

УДК 532.5.013.4:532.584:534.12

© 2005 г. Н. И. ЛОБОВ, Д. В. ЛЮБИМОВ, Т. П. ЛЮБИМОВА

УСТОЙЧИВОСТЬ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА СИСТЕМЫ ЖИДКОСТЬ–ВЗВЕСЬ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ НЕЛИНЕЙНО-ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ВИБРАЦИЙ

Исследуется устойчивость состояния двуслойной системы однородная жидкость – взвесь твердых частиц с плоской поверхностью раздела. Система совершает высокочастотные колебания как в горизонтальном, так и в вертикальном направлениях с произвольным сдвигом фаз. Показано, что при одновременном воздействии и вертикальных, и горизонтальных вибраций возникает среднее течение; численно, методом дифференциальной прогонки, определены количественные характеристики его устойчивости. Показано существование движущегося волнового рельефа на границе жидкость–взвесь. Поперечные колебания, совершаемые в фазе с продольными колебаниями, существенно дестабилизируют в целом равновесие системы. Наличие сдвига фаз колебаний может приводить к повышению порога устойчивости; в зависимости от величины сдвига фаз направление движения волнового рельефа может быть различным. Обнаружена неустойчивость системы при строго вертикальных вибрациях, при этом кризис обусловлен длинноволновыми монотонными возмущениями.

Ключевые слова: устойчивость, поверхность, взвесь, вибрации.

В работе [1] был развит последовательный теоретический подход для описания динамики двуслойной системы жидкость–взвесь в вибрационном поле. В рамках этого подхода рассмотрена задача об устойчивости границы раздела жидкость–взвесь при воздействии высокочастотных горизонтальных вибраций линейной поляризации. Показано, что в результате развития неустойчивости Кельвина–Гельмгольца формируется квазиравновесное состояние с неподвижным волновым рельефом на границе раздела. При этом длина волны образующегося рельефа монотонно растет с увеличением интенсивности вибраций, что согласуется с результатами экспериментов [2]. Показано, что различие инерционных свойств частиц и жидкости, а также малая величина времени релаксации скоростей частиц и жидкости приводят к сильной дисперсии отклика взвеси на внешнее периодическое воздействие. Кроме того, в некотором диапазоне волновых чисел становится возможной колебательная неустойчивость, причем в области ее существования она более опасна. Колебательный характер неустойчивости находится в согласии с экспериментальным фактом дрейфа волнового рельефа, обнаруженного в [3].

В работе [4] рассмотрено поведение слабонеоднородной взвеси в условиях невесомости под действием линейно-поляризованных высокочастотных вибраций. Обнаружено, что при вибрациях вдоль градиента концентрации состояние квазиравновесия неустойчиво относительно колебательных возмущений.

1. Постановка задачи. Рассмотрим поведение двуслойной системы жидкость–взвесь под действием монохроматических вибраций эллиптической поляризации (комбинация горизонтальных и вертикальных вибраций разной амплитуды, сдвинутых по фазе). Будем предполагать, что жидкость несжимаема, а твердые частицы недеформируемы, агрегацией и оседанием частиц пренебрегаем. Твердые частицы считаем сферическими.

Будем предполагать, что сила межфазного взаимодействия содержит три составляющих: силу Стокса, силу присоединенных масс и наследственную силу Бассе

$$\mathbf{f}_s = -\gamma\varphi(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}); \quad \mathbf{f}_a = -\frac{1}{2}\varphi\rho\frac{d_s}{dt}(\mathbf{v}_s - \mathbf{v})$$

$$\mathbf{f}_B = -\frac{9}{2r_s}\sqrt{\frac{\rho\eta}{\pi}}\varphi\int_{-\infty}^t \frac{d}{d\tau}(\mathbf{v}_s - \mathbf{v})\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

$$\frac{d_s}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_s \nabla$$

Здесь φ – объемная концентрация твердой фазы, ρ , ν и η – плотность, скорость и динамическая вязкость жидкой фазы, \mathbf{v}_s – скорость дисперсной фазы, γ – коэффициент межфазного трения. В случае сферических частиц коэффициент трения γ равен $9\eta/(2r_s^2)$, где r_s – радиус частицы.

Относительная роль слагаемых в силе межфазного взаимодействия определяется величинами

$$\frac{\delta}{r_s}, \quad \delta = \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}; \quad \Omega = \frac{\omega\rho_s}{\gamma} = \left(\frac{r_s}{\delta}\right)^2 \frac{\rho_s}{\rho}$$

Здесь δ – толщина динамического пограничного слоя, ν – кинематическая вязкость, ω – частота вибраций, Ω – безразмерная частота вибраций – отношение времени релаксации скоростей фаз к периоду вибраций, ρ_s – плотность дисперсной фазы. В случае малых Ω основной вклад вносит сила Стокса. При $\Omega \gg 1$ основной составляющей силы межфазного взаимодействия является сила присоединенных масс. В промежуточных случаях вклад всех составляющих одного порядка.

Приведем некоторые оценки для частоты вибраций $\omega = 300 \text{ с}^{-1}$: 1) пыль в воздухе, $r_s \sim 10^{-3}$, $\Omega \sim 10^{-4}$, 2) глинистые частицы в воде, $r_s \sim 10^{-3}$, $\Omega \sim 10^{-2}$, 3) песок в воде, $r_s \sim 10^{-1}$, $\Omega \sim 30$. В случаях 1, 2 взвесь состоит из очень маленьких частиц, основной вклад в силу взаимодействия вносит сила Стокса. Поведение взвеси подобно поведению однородной жидкости с увеличенной плотностью. В случае 3 важны все составляющие силы межфазного взаимодействия, модель однородной жидкости не пригодна.

Если взвесь песка в воде подвергнуть вибрациям акустической частоты, например $\omega = 3 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$, то параметр $\Omega \sim 3000$. В этом случае поведение взвеси определяется в основном силой присоединенных масс.

Рассмотрение ведется на основе двухжидкостной модели [5]

$$m\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -m\nabla p + \eta\text{Div}(\mathbf{m}\mathbf{e}) + m\rho\mathbf{g} - \mathbf{f}_s - \mathbf{f}_a - \mathbf{f}_B$$

$$\varphi\rho_s\frac{d_s\mathbf{v}_s}{dt} = -\varphi\nabla p + \varphi\rho_s\mathbf{g} + \mathbf{f}_s + \mathbf{f}_a + \mathbf{f}_B \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \text{div}(m\mathbf{v}) = 0, \quad \text{div}(m\mathbf{v} + \varphi\mathbf{v}_s) = 0$$

Здесь $m = 1 - \varphi$, \mathbf{e} – тензор скоростей сдвига, ρ_s – плотность дисперсной фазы, p – давление в жидкой фазе, \mathbf{g} – ускорение свободного падения.

Будем считать, что вибрации являются высокочастотными и малоамплитудными:

$$a \ll L, \quad \omega \gg \frac{v}{L}, \quad v \ll \omega L \quad (1.2)$$

где a – амплитуда вибраций, L – характерный размер задачи.

При выполнении условий (1.2) удобно разделить гидродинамические поля на медленно меняющиеся (осредненные) и быстро осциллирующие (пульсационные) части.

Выпишем уравнения для пульсаций скорости

$$\begin{aligned} m\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -m\nabla p - \mathbf{f}_s - \mathbf{f}_a - \mathbf{f}_B \\ \varphi\rho_s \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} &= -\varphi\nabla p + \mathbf{f}_s + \mathbf{f}_a + \mathbf{f}_B \\ \operatorname{div}(m\mathbf{v} + \varphi\mathbf{v}_s) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

где \mathbf{v} , \mathbf{v}_s – пульсационные скорости жидкой и дисперсной фазы соответственно, p – пульсационное давление, нелинейные слагаемые в силе межфазного взаимодействия опущены.

В этих уравнениях пренебрегается вязкой диссипацией на масштабах задачи, что можно сделать в рассматриваемом высокочастотном приближении. Действительно, в силу сделанных выше приближений $\delta \ll L$ отношение вязкого слагаемого $\nu\Delta\mathbf{v}$ к нестационарному $\partial\mathbf{v}/\partial t$ имеет порядок $\delta^2/L^2 \ll 1$. Диссипативные слагаемые в силе межфазного взаимодействия должны быть учтены, поскольку их вклад определяется отношением δ/r_s . Это отношение, вообще говоря, не мало.

Для монохроматических вибраций с частотой ω удобно представить поля в комплексной форме $\mathbf{v} = \operatorname{Re}\{\mathbf{v}^*e^{i\omega t}\}$ и аналогично для \mathbf{v}_s и p . Здесь \mathbf{v}^* – комплексная амплитуда (в дальнейшем * опустим).

Используя уравнения (1.3), можно выразить поля \mathbf{v} и \mathbf{v}_s через объемную скорость среды $\mathbf{U} = m\mathbf{v} + \varphi\mathbf{v}_s$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \kappa\mathbf{U}, \quad \mathbf{v}_s = \kappa_s\mathbf{U} \\ \kappa &= \frac{1 + im\Omega'(1 + \rho/2\rho_s)}{1 + im\Omega'\rho A}, \quad \kappa_s = \frac{1 + 3/2im\Omega'\rho/\rho_s}{1 + im\Omega'\rho A}, \quad \Omega' = \frac{\Omega}{1 + 2/3\sqrt{2i\Omega\rho/\rho_s}} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$A = \frac{1}{2\rho_s} + \frac{1}{\rho_e} = \frac{1}{2\rho_s} + \frac{m}{\rho} + \frac{\varphi}{\rho_s}$$

Здесь $1/\rho_e$ – средневзвешенный удельный объем.

Объемная скорость \mathbf{U} удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(S\mathbf{U}) &= 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{U} = 0 \\ S &= m\kappa + \varphi\rho_s\kappa_s, \quad S\mathbf{U} = m\rho\mathbf{v} + \varphi\rho_s\mathbf{v}_s \end{aligned} \quad (1.5)$$

Вектор $S\mathbf{U}$ имеет смысл плотности пульсаций импульса среды. Таким образом, пульсационный поток является несжимаемым, а пульсационный импульс среды – безвихревым.

В высокочастотном приближении различие пульсационных скоростей жидкостей и твердых фаз может быть велико. Осредненные же скорости достаточно мелких частиц и жидкости различаются мало. Это позволяет пренебречь различием их средних скоростей всюду, кроме силы межфазного взаимодействия, т.е. перейти к одножидкостной модели для описания среднего движения.

Осредненные уравнения имеют вид, совпадающий с приведенными в работе [1] уравнениями

$$\begin{aligned} \rho_m \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} \right) + \text{Div}(m\rho \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle + \varphi \rho_s \langle \mathbf{v}_s \mathbf{v}_s \rangle) &= -\nabla P + \eta \text{Div}(m\mathbf{e}) + \rho_m \mathbf{g} \\ \frac{\partial m}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla m &= 0, \quad \text{div} \mathbf{u} = 0; \quad \rho_m = m\rho + \varphi \rho_s \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $m = 1$ – однородная жидкость, а средний тензор плотности пульсационного переноса импульса имеет вид

$$\begin{aligned} m\rho \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle + \varphi \rho_s \langle \mathbf{v}_s \mathbf{v}_s \rangle &= F \text{Re}(\mathbf{U} \bar{\mathbf{U}}) \\ F &= \frac{1}{2}(m\rho |\kappa|^2 + \varphi \rho_s |\kappa_s|^2) \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{u} , P – осредненные скорости и давления, \mathbf{e} – тензор вязких напряжений, черта сверху означает операцию комплексного сопряжения.

Перейдем к обсуждению граничных условий. На твердых границах области выполняются условия прилипания для средней скорости. Для амплитуды среднеобъемной пульсационной скорости должно быть поставлено условие непротекания с учетом закона вибраций области. При рассмотрении резко неоднородных взвесей на поверхности скачка концентрации $G(\mathbf{r}, t) = 0$ дифференциальные уравнения, описывающие осредненные и пульсационные поля, должны быть заменены условием неразрывности нормальной компоненты объемной скорости и касательной компоненты вектора плотности пульсационного импульса, условиями баланса нормальных и касательных напряжений, условием непрерывности средней скорости и кинематическим условием:

$$\begin{aligned} [U_n] &= 0, \quad [SU_\tau] = 0, \quad [F]|U_n|^2 = -[P] + \eta[m e_{nn}] \\ [F \text{Re}(U_n \bar{U}_\tau)] &= \eta[m e_{n\tau}], \quad [\mathbf{u}] = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) G = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь чертой обозначена операция комплексного сопряжения.

Задача (1.6), (1.7) записана для общего случая неоднородных сред. В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая двух однородных сред. Можно убедиться, что при этом вибрационная сила в каждой из сред, как и сила тяжести, имеет градиентный вид

$$\text{Div}(F \text{Re}(\mathbf{U} \bar{\mathbf{U}})) = \frac{1}{2} \nabla(F|\mathbf{U}|^2), \quad \rho_m \mathbf{g} = -\nabla(\rho_m g z)$$

где z – вертикальная координата.

Удобно перенормировать давление в каждой из сред

$$P = p - \frac{1}{2} F |\mathbf{U}|^2 - \rho_m g z$$

В результате задача примет вид

$$\begin{aligned} \rho_m \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} \right) &= -\nabla p + \eta m \Delta \mathbf{u} \\ \text{div} \mathbf{u} &= 0, \quad \text{rot} \mathbf{U} = 0, \quad \text{div} \mathbf{U} = 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$z = \zeta(x, y, t): [SU_\tau] = 0, \quad [U_n] = 0$$

$$\frac{1}{2}[F]|U_n|^2 - \frac{1}{2}[F|U_\tau|^2] = -[p] + \eta[m\mathbf{e}_{nn}] + [\rho_m]g\zeta \quad (1.9)$$

$$[F\text{Re}(U_n U_\tau)] = \eta[m\mathbf{e}_{n\tau}]$$

$$[u] = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla G = 0$$

2. Основное состояние. Рассмотрим двухслойную систему, состоящую из двух бесконечных горизонтальных плоских слоев равной толщины h . Взвесь расположена внизу. Начало координат выбирается на невозмущенной поверхности раздела, x – горизонтальная координата, z – вертикальная. Система уравнений (1.8) с граничными условиями (1.9) допускает решение (основное состояние) с плоской границей раздела

$$\mathbf{U} = (U, 0, W), \quad W = b\omega e^{i\alpha}, \quad \zeta = 0$$

$$U = U_1 = 2a\omega \frac{S_2}{S_1 + S_2}, \quad z \geq 0; \quad U = U_2 = 2a\omega \frac{S_1}{S_1 + S_2}, \quad z \leq 0$$

В общем случае вибраций эллиптической поляризации состояние квазиравновесия теперь невозможно и существует среднее течение, имеющее только горизонтальную составляющую $u^*(z)$:

$$u_k^* = \frac{1}{2} \frac{C}{m_k} [z^2 - h^2 + A_k(z + (-1)^k h)] \quad (k = 1, 2)$$

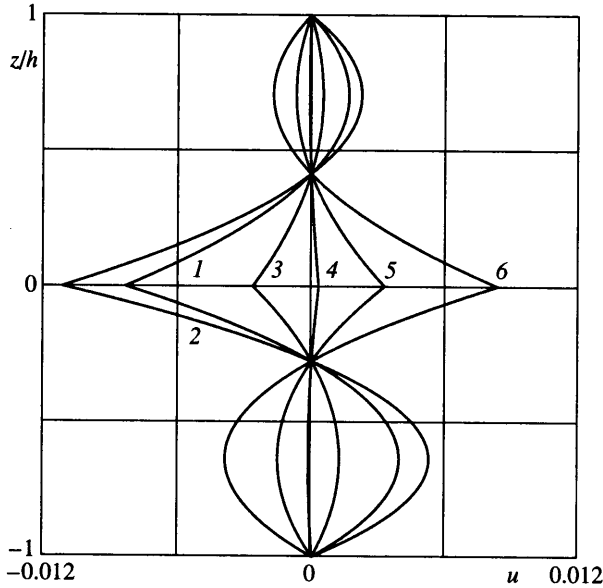
$$A_1 = -\frac{h m_1 + 7 m_2}{6 m_2}, \quad A_2 = \frac{h m_2 + 7 m_1}{6 m_1}$$

$$C = -12 \frac{m_1 m_2}{\eta h (14 m_1 m_2 + m_1^2 + m_2^2)} b \omega \text{Re}[F U e^{i\alpha}]$$

В предельном случае малых частот вибраций ($\Omega = 0$), когда взвесь можно считать однородной жидкостью с перенормированной плотностью, среднее течение исчезает. Существование среднего течения напрямую связано с присутствием твердых частиц, точнее говоря, с различием пульсационных скоростей \mathbf{v} и \mathbf{v}_s . Действительно, как видно из приведенных формул (1.4), определения F и S и граничного условия (1.9), при $\Omega = 0$ обращается в ноль величина $[FU]$. При этом характер вибрационного воздействия несуществен.

Среднее течение отсутствует и в некоторых других случаях. Прежде всего отметим две предельные ситуации вибрационного воздействия – горизонтальные вибрации и вертикальные вибрации. Кроме того, при $\Omega \neq 0$ и в присутствии горизонтальных и вертикальных вибраций обязательно найдется такое значение сдвига фаз, при котором среднее течение исчезает в обоих слоях одновременно. Величина сдвига фаз, при котором это происходит, является монотонной функцией параметра Ω . При $\Omega \rightarrow \infty$ исчезновение среднего течения происходит при $\alpha = \pi/2$.

На фиг. 1 изображены профили скорости среднего течения. В качестве единицы скорости принята величина $ab\omega^2 h/\nu$. В каждом из слоев профиль скорости – параболическая функция вертикальной координаты. Положение узлов скорости не зависит от сдвига фаз и определяется только объемной долей жидкости m . При всех значениях m максимум модуля скорости среднего течения в однородной жидкости достигается на



Фиг. 1. Профили скорости среднего течения при $\Omega = 10$, $\rho_s/\rho = 4$, $m = 2/3$; $\alpha = 0, \pi/6, 2\pi/3, 3\pi/4, 5\pi/6, \pi$ (линии 1-6)

поверхности раздела. Приведем оценку этой скорости для случая частиц песка в воде. При $\rho_s \sim 0.025$ см, $a \sim 0.01$ см, $b \sim 0.001$ см, $\omega = 180$ с⁻¹, $m = 2/3$ скорость движения жидкости вблизи поверхности раздела составляет примерно 0.3 см/с.

3. Задача устойчивости основного состояния. Исследуем устойчивость основного состояния, полученного выше, относительно малых нормальных плоских возмущений, зависящих от времени и горизонтальной координаты x по закону $\exp(\lambda t + ikx)$.

В каждом из слоев уравнения для возмущений средней скорости имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda \rho_m v + B_v (ik \rho_m u^* v + \rho_m w \hat{u}') &= -ikp + mDv \\ \lambda \rho_m w + ikB_v \rho_m u^* w &= -p' + mDw \\ ikv + w' &= 0, \quad D\Phi = 0, \quad D\bar{\Phi} = 0, \quad D = \frac{d^2}{dz^2} - k^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\rho_m = m + (1-m)\rho_s, \quad \mathbf{u} = (v, 0, w)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по поперечной координате z и введен потенциал объемной пульсационной скорости Φ ; при этом Φ и $\bar{\Phi}$ нужно рассматривать как независимые функции. На твердых границах ($z = \pm 1$) и на границе раздела ($z = 0$) выполняются граничные условия

$$v = 0, \quad w = 0, \quad \Phi' = 0 \quad (3.2)$$

$$[v] + B_v [\hat{u}] \zeta = 0, \quad [w] = 0, \quad \lambda \zeta + ikB_v \hat{u} \zeta = w \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}B_v[F(W\bar{\Phi}' + \bar{W}\Phi') - 2ik\zeta F(W\bar{U} + \bar{W}U)] - \frac{1}{2}ik\zeta Fr Ga[F(U\bar{\Phi} + \bar{U}\Phi)] = \\ & = -[p] + 2[mw'] - 2ikB_v[mu^*]\zeta + Ga[\rho_m]\zeta \\ & \frac{1}{2}FrGa[F(ikB(W\bar{\Phi} + \bar{W}\Phi) + 2ik\zeta(B^2 - |U|^2))] + \\ & + \frac{1}{2}FrGa[F(U\bar{\Phi} + U\bar{\Phi}')] = [m(ikw + v')] + k^2B_v\zeta[mu^*] \\ & [\Phi'] = ik\zeta[U], \quad [\bar{\Phi}'] = ik\zeta[\bar{U}], \quad [S\Phi] = -WB\zeta[S], \quad [S\bar{\Phi}] = -\bar{W}B\zeta[\bar{S}] \end{aligned}$$

Здесь ζ – отклонение поверхности раздела от равновесного положения, $W = e^{i\alpha}$.

Уравнения и граничные условия записаны в безразмерном виде. В качестве единиц измерения длины, пульсационной и средней скорости, плотности, среднего давления, скорости основного течения, времени выбраны соответственно

$$L, \quad a\omega, \quad \frac{v}{h}, \quad \rho, \quad \frac{\rho v^2}{h^2}, \quad \frac{ab\omega^2 h}{v}, \quad \frac{h^2}{v}$$

Задача содержит следующие безразмерные параметры: α – разность фаз, $B = b/a$ – относительная амплитуда вертикальных вибраций, ρ_s – плотность твердой фазы в единицах плотности жидкости, $\Omega = \omega\rho_s/\gamma$ – относительное время релаксации, $Fr = a^2\omega^2/gh$ – число Фруда, $Ga = gh^3/\nu^2$ – число Галилея, $B_v = FrGaB$.

Число Fr , определенное по амплитуде поперечных вибраций, не информативно при анализе результатов. Дело в том, что при произвольном соотношении амплитуд продольных и поперечных вибраций, а также при произвольном сдвиге фаз α интенсивность вибрационного воздействия определяется большой полуосью эллипса вибраций. По этой причине в дальнейшем будет использоваться модифицированное число Фруда

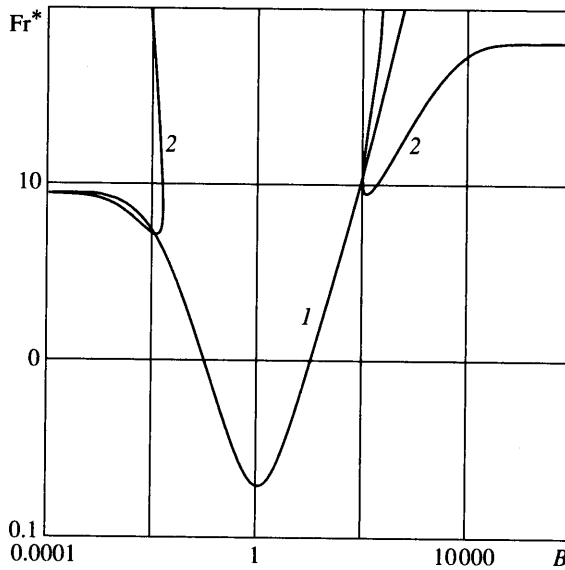
$$Fr^* = \frac{1}{2}Fr[1 + B^2 + \sqrt{1 + B^4 + 2B^2 \cos 2\alpha}]$$

В случае чисто горизонтальных вибраций ($B = 0$) нейтральная кривая $Fr(k)$ монотонных возмущений является убывающей функцией волнового числа [1]. При малых и умеренных значениях k ниже нее расположена нейтральная кривая колебательных возмущений, причем наблюдается вырождение по знаку фазовой скорости.

Задача (3.1)–(3.3) решалась численно методом дифференциальной прогонки. В присутствии поперечных вибраций монотонные возмущения невозможны; устойчивость течения по отношению к колебательным возмущениям с разным знаком фазовой скорости различна.

С появлением даже очень малых поперечных вибраций происходит быстрая и сложная перестройка спектра инкрементов. В результате фрагменты нейтральных кривых бывшей монотонной моды, а также нейтральных кривых волновых возмущений с положительной и отрицательной фазовой скоростью сложным образом переплетаются. Вследствие этого при смещении по волновому числу вдоль границы устойчивости фазовая скорость нейтральных возмущений меняет знак, причем иногда неоднократно. В общем случае граница устойчивости теперь образована пересекающимися нейтральными кривыми.

С увеличением амплитуды поперечных вибраций наблюдается некоторая дестабилизация системы. При $B = 1$ характерные числа Fr^* на два порядка меньше, чем в случае горизонтальных вибраций. С дальнейшим ростом B происходит повышение устойчивости. Критическое число Fr^* асимптотически выходит на предельное зна-



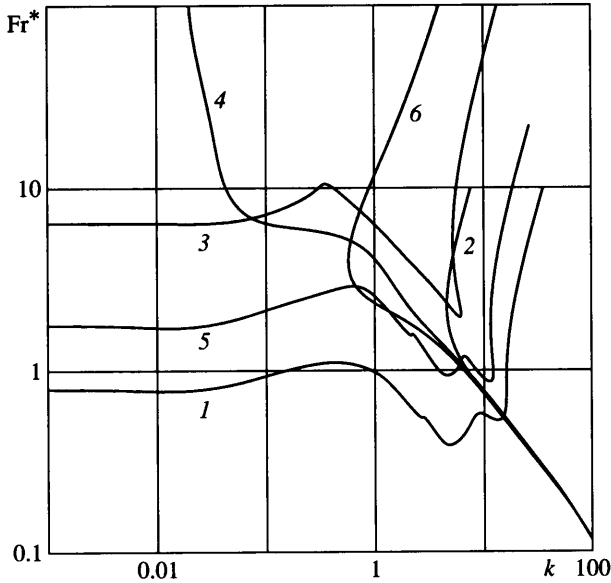
Фиг. 2. Влияние поперечных вибраций на порог устойчивости системы относительно возмущений с отрицательной (линия 1) и положительной (линия 2) фазовой скоростью; $\alpha = 0$, $k = 0.1$, $\Omega = 10$, $Ga = 10^6$

чение, соответствующее вертикальным вибрациям. На фиг. 2 представлены зависимости критического числа Fr^* от амплитуды поперечных вибраций B .

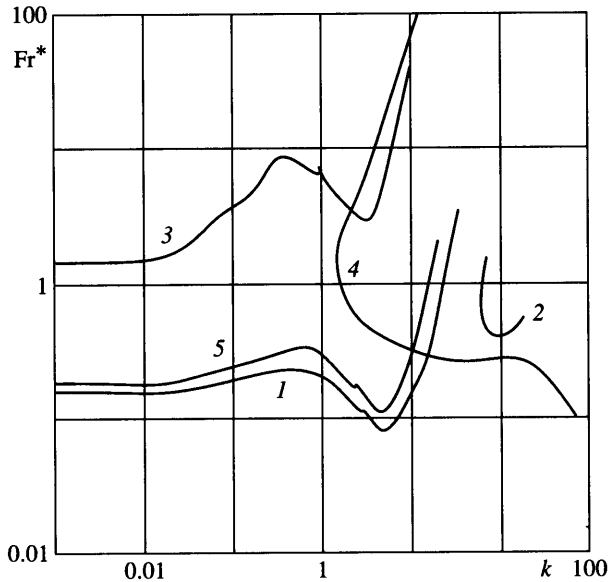
Отметим специфику поведения системы жидкость–взвесь в вибрационном поле. Вертикальные вибрации не приводят к неустойчивости в системе двух несмешивающихся однородных жидкостей, а также в случае, когда горизонтальный слой полностью заполнен взвесью. Существование границы раздела однородной жидкости и взвеси приводит к тому, что имеется порог устойчивости квазиравновесия даже при строго вертикальных вибрациях.

На фиг. 3 приведены нейтральные кривые $Fr^*(k)$ при различных значениях α и при небольшой интенсивности поперечных вибраций $B = 0.1$. Пересекающиеся линии 1, 2 образуют границу устойчивости при $\alpha = 0$ (линейно-поляризованные вибрации). С увеличением сдвига фаз до некоторой величины α^* наблюдается стабилизация системы, граница устойчивости на плоскости $Fr^* - k$ сдвигается вверх (кривые 3, 4; $\alpha = 3\pi/4$). С дальнейшим увеличением α устойчивость течения понижается (кривые 5, 6; $\alpha = 5\pi/6$). Такое поведение порога устойчивости может быть связано с тем, что (как отмечалось выше) с увеличением сдвига фаз интенсивность среднего течения уменьшается, и при $\alpha = \alpha^*$ среднее течение исчезает.

С увеличением амплитуды поперечных вибраций граница неустойчивости претерпевает существенные изменения (фиг. 4). В случае линейно-поляризованных вибраций (кривые 1, 2; $\alpha = 0$) существуют две неперекрывающиеся области неустойчивости. Правая часть границы (линия 2) смещена в область больших волновых чисел и ограничена слева на плоскости $Fr^* - k$. Увеличение сдвига фаз по-прежнему приводит к некоторой стабилизации течения, длинноволновая и коротковолновая области неустойчивости сближаются и перекрываются (кривые 3, 4; $\alpha = 3\pi/4$). С дальнейшим увеличением α ($\alpha > \alpha^*$) устойчивость системы понижается, нейтральные линии, формирующие порог устойчивости, снова расходятся. На фиг. 4 показана лишь длинноволновая часть границы (кривая 5, $\alpha = 5\pi/6$).

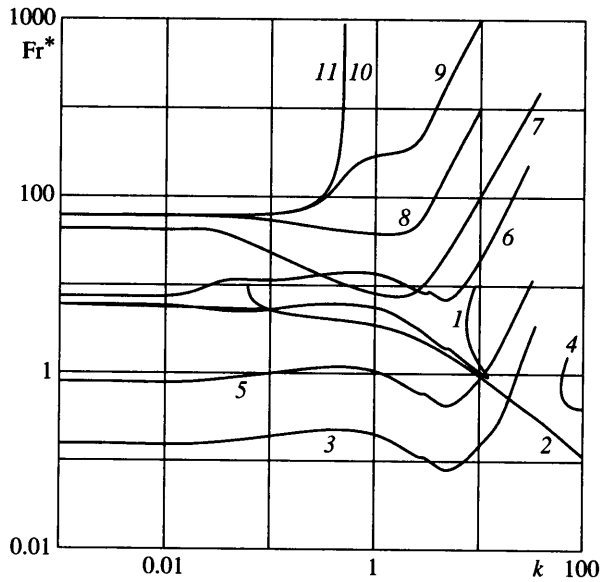


Фиг. 3. Нейтральные кривые при $B = 0.1$; $Ga = 1000000$, $\Omega = 10$. Сдвиг фаз $\alpha = 0$ (линии 1, 2); $\alpha = 3\pi/4$ (линии 3, 4); $\alpha = 5\pi/6$ (линии 5, 6)



Фиг. 4. Нейтральные кривые при $B = 1$; $Ga = 1000000$, $\Omega = 10$; $\alpha = 0$ (линии 1, 2); $\alpha = 3\pi/4$ (линии 3, 4); $\alpha = 5\pi/6$ (линия 5)

С дальнейшим увеличением интенсивности поперечных вибраций происходит следующая деформация границы устойчивости двухслойной системы. На фиг. 5 приведены нейтральные кривые для нескольких значений параметра B . Нейтральные кривые 1, 2 показывают положение границы устойчивости системы при $B = 0.01$. Нейтральные линии 3, 4 ограничивают снизу области неустойчивости при $B = 1$ (дестабилизация си-



Фиг. 5. Нейтральные кривые при различных интенсивностях поперечных вибраций; $Ga = 10^6$, $\Omega = 10$, $\alpha = 0$. Линии 1, 2 – $B = 0.01$; 3, 4 – $B = 1$; 5–11 – $B = 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000, \infty$

стемы, см. также фиг. 4). При значительной доле поперечной составляющей в вибрационном воздействии наблюдается стабилизация границы раздела, с увеличением B устойчивость системы повышается (кривые 10 и 11 в масштабе графика неразличимы). При этом коротковолновая область неустойчивости вытесняется вправо и вверх на плоскости $Fr^* - k$. Область неустойчивости уменьшается – правая граница смещается в сторону меньших волновых чисел. Минимумы нейтральных кривых быстро сдвигаются в длинноволновую область. При очень больших значениях параметра B формируется вертикальная асимптота нейтральных кривых. Такие деформации нейтральных кривых сопровождаются уменьшением характерных значений фазовой скорости колебательных возмущений с ростом B .

В случае строго вертикальных вибраций среднее течение исчезает. Краевая задача при этом содержит дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и может быть решена аналитически. Порог устойчивости двуслойной системы относительно вертикальных вибраций приведен на фиг. 5 (кривая 11). Нейтральная кривая имеет правую вертикальную асимптоту, положение которой сложным образом зависит от Ω . Вдоль всей нейтральной кривой фазовая скорость возмущений равна нулю, наиболее опасны возмущения с $k = 0$. Таким образом, при вертикальных вибрациях на границе раздела жидкости и смеси формируется длинноволновой неподвижный рельеф.

Заключение. Поведение взвеси мелких частиц во многом напоминает поведение однородной жидкости. Предпринятая в [2] попытка описать явления на поверхности раздела однородная жидкость–взвесь под воздействием горизонтальных вибраций, опираясь на результаты, полученные для системы двух несмешивающихся жидкостей, показала, что некоторые качественные черты явления такой простой моделью воспроизводятся правильно. Прежде всего, это относится к характеру зависимости порога устойчивости от волнового числа возмущений.

Поведение взвеси под действием высокочастотных вибраций обладает существенной спецификой. Во-первых, в случае системы однородных жидкостей среднее тече-

ние отсутствует даже при воздействии вибраций эллиптической поляризации, в то время как в случае взвеси такое течение возникает и оно довольно интенсивно. Во-вторых, порог устойчивости основного состояния определяется не только эффективной плотностью взвеси, но и характерным для нее параметром – отношением размера частиц к толщине динамического вязкого скин-слоя. Это свидетельствует о важном значении инерционных свойств частиц. Лишь в пределе очень мелких (пылевых) частиц, когда основной вклад в силу межфазного взаимодействия вносит сила Стокса, взвесь действительно ведет себя как однородная жидкость с перенормированной плотностью. В-третьих, с возрастанием частоты вибрации, когда толщина вязкого скин-слоя оказывается сравнимой или меньше размера частиц, становится существенным сдвиг фаз колебаний несущей жидкости и частиц, что приводит, в частности, к колебательному характеру неустойчивости. В-четвертых, при строго вертикальных высокочастотных вибрациях системы однородных жидкостей поверхность раздела устойчива и вся система покоится относительно границ, в то время как взвешенные в жидкости частицы при таких вибрациях совершают колебательные движения, что (как следует из расчетов) может привести к появлению неустойчивости.

Работа выполнена при поддержке INTAS (001-0617).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лобов Н.И., Любимов Д.В., Любимова Т.П. Поведение двуслойной системы жидкость–взвесь в вибрационном поле // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 6. С. 55–62.
2. Kozlov V.G. Experimental investigation of vibrational convection in pseudoliquid layer // Rev. Proc. 1st. Intern. Symp. on Hydromech. and Heat/Mass Transfer in Microgravity. Perm; Moscow, 1991. Amsterdam: Gordon and Breach, 1991. P. 57–61.
3. Ivanova A., Kozlov V., Evesque P. Patterning of “liquefied” sand surface in a cylinder filled with liquid and subjected to horizontal vibrations // Europhys. Lett. 1996. V. 35. № 3. P. 159–164.
4. Lyubimov D.V., Straube A.V. Numerical simulation of the behavior of suspension in high frequency vibrational field // Proc. 16th IMACS World Congr. Scient. Computation, Applied Mathematics and Simulation. Lausanne, 2000. Ср. 411–417.
5. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.

Пермь

Поступила в редакцию
30.III.2004