интегральных уравнений. При этом можно использовать либо разрывные интегралы Вебера, связанные с функциями Бесселя, либо разрывные интегралы Мелера, связанные с функциями Лежандра. Отметим, что точное решение линейной задачи для жидкости конечной глубины удастся получить только с помощью разрывных интегралов Мелера (разд. 4). После построения решения линейной задачи точка отрыва  $c_\infty$  определяется из двух условий в виде неравенств. Приведем окончательные выражения для точки отрыва  $c_\infty$  и потенциала скоростей  $\Phi_1$  на поверхности пластины:

$$c_\infty = \frac{a}{3} + \frac{4v_0}{3\omega}, \quad \Phi_1(x, 0) = -\frac{\omega}{2} \sqrt{a+x}(c_\infty-x)^{3/2}, \quad -a < x < c_\infty \quad (2.1)$$

Определяя нормальную компоненту скорости на поверхности пластины, можно показать, что она непрерывна всюду на  $(-a, a)$ .

Используя формулы (1.6), (1.7), (2.1), найдем связь между точкой приложения импульса  $x_0$  и точкой отрыва  $c_\infty$  в случае неограниченной жидкости:

$$x_0 = -1/8(5a - 3c_\infty), \quad c_\infty = 1/3(5a + 8x_0) \quad (2.2)$$

Условие отрыва пластины записывается в виде:  $-a \leq x_0 < -a/4$ .

**3. Построение асимптотики для больших значений  $h$ .** Как и при решении линейных задач [7, 8], основная идея, лежащая в основе предлагаемого метода, состоит в сведении решения исходной задачи для области сложной геометрической конфигурации к последовательному решению задач в областях, имеющих более простые формы границ. Такой подход позволяет построить асимптотику потенциала скорости в любой фиксированной (не зависящей от  $h$ ) окрестности пластины и на ее основе определить основные гидромеханические характеристики удара. Перейдем к подробному изложению метода.

Потенциал скоростей  $\Phi$ , определяемый формулами (1.1), (1.4), (1.5), будем искать в виде ряда

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \dots \quad (3.1)$$

В качестве первого приближения  $\Phi_1$  используем решение задачи об отрывном ударе пластины, плавающей на поверхности неограниченной жидкости (случай  $h = \infty$ ). Считаем, что в результате удара пластина приобретает те же самые поступательную и угловую скорости, что и в случае ограниченной области. Для функции  $\Phi_1$  на больших расстояниях от пластины справедливо разложение в гармонический ряд

$$\Phi_1 = -\frac{c_1 y}{\pi(x^2 + y^2)} - \frac{2c_2 xy}{\pi(x^2 + y^2)^2} - \frac{c_3(3x^2 y - y^3)}{\pi(x^2 + y^2)^3} - \dots \quad (3.2)$$

$$c_1 = \frac{\omega\pi(a + c_\infty)^3}{4}, \quad c_2 = -\frac{\omega\pi(5a - 3c_\infty)(a + c_\infty)^3}{32} \quad (3.3)$$

$$c_3 = \frac{\omega\pi(7a^2 - 6ac_\infty + 3c_\infty^2)(a + c_\infty)^3}{64}$$

Чтобы ликвидировать невязки, создаваемые потенциалом  $\Phi_1$  на неподвижной границе  $S_3$ , рассмотрим задачу в ограниченном бассейне при отсутствии пластины

$$\Delta\Phi_2 = 0, \quad r \in D, \quad (\Phi_2)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial n}\right)_{S_3} = \frac{c_1}{\pi}Q_1 + \frac{2c_2}{\pi}Q_2 + \frac{c_3}{\pi}Q_3 \quad (3.4)$$

$$Q_1 = \frac{\partial}{\partial n} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q_2 = \frac{\partial}{\partial n} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad Q_3 = \frac{\partial}{\partial n} \frac{3x^2 y - y^3}{(x^2 + y^2)^3}$$

Здесь можно ограничиться первыми тремя членами ряда (3.2). Остальные члены дают вклад в асимптотику потенциала  $\Phi$  на  $S_1$  порядка  $O(h^{-5})$  при  $h \rightarrow \infty$ .

Производя в (3.4) замену переменных:  $x \rightarrow hx$ ,  $y \rightarrow hy$ , представим функцию  $f = f(x, y) = \Phi_2(hx, hy)$  в виде

$$f = \frac{c_1}{\pi}f_1 h^{-1} + \frac{2c_2}{\pi}f_2 h^{-2} + \frac{c_3}{\pi}f_3 h^{-3} \quad (3.5)$$

где функции  $f_i = f_i(x, y)$  определяются решениями следующих краевых задач в фиксированной области  $D^0$

$$\Delta f_i = 0, \quad (f_i)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial n}\right)_{S_3^0} = (Q_i)_{S_3^0}, \quad i = 1-3 \quad (3.6)$$

После обратной замены переменных в (3.5):  $x \rightarrow \varepsilon x, y \rightarrow \varepsilon y, \varepsilon = h^{-1}$ , функции  $f_i(\varepsilon x, \varepsilon y)$  раскладываются по формуле Тейлора с центром в точке  $\varepsilon = 0$  ( $h = \infty$ )

$$f_i(\varepsilon x, \varepsilon y) = -\xi_i y \varepsilon + \eta_i x y \varepsilon^2 + \frac{\mu_i}{6} (3x^2 y - y^3) \varepsilon^3 + \dots, \quad i = 1-3$$

$$\xi_i = -f_{iy}, \quad \eta_i = f_{ixy}, \quad \mu_i = f_{ixxy} = -f_{iyyy}, \quad i = 1, 2, 3$$

где частные производные вычисляются в точке  $M_0 = (0, 0)$ . В результате приходим к асимптотике потенциала  $\Phi_2$ , справедливой в любой фиксированной (не зависящей от  $h$ ) окрестности пластины

$$\begin{aligned} \Phi_2(x, y) = & \\ = & -\frac{c_1 \xi_1}{\pi} y h^{-2} - \left[ \frac{2c_2 \xi_2}{\pi} y - \frac{c_1 \eta_1}{\pi} xy \right] h^{-3} - \left[ \frac{c_3 \xi_3}{\pi} y - \frac{2c_2 \eta_2}{\pi} xy - \frac{c_1 \mu_1}{6\pi} (3x^2 y - y^3) \right] h^{-4} + \dots \end{aligned}$$

Теперь нужно устранить невязки, создаваемые потенциалом  $\Phi_2$  на поверхности пластины. Соответствующая задача формулируется для функции  $u = \Phi_1 + \Phi_3$

$$\Delta u = 0, \quad r \in G, \quad (u)_{S_2} = 0, \quad (u)_{\infty} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - g \geq 0, \quad u\left(\frac{\partial u}{\partial y} - g\right) = 0, \quad u \leq 0, \quad y = 0, \quad |x| < a$$

$$g = g(x) = v_1 - \omega_1 x - kx^2 \quad (3.7)$$

$$v_1 = v_0 + \frac{c_1 \xi_1}{\pi} h^{-2} + \frac{2c_2 \xi_2}{\pi} h^{-3} + \frac{c_3 \xi_3}{\pi} h^{-4}, \quad \omega_1 = \omega + \frac{c_1 \eta_1}{\pi} h^{-3} + \frac{2c_2 \eta_2}{\pi} h^{-4},$$

$$k = \frac{c_1 \mu_1}{2\pi} h^{-4}$$

Функция  $u$  на поверхности пластины и отвечающая ей точка  $c_u = \min_c \{c : u(x, 0) = 0, c < x < a\}$  являются вторыми приближениями к потенциалу скоростей  $\Phi$  на  $S_1$  и точке отрыва  $c$  соответственно; в качестве первых приближений взяты  $\Phi_1$  и  $c_{\infty}$ .

Задача (3.7) с квадратичной функцией  $g$  решается аналогично задаче для  $\Phi_1$ . Вначале для любого фиксированного  $c$  из отрезка  $[-a, a]$  строится решение смешанной краевой задачи в полуплоскости, когда на ее границе  $y = 0$  имеется отрезок, разделяющий краевые условия первого и второго рода. После этого точка  $c_u$  определяется из двух условий в виде неравенств. Приведем окончательные выражения для точки  $c_u$  и функции  $u$  на поверхности пластины

$$c_u = \left(\frac{4v_1}{3\omega_1} + \frac{a}{3}\right) - \frac{4k}{27\omega_1} \left[10\left(\frac{v_1}{\omega_1}\right)^2 + 2\left(\frac{v_1}{\omega_1}\right)a + a^2\right] + O(k^2), \quad k \rightarrow 0$$

$$u(x, 0) = -\sqrt{(a+x)(c_u-x)} \left[ \left( v_1 + \omega_1 \frac{a-c_u}{4} - \frac{k}{24} (3a^2 - 2ac_u + 3c_u^2) - \right. \right. \quad (3.8)$$

$$\left. - \frac{1}{2} \omega_1 x + k \frac{a-c_u}{62} x - \frac{1}{3} k x^2 \right]$$

Полученные приближенные решения требуют уточнения, так как следующие приближения к потенциалу скоростей  $\Phi$  на  $S_1$  и точке отрыва  $c$  также содержат члены порядка  $h^{-4}$ . Следовательно, процесс построения последовательных приближений необходимо продолжить и вновь рассмотреть краевые задачи в областях  $D$  и  $G$ . Находя асимптотику потенциала  $\Phi_3 = u - \Phi_1$  на большом удалении от пластины:

$$\Phi_3 = -\frac{h^{-2}c_4y}{\pi(x^2 + y^2)} - \dots, \quad c_4 = 8^{-1}(a+c)^2c_1\xi_1$$

поставим задачу для ликвидации невязок, создаваемых функцией  $\Phi_3$  на неподвижной границе  $S_3$  (задача для потенциала  $\Phi_4$ ). Асимптотика функции  $\Phi_4$  в окрестности пластины строится аналогично асимптотике потенциала  $\Phi_2$ :

$$\Phi_4 = -\pi^{-1}c_4\xi_1yh^{-4} - \dots$$

После этого устраняются невязки, создаваемые функцией  $\Phi_4$  на поверхности пластины. Задача, ликвидирующая невязки на  $S_1$ , имеет вид (3.7), где функции  $u$  и  $g$  заменены соответственно на  $v = \Phi_1 + \Phi_3 + \Phi_5$  и  $g_1 = g + (c_4\xi_1/\pi)h^{-4}$ . В результате уточненные точка  $c_u$  и функция  $u$  на  $S_1$  определяются по формулам (3.8), в которых в выражение для  $v_1$  добавлен член  $(c_4\xi_1/\pi)h^{-4}$ . Таким образом находится третье приближение к решению исходной задачи. Следующие приближения уже добавляют члены более высокого порядка малости, чем  $h^{-4}$ .

После ряда элементарных преобразований получим для точки отрыва  $c$  асимптотическую формулу

$$\begin{aligned} c &= c_\infty + \frac{1}{3}\left(\frac{a+c_\infty}{2}\right)^3 [\xi_1h^{-2} - ph^{-3} + qh^{-4}] + O(h^{-5}), \quad h \rightarrow \infty \\ p &= 1/4[(5a - 3c_\infty)\xi_2 + (3c_\infty - a)\eta_1], \\ 16q &= (7a^2 - 6ac_\infty + 3c_\infty^2)\xi_3 + 2(a+c_\infty)^2\xi_1^2 + (3c_\infty - a)(5a - 3c_\infty)\eta_2 - \\ &- (a^2 - 2ac_\infty + 5c_\infty^2)\mu_1 \end{aligned} \tag{3.9}$$

где  $c_\infty$  связана со скоростями  $v_0$  и  $\omega$  соотношением (2.1).

Для упрощения технической работы дальнейшие рассуждения проведем в предположении, что область  $D$  симметрична относительно оси  $y$ . В этом случае  $\xi_2 = 0, \eta_1 = 0$  и, следовательно,  $p = 0$ . Асимптотики импульса  $I$ , его момента  $M$  и точки приложения импульса  $x_0$  принимают вид

$$I = -\rho\omega_1\frac{\pi}{4}\left(\frac{a+c}{2}\right)^3 \left[1 + \frac{\mu_1}{256}(a+c)^3(5c-3a)h^{-4}\right] + O(h^{-5}), \quad h \rightarrow \infty \tag{3.10}$$

$$M = -\rho\omega_1\frac{\pi}{32}\left(\frac{a+c}{2}\right)^3 \left[5a-3c - \frac{\mu_1}{16}(a-c)^2(a+c)^3h^{-4}\right] + O(h^{-5}), \quad h \rightarrow \infty \tag{3.11}$$

$$x_0 = -\frac{5a-3c}{8} + \frac{\mu_1}{2048}(a+c)^5h^{-4} + O(h^{-5}), \quad h \rightarrow \infty \tag{3.12}$$

Более подробные асимптотические формулы для величин  $I, M$  и  $x_0$  получаются путем подстановки в (3.10)–(3.12) выражений для  $\omega_1$  и  $c$  и последующих перераспределений в ряды по степеням  $h^{-1}$ . Коэффициенты полученных таким образом асимптотик выражаются через скорости  $v_0$  и  $\omega$ , которые предполагаются независимыми от  $h$ .

При построении асимптотики для больших значений  $h$  известными величинами считались скорости  $v_0$  и  $\omega$ , приобретенные пластиной в результате удара. Рассмотрим теперь другую постановку задачи, когда заданными и не зависящими от  $h$  являются величина  $P_y$  импульса внешней ударной силы и координата  $x_0$  точки его приложения. При этом скорости  $v_0$  и  $\omega$ , приобретенные пластинкой в результате удара, находятся из системы нелинейных уравнений (1.6). Важно отметить, что точка отрыва  $c$  зависит только от точки приложения импульса  $x_0$ . Для ее определения возникает нелинейное уравнение, которое при больших  $h$  имеет вид (3.12). Фиксируя  $x_0$  и решая это уравнение асимптотически относительно  $c$ , будем иметь

$$c = c_\infty - \frac{\mu_1}{768}(a + c_\infty)^5 h^{-4} + O(h^{-5}), \quad h \rightarrow \infty \quad (3.13)$$

где  $c_\infty$  связана с  $x_0$  соотношением (2.2).

Последняя формула позволяет по заданной точке приложения импульса  $x_0$  определить точку отрыва  $c$  в случае ограниченной области.

Формула (3.13) также может быть получена в результате применения прямого асимптотического метода к рассматриваемой задаче (когда заданными являются величины  $P_y$  и  $x_0$ ). Для этого требуется небольшая модификация описанного выше алгоритма.

Асимптотическая формула (3.13) содержит одну неизвестную постоянную  $\mu_1$ , зависящую только от формы границы бассейна. Наибольший интерес представляет определение знака величины  $\mu_1$ , по которому можно судить об увеличении ( $\mu_1 > 0$ ) или, наоборот, уменьшении ( $\mu_1 < 0$ ) области отрыва по сравнению со случаем неограниченной жидкости. Уже на простых примерах выясняется, что стенки бассейна различной формы оказывают неоднозначное влияние на образующуюся на поверхности пластины зону отрыва частиц жидкости. Так, например, для горизонтального слоя  $\mu_1 = 7\pi^4/(960b^4) > 0$ , а для вертикального  $\mu_1 = -\pi^4/(120b^4) < 0$ . Здесь  $b$  – характерный размер области  $D^0$ . В первом примере это глубина фиксированного слоя, а во втором – половина расстояния между вертикальными стенками.

**4. Отрывной удар пластины в случае жидкости конечной глубины.** Укажем другой метод решения задачи об отрывном ударе пластины, плавающей на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины. Математическая постановка данной задачи имеет вид:

$$\Delta\Phi = 0; \quad \Phi = 0 \quad y = 0, \quad |x| > a; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0 \quad y = H; \quad \Phi \rightarrow 0 \quad |x| \rightarrow \infty$$

$$\Phi \leq 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = v_0 - \omega x \quad y = 0, \quad -a < x < c$$

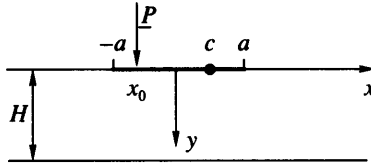
$$\Phi = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} \geq v_0 - \omega x \quad y = 0, \quad c < x < a$$

Здесь  $c$  – точка отрыва, отделяющая на пластине область безотрывного удара от зоны отрыва (см. фиг. 2).

Переносим начало координат в середину отрезка  $[-a; c]$  и делаем растяжение координат:  $x \rightarrow (H/\pi)x - (a-c)/2$ ;  $y \rightarrow (H/\pi)y$ , получим для определения новой функции  $u(x, y) = \Phi((H/\pi)x - (a-c)/2, (H/\pi)y)$  следующую задачу:

$$\Delta u = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad y = \pi; \quad u \rightarrow 0 \quad |x| \rightarrow \infty \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{H}{\pi} \left( v_0 + \omega \frac{a-c}{2} \right) - \omega \left( \frac{H}{\pi} \right)^2 x \quad y = 0, \quad |x| < b \quad (4.2)$$



Фиг. 2. Удар пластинки в случае жидкости конечной глубины

$$u = 0 \quad y = 0, \quad |x| > b \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \geq \frac{H}{\pi} \left( v_0 + \omega \frac{a-c}{2} \right) - \omega \left( \frac{H}{\pi} \right)^2 x \quad y = 0, \quad b < x < b_1 \tag{4.4}$$

$$u \leq 0 \quad y = 0, \quad |x| < b \tag{4.5}$$

$$b = \frac{a + c\pi}{2H}; \quad b_1 = \frac{3a - c\pi}{2H}$$

Для построения решения последней задачи вначале найдем решение смешанной краевой задачи (4.1)–(4.3) при любом фиксированном  $c \in (-a, a)$ . После этого точка отрыва  $c$  определяется при помощи вариационного принципа Огазо [9], из которого автоматически следует выполнение условий (4.4)–(4.5).

Решение задачи (4.1)–(4.3) представляется в виде

$$u(x, y, c) = \frac{H}{\pi} \left( v_0 + \omega \frac{a-c}{2} \right) u_1(x, y, c) + \omega \left( \frac{H}{\pi} \right)^2 u_2(x, y, c) \tag{4.6}$$

$$u_k(x, y, c) = (-1)^{k-1} \left( \frac{d}{dx} \right)^{k-1} \int_0^\infty A_k(\lambda) \frac{\text{ch}(\pi - y)\lambda}{\text{ch}\pi\lambda} \cos\lambda x d\lambda \tag{4.7}$$

где функции  $A_1(\lambda)$  и  $A_2(\lambda)$  удовлетворяют следующим системам парных интегральных уравнений ( $k = 1, 2$ ):

$$\left( \frac{d}{dx} \right)^{k-1} \int_0^\infty \lambda \text{th}\pi\lambda A_k(\lambda) \cos\lambda x d\lambda = f_k(x), \quad 0 < x < b \tag{4.8}$$

$$\left( \frac{d}{dx} \right)^{k-1} \int_0^\infty A_k(\lambda) \cos\lambda x d\lambda = 0, \quad b < x < \infty \tag{4.9}$$

Здесь  $f_1(x) = -1, f_2(x) = -x$ ; через  $(d/dx)^{k-1}, k = 1, 2$  обозначены производные нулевого и первого порядков соответственно.

Решение парных интегральных уравнений (4.8)–(4.9) основано на использовании разрывных интегралов Мелера [12]

$$\int_0^\infty P_{-1/2+it}(\text{ch}\alpha) \cos t\tau d\tau = \begin{cases} (2\text{ch}\alpha - 2\text{cht})^{-1/2} & t < \alpha \\ 0 & t > \alpha \end{cases} \tag{4.10}$$

$$\int_0^\infty \text{th}\pi\tau P_{-1/2+it}(\text{ch}\alpha) \sin t\tau d\tau = \begin{cases} 0 & t < \alpha \\ (2\text{cht} - 2\text{ch}\alpha)^{-1/2} & t > \alpha \end{cases} \tag{4.11}$$

где  $P_{-1/2+it}(\text{ch}\alpha)$  – функция Лежандра с комплексным значком.



В соответствии с (4.10)–(4.11) функции  $A_i(\lambda)$ ,  $i = 1-2$  будем искать в виде

$$A_i(\lambda) = \int_0^b \varphi_i(s) P_{-1/2+i\lambda}(\operatorname{ch}s) ds \quad (4.12)$$

Тогда на основании (4.10) уравнения (4.9) будут выполнены тождественно для любых функций  $\varphi_i(s)$ . Подставляя далее функции (4.12) в уравнения (4.8), приходим для определения неизвестных функций  $\varphi_i(s)$  к интегральным уравнениям типа Абеля ( $0 < x < b$ ,  $i = 1-2$ )

$$\int_0^x \frac{\varphi_i(s) ds}{\sqrt{2\operatorname{ch}x - 2\operatorname{ch}s}} = g_i(x), \quad g_1(x) = -x, \quad g_2(x) = -\frac{x^3}{6} + c_1 x \quad (4.13)$$

где постоянная  $c_1$  определяется ниже из условия ограниченности решения задачи в окрестности точки раздела граничных условий.

Решения уравнений (4.13) имеют вид ( $0 < s < b$ )

$$\varphi_i(s) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{ds} \int_0^s \frac{g_i(x) \operatorname{sh}x dx}{\sqrt{2\operatorname{ch}s - 2\operatorname{ch}x}}$$

Используя формулы (4.6), (4.10)–(4.13), найдем явные выражения для функций  $u_1$  и  $u_2$  при  $y = 0$ ,  $|x| < b$

$$u_1(x, 0, c) = -\frac{2}{\pi} \int_x^b \frac{\operatorname{sh}s ds}{\sqrt{2\operatorname{ch}s - 2\operatorname{ch}x}} \int_0^s \frac{dt}{\sqrt{2\operatorname{ch}s - 2\operatorname{ch}t}} \quad (4.14)$$

$$u_2(x, 0, c) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{\operatorname{sh}s ds}{\sqrt{2\operatorname{ch}s - 2\operatorname{ch}x}} \int_0^s \frac{(-t^2/2 + c_1) dt}{\sqrt{2\operatorname{ch}s - 2\operatorname{ch}t}} \quad (4.15)$$

Проведя во внешнем интеграле (4.15) интегрирование по частям, видим, что для выполнения условия ограниченности функции  $u_2$  в окрестности точки  $x = b$  нужно потребовать, чтобы коэффициент при растущем внеинтегральном члене обратился в ноль. В результате получим условие для определения постоянной  $c_1$

$$\int_0^b \frac{(-t^2/2 + c_1) dt}{\sqrt{2\operatorname{ch}b - 2\operatorname{ch}t}} = 0 \quad (4.16)$$

Таким образом, решение задачи (4.1)–(4.3) при  $y = 0$ ,  $|x| < b$  для любого фиксированного  $c \in (-a, a)$  находится по формулам (4.6), (4.14)–(4.16). Чтобы определить то единственное значение постоянной  $c$ , которое отвечает решению задачи об ударе с отрывом, воспользуемся следующим вариационным принципом. Рассмотрим функцию  $F$ :  $c \rightarrow \Phi(x_0, y_0, c)$ , которая каждому значению  $c \in (-a, a)$  ставит в соответствие значение функции

$$\Phi(x_0, y_0, c) = u\left(\frac{\pi}{H}x_0 + \frac{a-c}{2} \frac{\pi}{H}, \frac{\pi}{h}y_0, c\right)$$

в любой фиксированной точке  $M(x_0, y_0) \in D$ . Согласно [9] экстремальное значение эта функция достигает как раз на точке отрыва. Следовательно, для этой точки

$\partial\Phi(x_0, y_0, c)/\partial c = 0$ . Так как последнее соотношение справедливо для любой фиксированной точки  $M(x_0, y_0) \in D$ , то устремляя  $y_0$  к нулю, а затем  $x_0$  к  $c$ , получим

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{\partial\Phi(x, 0, c)}{\partial c} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow b} \left[ \frac{\partial u(x, 0, c)}{\partial b} - \frac{\partial u(x, 0, c)}{\partial x} \right] = 0 \quad (4.17)$$

Последнее условие (4.17) оказывается равносильным требованию, чтобы коэффициент при старшем члене асимптотики функции  $u(x, 0, c)$  в окрестности точки  $x = b$  стремился к нулю при  $x \rightarrow b$ . В результате для определения точки отрыва  $c$  приходим к трансцендентному уравнению

$$\frac{v_0}{\omega} + \frac{a-c}{2} - \frac{H}{2\pi} f'(b) = 0 \quad (4.18)$$

$$f(b) = \frac{\operatorname{ch} b/2}{K(\operatorname{th} b/2)} \int_0^b \frac{t^2 dt}{\sqrt{2 \operatorname{ch} b - 2 \operatorname{ch} t}}, \quad b = \frac{a+c\pi}{2H}$$

где  $K(k)$  – полный эллиптический интеграл первого рода.

Уравнение (4.18) может быть эффективно решено асимптотически при больших значениях  $H$ . Для этого разложим функцию  $f'(b)$  в ряд по степеням  $H^{-1}$  и будем искать решение уравнения (4.18) в виде ряда по таким же степеням. Применяя метод неопределенных коэффициентов, получим для точки отрыва  $c$  асимптотическую формулу

$$c = c_\infty + \frac{\pi^2}{576} (a + c_\infty)^3 H^{-2} - \frac{\pi^4}{34560} (a + c_\infty)^5 H^{-4} + O(H^{-6}), \quad H \rightarrow \infty \quad (4.19)$$

$$c_\infty = \frac{4v_0}{3\omega} + \frac{a}{3}$$

Последняя формула также является асимптотикой сильного отрыва пластины ( $H$  фиксировано,  $c_\infty \rightarrow -a$ ).

Для оценки точности асимптотической формулы (4.19) трансцендентное уравнение (4.18) было решено численно методом секущих. Сравнение численных и асимптотических результатов показало их хорошее совпадение в широком диапазоне изменения параметров задачи. Так, например, в случае крутильного удара ( $v_0 = 0$ ) погрешность вычислений по асимптотической формуле (4.19) при  $a/H < 0.5$  составляет менее, чем 0.01%, при  $a/H < 1$  – менее, чем 0.7%, при  $a/H < 1.2$  – менее, чем 1.9%, при  $a/H < 1.3$  – менее, чем 2.9%.

Трансцендентное уравнение (4.18) соответствует постановке задачи, в которой известными величинами предполагаются скорости  $v_0$  и  $\omega$ , приобретенные пластиной в результате удара. Теперь получим уравнение, отвечающее другой постановке задачи, когда заданными являются величины  $P_y$  и  $x_0$ . Для этого, используя определяющие соотношения (1.6)–(1.7), выразим отношение скоростей  $v_0/\omega$  через координату точки приложения импульса  $x_0$ . В результате придем к следующему трансцендентному уравнению:

$$\frac{\pi}{2H} \left( x_0 + \frac{a-c}{2} \right) f'(b) + \frac{\mu_1}{\mu_2} = 0$$

$$\mu_1 = \int_0^b x u_2(x, 0) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^b \operatorname{th} \frac{s}{2} K^2 \left( \operatorname{th} \frac{s}{2} \right) [f(b) - f(s)] ds \quad (4.20)$$

$$\mu_2 = -\int_0^b u_1(x, 0) dx = \frac{4}{\pi} \int_0^b \operatorname{th} \frac{s}{2} K^2 \left( \operatorname{th} \frac{s}{2} \right) ds$$

Решение уравнения (4.20) при больших значениях  $H$  приводит к асимптотической формуле (3.13), в которой  $\mu_1 = 7\pi^4/(960d^4)$ , где  $d$  – глубина фиксированного слоя ( $H = dh$ ).

Таким образом, в частном случае слоя жидкости конечной глубины получено подтверждение асимптотических формул (3.9), (3.13).

Главный член асимптотики точки отрыва  $c$  в случае жидкости малой глубины может быть найден при помощи метода работы [13]. Приведем его здесь в окончательном виде (заданными величинами предполагаются скорости  $v_0$  и  $\omega$ ):

$$c = \frac{3v_0}{2\omega} + \frac{a}{2} \quad (4.21)$$

Анализ формул (4.19); (4.21) показывает, что в диапазоне  $a/3 \leq v_0/\omega < a/2$  для бесконечно большой глубины жидкости происходит отрыв частиц жидкости от поверхности пластины, а для малой глубины, напротив, безотрывный удар. В диапазоне  $-a < v_0/\omega < a/3$  отрыв происходит в обоих случаях, а при  $\frac{v_0}{\omega} \leq -a$  отрывается вся пластина.

С увеличением зоны отрыва влияние дна уменьшается и при сильном отрыве практически не сказывается на изменении точки отрыва. При положительной поступательной скорости не может оторваться больше половины пластины.

**5. Отрывной удар пластины в случае произвольной области.** Рассмотрим задачу об отрывном ударе пластины, плавающей на поверхности идеальной несжимаемой жидкости в ограниченном бассейне произвольной формы. Будем предполагать, что поперечное сечение данного цилиндрического тела представляет собой односвязную область. Математическая постановка данной задачи имеет вид (1.1)–(1.4), где  $S_{11} = \{y = 0; a_2 < x < c_0\}$ ,  $S_{12} = \{y = 0; c_0 < x < a_3\}$ ,  $S_2 = \{y = 0, a_1 < x < a_2; a_3 < x < a_4\}$ .

Решение поставленной задачи может быть найдено путем сведения ее к соответствующей задаче для полосы [11]. Предположим, что функция  $\zeta = F(z)$  осуществляет конформное отображение области  $D$  на полосу ширины  $\pi$ . Причем отрезок прямой  $y = 0$ ,  $a_1 < x < a_4$  переходит в прямую  $v = 0$ ,  $-\infty < u < \infty$  так, что точкам  $x = a_1$  и  $x = a_4$  соответствуют точки  $u = -\infty$  и  $u = \infty$ , а точкам  $x = a_2, a_3$  – симметричные точки  $u = \pm d$  ( $d$  заранее не задано). При этом кривая  $S_3$  переходит в прямую  $v = \pi$ ,  $-\infty < u < \infty$ . Согласно теореме Римана [14] такое отображение существует и единственно.

При помощи конформного отображения  $\zeta = F(z)$  и переноса начала координат в середину отрезка  $[-d; d_0]$ :  $u \rightarrow u - 1/2(d - d_0)$  исходная задача сводится к следующей задаче для полосы:

$$\Delta\Phi = 0; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial v} = 0 \quad v = \pi; \quad \Phi \rightarrow 0 \quad u \rightarrow \infty \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v} = G(u) \quad v = 0, \quad |u| < b, \quad \Phi = 0 \quad v = 0, \quad |u| > b \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v} \geq G(u) \quad v = 0, \quad b < u < b_1, \quad \Phi \leq 0 \quad v = 0, \quad |u| < b \quad (5.3)$$

$$G(u) = \left| [F^{-1}(u - 1/2(d - d_0))] \right| \left| [v_0 - \omega F^{-1}(u - 1/2(d - d_0))] \right|$$

$$b = 1/2(d + d_0), \quad b_1 = 1/2(3d - d_0), \quad d_0 = F(c_0)$$

Решение задачи (5.1)–(5.3) находится в полной аналогии с решением задачи (4.1)–(4.5). Вначале для любого фиксированного  $c_0 \in (-a, a)$  строится решение смешанной краевой задачи в полосе (5.1)–(5.2). После этого точка отрыва  $c_0$  определяется при помощи упомянутого выше вариационного принципа.

В результате для определения точки отрыва  $c_0$  приходим к трансцендентному уравнению

$$f_1(b) + f_2'(b) = 0$$

$$f_1(b) = \frac{\operatorname{ch}(b/2)}{K(\operatorname{th}(b/2))} \int_0^b \frac{G_1(t) dt}{\sqrt{2 \operatorname{ch} b - 2 \operatorname{ch} t}}, \quad f_2(b) = \frac{\operatorname{ch}(b/2)}{K(\operatorname{th}(b/2))} \int_0^b \frac{g(t) dt}{\sqrt{2 \operatorname{ch} b - 2 \operatorname{ch} t}} \quad (5.4)$$

$$g(t) = \int_0^t G_2(x) dx, \quad b = \frac{1}{2}(d + d_0), \quad d = F(a_2), \quad d_0 = F(c_0)$$

где  $G_1(u)$  и  $G_2(u)$  являются соответственно четной и нечетной составляющими функции  $G(u)$ .

В качестве конкретного примера рассмотрим задачу об отрывном ударе пластины, плавающей на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, наполняющей ограниченный бассейн в форме усеченной круговой луночки. Функция  $\zeta = F(z)$ , реализующая конформное отображение луночки на полосу ширины  $\pi$ , имеет вид

$$F(z) = \frac{\pi}{\beta} \ln \frac{a+z}{a-z}$$

где  $a_1 = -a$ ,  $a_4 = a$  – координаты точек пересечения дуги окружности, ограничивающей луночку с осью  $x$ ,  $a_2 = -c$ ,  $a_3 = c$ ,  $\beta$  – угол наклона данной дуги к оси  $x$  в точке  $x = -a$ . Для функции  $G(u)$  приходим к следующему выражению:

$$G(u) = a\beta/(2\pi)(v_0 - \omega a \operatorname{th} y) \operatorname{ch}^{-2} y, \quad y = \beta/(2\pi)(u - 1/2(d - d_0))$$

$$d = \frac{\pi}{\beta} \ln \frac{a+c}{a-c}, \quad d_0 = \frac{\pi}{\beta} \ln \frac{a+c_0}{a-c_0}$$

В рассматриваемом частном случае трансцендентное уравнение (5.4) было решено асимптотически при больших значениях  $a$ . Для точки отрыва  $c_0$  найдена асимптотическая формула

$$c_0 = c_\infty + \frac{1}{72}(c + c_\infty)^3 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{\beta} \right)^2 \right] a^{-2} + O(a^{-4}), \quad a \rightarrow \infty, \quad c_\infty = \frac{4v_0}{3\omega} + \frac{c}{3} \quad (5.5)$$

Важно отметить, что формула (5.5) подтверждена прямым асимптотическим методом.

**Заключение.** Дано обобщение прямого асимптотического метода, применявшегося ранее только для решения линейных задач, на нелинейную задачу об отрывном ударе пластины. Для сравнения полученных результатов предложен альтернативный подход, основанный на использовании техники конформных отображений в сочетании с методами парных интегральных уравнений. В частных случаях слоя и усеченной круговой луночки получено совпадение асимптотических результатов.

На основе найденных асимптотик сделан вывод о неоднозначном влиянии стенок бассейна различной формы на образующуюся на поверхности пластины зону отрыва части жидкости. Для одних границ эта зона увеличивается, а для других, наоборот, уменьшается по сравнению со случаем неограниченной жидкости.

Исследована задача об отрывном ударе пластины, плавающей на поверхности слоя жидкости конечной глубины. Сделан вывод о том, что с увеличением зоны отрыва влияние дна уменьшается и при сильном отрыве практически не сказывается на изме-

нении точки отрыва. Также отмечено, что при положительной поступательной скорости не может оторваться больше половины пластины.

Предложенный асимптотический метод носит общий характер и может быть использован для решения различных других смешанных задач математической физики с неизвестной априори областью контакта. Есть основания полагать, что его можно будет обобщить на задачи о движении твердых тел в вибрирующей жидкости, наполняющей ограниченный объем произвольной формы.

Работа выполнена при поддержке гранта поддержки ведущих научных школ НШ-1768.2003.1.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.
2. *Кудрявцева Н.А.* Горизонтальный удар плавающего эллипса о несжимаемую жидкость // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 2. С. 258–261.
3. *Корчагин В.С.* Отрывной удар по цилиндру, полупогруженному в жидкость // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки. 1978. № 4. С. 25–27.
4. *Корчагин В.С.* Об отрывном ударе тела о несжимаемую жидкость // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки. 1989. № 3. С. 30–33.
5. *Дворак А.В., Теселкин Д.А.* Численное исследование двумерных задач об импульсивном движении плавающих тел // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26. № 1. С. 144–150.
6. *Юдович В.И.* Гидродинамический удар в неоднородной несжимаемой жидкости. М., 2004. 51 с. Деп. в ВИНТИ 13.07.04. № 1208-В2004.
7. *Норкин М.В.* Об учете влияния стенок бассейна произвольной формы при безотрывном ударе плавающего тела // ПМТФ. 2001. № 1. С. 77–81.
8. *Норкин М. В.* Вертикальный удар твердого тела, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости в ограниченном бассейне произвольной формы // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 3. С. 122–130.
9. *Лионс Ж.Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 416 с.
10. *Келдыш М.В.* Избранные труды: Механика. М.: Наука, 1985. 568 с.
11. *Александров В.М., Коваленко Е.В.* Задачи механики сплошной среды со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 334 с.
12. *Уфлянд Я.С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 220 с.
13. *Рохлин Д.Б.* Удар по плоскому телу, плавающему на поверхности тонкого слоя идеальной несжимаемой жидкости // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 38. № 8. С. 1368–1378.
14. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию  
19.X.2004