

УДК 532.546

© 2005 г. Г. Г. ЦЫПКИН

## ДВУЗНАЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ВЫПАДЕНИЯ СОЛЕЙ В ОСАДОК ПРИ ИСПАРЕНИИ ГРУНТОВЫХ ВОД

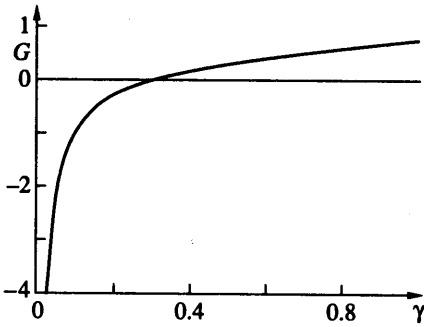
Изучается задача об испарении грунтовых вод, содержащих растворенную примесь. Показано, что в режиме выпадения солей в осадок решение задачи неединственно. При критических значениях параметров происходит слияние решений, и в некоторой области решение задачи перестает существовать. Несуществованию решения соответствует закупорка порового пространства выпавшей в осадок солью.

*Ключевые слова:* фильтрация, соли, грунтовые воды, испарение, осадок, неединственность.

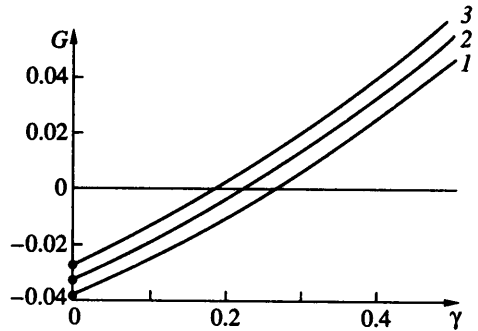
Изучение процесса выпадения примесей в осадок при фильтрации жидкостей в пористых средах представляет большой интерес для задач нефте- и газодобычи, механики грунтов, геотермии, экологии и т.д. [1–4]. Примесь, выпавшая в осадок, занимает часть порового объема и препятствует переносу вещества, существенно изменяя значения пористости и проницаемости. Если количество выпавшей в осадок примеси велико, то это может привести к образованию непроницаемых слоев, поровое пространство в которых заполнено твердой неподвижной фазой.

В работах [5, 6] была предложена математическая модель выпадения солей в осадок при испарении грунтовых вод. Численные эксперименты показали, что масса выпавшей в осадок соли главным образом зависит от таких параметров, как температура поверхности грунта, влажности атмосферного воздуха и скорости фильтрации грунтовых вод к поверхности, соответственно определяющих скорость конвективного переноса соли в растворенном виде к фронту. Было найдено, что существуют критические значения параметров, при приближении к которым количество выпавшей в осадок соли резко увеличивается и производная массы соли в кристаллическом состоянии неограниченно возрастает. Однако как критические параметры, соответствующие закупорке порового пространства, так и критическое значение массы соли не были определены. С практической точки зрения вопрос определения условий, при которых происходит такое качественное изменение свойств пористой среды, является основным и требует специального рассмотрения.

В данной работе исследуется процесс выпадения солей в осадок в окрестности критических параметров, и изучаются условия закупорки порового пространства грунта. На примере одномерного течения показано, что решение задачи обладает свойством неединственности. При переходе от режима накопления примеси перед фронтом испарения к режиму выпадения соли в осадок возникает второе решение, которое, как показывает анализ, не имеет физического смысла. Первое решение удовлетворяет условию перехода к единственному решению задачи о накоплении солей в растворенном виде перед фронтом испарения и к решению задачи об испарении чистой воды. При изменении физических параметров процесса, которые соответствуют увеличению массы выпавшей в осадок соли, два решения сближаются, а при достижении критических значений параметров происходит слияние решений. В критической точке, где решения совпадают, касательная к кривой массы соли, выпавшей в осадок, становится вертикальной и соответствует бесконечно большой скорости роста массы соли. В об-



Фиг. 1. Качественный вид трансцендентной функции для задачи Стефана



Фиг. 2. Трансцендентные функции в задачах испарения пресных грунтовых вод (кривая 1,  $c_0 = 0$ ) и диффузионного перераспределения растворенной примеси перед фронтом испарения (2 -  $c_0 = 0.03$ , 3 -  $c_0 = 0.0635$ )

ласти за критическими значениями решение задачи не существует. С физической точки зрения слияние решений соответствует закупорке порового пространства солью.

1. Решение задач о фазовых превращениях сопровождается значительными трудностями ввиду наличия неизвестных подвижных границ, соответствующих поверхностям фазовых переходов [7]. В тех случаях, когда задача допускает автомодельные решения типа решений Неймана, решение сводится к изучению систем трансцендентных уравнений, что существенно облегчает исследование, а иногда, когда система сводится к одному уравнению, представляется возможным визуально проследить за движением корня уравнения. Так, решение Неймана одномерной задачи Стефана в полупространстве приводит к одному трансцендентному уравнению для автомодельной скорости неизвестной подвижной границы  $\gamma$ , которое условно можно записать в виде  $G(\gamma) = 0$ . Тогда на плоскости  $(\gamma, G)$  корень  $\gamma$  соответствует точке пересечения кривой  $G(\gamma)$  с осью абсцисс (фиг. 1). При стремлении значения температуры на границе к температуре фазового перехода значение  $\gamma$  стремится к нулю, и при численном нахождении значения корня, например методом Ньютона, сходимость метода ухудшается в силу того, что корень приближается к полюсу функции  $G(\gamma)$ , который находится в точке  $\gamma = 0$ .

При исследовании задачи об испарении чистой воды, когда начальная концентрация примеси равна нулю  $c_0 = 0$ , решение сводится к рассмотрению системы трех трансцендентных уравнений для скорости фронта испарения, влажности и температуры на фронте [5, 6]. Исключая два неизвестных параметра, получаем, как и для задачи Стефана, одно трансцендентное уравнение. Здесь функция  $G(\gamma)$  ограничена в интервале  $(0, \infty)$ , но имеет разрыв первого рода в точке  $\gamma = 0$  (фиг. 2, кривая 1). Для задачи испарения грунтовых вод, содержащих примесь, и диффузионного перераспределения примеси перед фронтом также получаем систему трех уравнений, которая может быть сведена к одному уравнению. Если начальная концентрация возрастает от нулевого значения, то кривая  $G(\gamma)$  получается непрерывной деформацией из кривой, полученной в задаче испарения чистой воды (фиг. 2, кривые 2, 3). Кривая 3 представляет собой предельную кривую, соответствующую решению с концентрацией примеси на фронте равной концентрации насыщения. Дальнейшее увеличение начальной концентрации примеси приводит к выпадению соли в осадок. Следуя работам [5, 6], рассмотрим задачу о выпадении соли в осадок.

2. Предположим, что в начальный момент грунт насыщен водным раствором соли с концентрацией  $c_0$ . Если на поверхности грунта раствор контактирует с воздухом, влажность которого меньше значения насыщения, то испарение воды приводит к формированию области грунта, насыщенной смесью воздуха и пара, а переход жидкости в пар увеличивает концентрации соли в растворе перед фронтом испарения. Для простоты будем полагать, что скорость движения раствора к поверхности грунта и влажность воздуха вблизи поверхности являются известными величинами.

В области за фронтом испарения, содержащей гомогенную смесь пара и воздуха, справедливы уравнение диффузии пара и уравнения Клапейрона для обоих газов

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \operatorname{div} D_v \operatorname{grad} v = 0, \quad (2.1)$$

$$P_v = \rho_v R_v T, \quad P = \rho_a R_a T, \quad v = \frac{R_a P_v}{R_v P_a}$$

Перед фронтом испарения примесь перераспределяется согласно уравнению диффузии

$$m \frac{\partial c}{\partial t} + v \cdot \operatorname{grad} c - \operatorname{div} D_c \operatorname{grad} c = 0 \quad (2.2)$$

Задачи, в которых определяющую роль играет процесс испарения грунтовых вод, характеризуются небольшими скоростями фильтрации, при которых можно пренебречь конвективным переносом энергии по сравнению с кондуктивным [8]. В этом случае уравнение энергии сводится к обычному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_{1,2} \Delta T \quad (2.3)$$

Здесь  $v$  – скорость фильтрации,  $m$  – пористость,  $v$  – влажность,  $P$  – давление,  $D$  – коэффициент диффузии,  $R$  – газовая постоянная,  $\rho$  – плотность,  $c$  – концентрация примеси в растворе,  $T$  – температура,  $a$  – температуропроводность. Индексы:  $a, v, c$  – воздух, пар и примесь соответственно,  $1$  – область раствора,  $2$  – область смеси пар–воздух.

На поверхности испарения выполняются условия термодинамического равновесия раствора и смеси пар – воздух

$$T_+ = T_- = T_*, \quad P_{v*} = F(T_* - \alpha c_*), \quad v = \frac{R_a P_{v*}}{R_v P_a} \quad (2.4)$$

где функция  $F$  определяется выражением [9]

$$F(x) = 10^5 \exp \left[ -7226.6 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{373.16} \right) + 8.2 \ln \frac{373.16}{x} - 0.0057(373.16 - x) \right]$$

$$c_s = 0.5635 - 0.5924 \frac{T_*}{373.15} + 0.4226 \left( \frac{T_*}{373.15} \right)^2$$

Здесь  $\alpha$  – коэффициент повышения температуры испарения при увеличении концентрации, а  $c_s(T)$  представляет собой растворимость и является известной функцией температуры. Индексы: плюс и минус – величины, относящиеся к области перед и за фронтом соответственно, \* – значения величин на фронте.

Законы сохранения массы  $H_2O$  и примеси имеют вид

$$\left[ \frac{\rho_w}{\rho_a} - \left( 1 - \frac{m_c}{m_0} \right) \frac{\rho_{v*}}{\rho_a} \right] V_n = \frac{V_{n1} \rho_w}{m_0 \rho_a} D_v \left( 1 - \frac{m_c}{m_0} \right) (\operatorname{grad} v)_{n2} \quad (2.5)$$

$$\left(c_* - \frac{m_c \rho_c}{m_0 \rho_w}\right) V_n - \frac{c_*}{m_0} v_{n1} + D_c (\text{grad} c)_{n1} = 0 \quad (2.6)$$

Поглощением тепла на фронте испарения можно пренебречь по сравнению с кондуктивным переносом [9], и уравнение баланса энергии на фронте имеет вид

$$(\lambda \text{grad} T)_{n1} = (\lambda \text{grad} T)_{n2} \quad (2.7)$$

Здесь  $m_0$  – начальная пористость грунта,  $m_c$  – доля единицы объема, заполненная выпавшей в осадок солью,  $V$  – скорость фронта испарения,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, индекс  $n$  обозначает нормальную компоненту.

Начальные и граничные условия имеют вид

$$t = 0: T = T_0, \quad c = c_0; \quad z = 0: v = v_a, \quad T = T_a \quad (2.8)$$

3. Рассмотрим движение фронта испарения от плоской поверхности грунта в положительном направлении оси  $z$ . Проанализируем поведение физической системы для постоянных начальных и граничных условий при заданной скорости фильтрации в виде  $v = U/\sqrt{t}$ , где  $U = \text{const}$ . Задача допускает автомодельное решение вида

$$T = T(\zeta), \quad v = v(\zeta), \quad c = c(\zeta)$$

$$\zeta = \frac{z}{2\sqrt{D_c t}}, \quad Z(t) = 2\gamma\sqrt{D_c t}, \quad V = \frac{dZ}{dt}$$

Решения уравнений (2.1) для области пар–воздух и уравнений (2.2)–(2.3) для области воды представимы в виде интегралов вероятности [6]. Полученные решения подставляем в граничные условия (2.5)–(2.7), которые вместе с соотношениями (2.4) приводят к системе трансцендентных уравнений

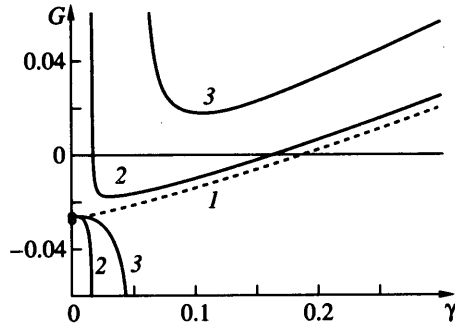
$$G \equiv v_* \frac{R_v}{R_a} - \frac{F(T_* - \alpha c_*)}{P_a} = 0 \quad (3.1)$$

$$\sqrt{\pi} \frac{\rho_w}{\rho_a} (\gamma + U) = \left(1 - \frac{m_c}{m_0}\right) \sqrt{\frac{D_v}{D_c}} (v_* - v_a) \frac{\exp(-\gamma^2 D_c / D_v)}{\text{erf}(\gamma \sqrt{D_c / D_v})} \quad (3.2)$$

$$\left(c_* - \frac{m_c \rho_c}{m_0 \rho_w}\right) \gamma = (c_* - c_0) \frac{\exp(-(\gamma + U)^2)}{\sqrt{\pi} \text{erfc}(\gamma + U)} - U c_* \quad (3.3)$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \left(\frac{T_*}{T_0} - \frac{T_a}{T_0}\right) \frac{\exp(-\gamma^2 D_c / a_2)}{\text{erf}(\gamma \sqrt{D_c / a_2})} = \left(1 - \frac{T_*}{T_0}\right) \frac{\exp(-\gamma^2 D_c / a_1)}{\text{erfc}(\gamma \sqrt{D_c / a_1})} \quad (3.4)$$

В работах [5, 6] вычисления корней системы трансцендентных уравнений производились методом Ньютона. В областях параметров, удаленных от критических значений, корни системы вычислялись с заданной точностью. При подходе к критической области параметров ухудшалась сходимость, а затем схема численного счета переставала работать.



Фиг. 3. Вид трансцендентных функций для режимов накопления примеси перед фронтом испарения и выпадения солей в осадок.  $T_0 = 283.15$  К,  $T_a = 310$  К,  $v_a = 0$ ,  $U = 1.119$ ,  $c_0 = 0.0635$  (кривая 1),  $c_0 = 0.1$  (кривая 2);  $U = 1.721$ ,  $c_0 = 0.1$  (кривая 3)

Анализ системы трансцендентных уравнений (3.1)–(3.4) показывает, что после преобразований она может быть сведена к одному уравнению относительно автомодельной скорости неизвестной подвижной границы  $\gamma$ .

$$G(\gamma) \equiv v_*(\gamma) \frac{R_v}{R_a} - \frac{F(T_*(\gamma) - \alpha c_s(T_*(\gamma)))}{P_a} = 0 \quad (3.5)$$

где искомые величины  $v_*$ ,  $T_*$  и  $m_c$  являются функциями  $\gamma$  и могут быть представлены в виде

$$m_c(\gamma) = m_0 \frac{\rho_w}{\rho_c} \left[ c_s(T_*) \left( 1 + \frac{U}{\gamma} \right) - \frac{c_s(T_*) - c_0 \exp(-(\gamma + U)^2)}{\sqrt{\pi} \gamma \operatorname{erfc}(\gamma + U)} \right]$$

$$v_*(\gamma) = v_a \frac{A_1(\gamma)}{\sqrt{\pi} \gamma + A_1(\gamma)} + \frac{\sqrt{\pi} \rho_w m_0 (\gamma + U)}{\rho_a (m_0 - m_c(\gamma)) [\sqrt{\pi} \gamma + A_1(\gamma)]}$$

$$T_*(\gamma) = T_0 \frac{A_2(\gamma) + c_1 A_3(\gamma)}{c_2 A_3(\gamma) + A_2(\gamma)}, \quad c_1 = \frac{\lambda_2 \sqrt{a_1}}{\lambda_1 \sqrt{a_2}}, \quad c_2 = \frac{\lambda_2 \sqrt{a_1} T_a}{\lambda_1 \sqrt{a_2} T_0}$$

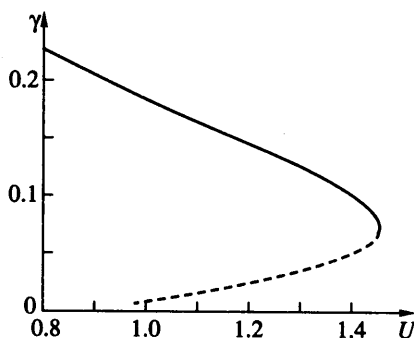
$$A_1(\gamma) = \frac{\exp(-(\gamma + U)^2 D_c / D_v)}{\operatorname{erf}((\gamma + U) \sqrt{D_c / D_v})}, \quad A_2(\gamma) = \frac{\exp(-(\gamma + U)^2 D_c / a_1)}{\operatorname{erfc}((\gamma + U) \sqrt{D_c / a_1})}$$

$$A_3(\gamma) = \frac{\exp(-(\gamma + U)^2 D_c / a_2)}{\operatorname{erf}((\gamma + U) \sqrt{D_c / a_2})}$$

Проследим графически эволюцию трансцендентной кривой, чтобы понять, что происходит при приближении параметров к критическим значениям.

Расчеты трансцендентного уравнения (3.5) проводились при следующих значениях параметров:  $m = 0.3$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.684$  Вт/(м · К),  $a_1 = a_2 = 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с,  $\rho_c = 2165$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_w = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\alpha = 20$  К,  $R_a = 287$  Дж/(кг · К),  $R_v = 461$  Дж/(кг · К),  $P_a = 10^5$  Па,  $D_c = 1.5 \cdot 10^{-9}$  м<sup>2</sup>/с,  $D_v = 2.4 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с.

На фиг. 3 приведены трансцендентные кривые, соответствующие режиму накопления солей перед фронтом (кривая 1) и режимам выпадения солей в осадок (кривые 2, 3).



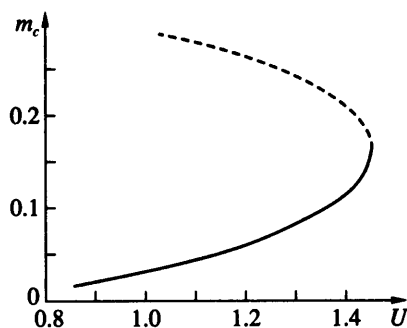
Фиг. 4. Два решения для скорости фронта испарения  $\gamma$  в зависимости от скорости течения к поверхности при значениях параметров как на фиг. 3. Штриховая линия обозначает решение, не имеющее физического смысла

В первом случае кривая является монотонной и непрерывной на интервале  $0 < \gamma < \infty$ , а единственная точка пересечения кривой с осью  $\gamma$  является корнем трансцендентного уравнения, который при  $c_0 \rightarrow 0$  переходит в решение задачи об испарении пресной воды. При увеличении начального значения концентрации примеси происходит переход от режима накопления примеси перед фронтом к режиму выпадения солей в осадок. Этот переход соответствует распаду кривой на две ветви и рождению в точке  $\gamma = 0$  разрыва второго рода (кривая 2). В результате верхняя ветвь трансцендентной кривой пересекает ось абсцисс в двух точках, что означает появление второго корня уравнения (3.5). Нижняя ветвь, как показали численные эксперименты, всегда лежит ниже оси. Аналогичная трансформация кривой и соответственно появление второго корня происходит при увеличении скорости течения, при фиксированной начальной концентрации соли.

При увеличении начальной концентрации примеси или скорости потока трансцендентная кривая деформируется непрерывным образом, так что корни уравнения сближаются. При переходе через некоторые критические значения начальной концентрации или скорости потока происходит слияние корней, и в этом случае трансцендентная кривая касается оси  $\gamma$ . Дальнейшее изменение параметров приводит к тому, что ветвь кривой поднимается над осью абсцисс, что соответствует отсутствию решения искомого трансцендентного уравнения (кривая 3). Момент касания кривой оси абсцисс соответствует исчезновению корней трансцендентного уравнения и определяет критические условия существования автоматического решения.

Для большего корня в задаче выпадения соли в осадок существует предельный переход к решению задачи о накоплении примеси перед фронтом, которое, в свою очередь, при стремлении концентрации к нулю переходит в решение задачи об испарении чистой воды. Для меньшего корня такого предельного перехода не существует.

Фигура 4 иллюстрирует зависимость корней трансцендентного уравнения от скорости течения грунтовых вод по направлению к поверхности грунта. Проанализируем физический смысл полученных решений. Как было показано для задачи испарения чистой воды [5, 6], увеличение скорости фильтрации к поверхности приводит к уменьшению скорости фронта испарения относительно неподвижного грунта, т.е. набегающий поток подавляет движение фронта и сносит его в сторону поверхности и соответственно увеличивает диффузионный поток пара в атмосферу. Это свойство сохраняется также для задачи о накоплении примеси перед фронтом испарения. В задаче выпадения соли в осадок аналогичное свойство выполняется только для первого решения, соответствующего большему значению  $\gamma$  (сплошная линия). Поведение второго решения (пунктирная линия) качественно отличается от первого и характеризуется



Фиг. 5. Два решения для доли объема, заполненного солью в кристаллическом состоянии как функции от скорости течения. Значения параметров, как на фиг. 3. Штриховая линия обозначает решение, не имеющее физического смысла

увеличением скорости фронта вместе со скоростью течения, т.е. увеличение скорости фильтрации грунтовых вод к поверхности увеличивает скорость фронта испарения и уменьшает поток пара в атмосферу. Отсюда можно сделать вывод, что данное решение не имеет физического смысла, так как в реальности движение воды к поверхности должно подавлять движение фронта испарения и увеличивать поток пара в области за фронтом.

При некотором критическом значении  $U$  происходит слияние корней, и при скоростях больших этого значения решение задачи не существует.

На фиг. 5 представлена зависимость доли единицы объема, заполненной выпавшей в осадок солью. Здесь нижняя ветвь кривой (сплошная линия) соответствует первому корню, для которого имеет место предельный переход к режиму накопления соли перед фронтом испарения. Для данного решения видно, что увеличение скорости фильтрационного течения к поверхности грунта приводит к нелинейному росту количества выпавшей в осадок соли, что объясняется возрастанием конвективного переноса соли к поверхности испарения, а также подавлением скорости движения фронта и соответственно снижением протяженности области пар-воздух, которая содержит соль в кристаллическом состоянии. Для второго решения большему конвективному переносу примеси к поверхности соответствует меньшее количество выпавшей в осадок соли (штриховая кривая).

Численные эксперименты показали, что аналогичным образом масса выпавшей в осадок соли зависит от начальной концентрации примеси. При увеличении концентрации грунтовых вод количество выпавшей в осадок соли возрастает для первого решения и уменьшается для второго решения. Отсюда так же, как и при рассмотрении фиг. 4, можно сделать вывод, что второй корень не имеет физического смысла.

Как условие предельного перехода к задаче о накоплении примеси перед фронтом, которая имеет единственное решение, так и анализ физического смысла обоих решений приводят к одному и тому же результату.

Несуществование автомодельного решения для некоторого диапазона параметров означает, что выпавшая в осадок соль закупоривает поровое пространство грунта вблизи поверхности уже на начальной стадии, когда автомодельное решение еще не сформировалось. Сам процесс формирования непроницаемого слоя, заполненного солью в кристаллическом состоянии, не может быть описан с помощью автомодельного решения. Если же автомодельное решение, соответствующее постоянным граничным условиям, сформировалось, но затем граничные условия изменились, то непроницаемый слой, насыщенный выпавшей в осадок солью, может образоваться на любой глубине, но такая задача снова не будет автомодельной.

В [10, 11] исследовалась задача о выпадении солей в осадок в геотермальных системах, где также была обнаружена неединственность решения. Можно предположить, что задачи о выпадении примесей в осадок при течении в пористой среде будут характеризоваться многозначными решениями, а слияние корней соответствовать закупорке порового пространства и прекращению движения через данный объем пористой среды. Тогда численное моделирование таких процессов будет сталкиваться с определенными трудностями в областях параметров, близких к критическим, и эти трудности будут проявляться в ухудшении сходимости численных схем.

**Заключение.** При одних и тех же начальных и граничных значениях существуют два решения. Для некоторых критических значениях параметров, соответствующих высоким концентрациям примеси и скоростям фильтрации, происходит слияние корней, и решение задачи перестает существовать. Несуществование решения свидетельствует о невозможности движения при заданных начальных и граничных условиях и объясняется закупоркой порового пространства выпавшей в осадок солью.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (№ 03-01-00068) и Президентской программы поддержки ведущих научных школ (1697.2003.1).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kleinitz W., Koehler M., Dietzsch G.* The precipitation of salt in gas producing wells // SPE 68953. 2001.
2. *Yakirevich A., Berliner P., Sorek S.* A model for numerical simulating of evaporation from bare saline water // Water Resour Res. 1997. V. 33. № 5. P. 1021–1033.
3. *Battistelli A., Calore C., Pruess K.* The simulator TOUGH2/EWASG for modelling geothermal reservoirs with brines and noncondensable gas // Geothermics. 1997. V. 26. № 4. P. 437–464.
4. *Helmig R.* Multiphase flow and transport processes in the Subsurface. Berlin: Springer, 1997. 367 p.
5. *Цыпкин Г.Г.* Математическая модель выпадения солей в осадок при испарении грунтовых вод // Докл. РАН. 2003. Т. 389. № 6. С. 759–762.
6. *Цыпкин Г.Г.* Накопление и выпадение солей в осадок при испарении грунтовых вод // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 6. С. 83–92.
7. *Oleinik O.A., Primicerio M., Radkevich E.V.* Stefan-like problems // Meccanica. 1993. V. 28. P. 129–143.
8. *Tsyppkin G., Brevdo L.* A phenomenological model of the increase of solute concentration in ground water due to the evaporation // Transport Porous Media. 1999. V. 37. P. 129–151.
9. *Вукалович М.П.* Термодинамические свойства воды и водяного пара. М.: Машгиз, 1955. 92 с.
10. *Tsyppkin G., Woods A.* Salt precipitation in geothermal reservoir // Proc. 21 st. Intern. Congr. on Theor. and Appl. Mech. Warsaw, Poland, 2004.
11. *Tsyppkin G., Woods A.* Precipitate formation in a porous rock through evaporation of saline water // J. Fluid Mech. 2005. V. 537. P. 34–53.

Москва

Поступила в редакцию  
27.1.2005