МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 2005

УДК 533.72

 И. Б. ЧЕКМАРЕВ

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ МОДЕЛИ "НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ" В ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

В линейном приближении рассматривается построение модели "несжимаемой жидкости" в газовой динамике. Использование в качестве масштаба характерного времени диссипативной релаксации в газе приводит к иной форме безразмерного уравнения Больцмана. Для предельного случая малых числе Кнудсена строится приближенное решение в форме многомасштабного асимптотического разложения Гильберта. Оказывается, что для медленных процессов при малой неизотермичности асимптотическое разложение для линеаризованного уравнения Больцмана приводит на первом этапе к уравнениям для скорости, давления и температуры, которые не содержат плотности (квазинесжимаемое приближение). Плотность зависит от температуры и может быть определена в случае необходимости из уравнения состояния. Уравнения следующего приближения включают эффекты Барнетта, причем определение скорости сводится к общей проблеме нахождения векторного поля по заданным расхождению и вихрю. На простом примере прогрева неподвижного газа в полупространстве показано, что процесс установления температуры сопровождается оттоком газа от стенки.

Ключевые слова: приближение несжимаемой жидкости, медленные неизотермические течения, малые числа Кнудсена, эффекты Барнетта, переходные процессы.

Основным уравнением кинетической теории разреженных газов является интегро-дифференциальное уравнение Больцмана для одночастичной функции распределения. В предельном случае малых чисел Кнудсена области применимости уравнения Больцмана и уравнений гидродинамического приближения перекрываются, что ставит интересный вопрос о соотношении их решений. В 1912 г. Д. Гильберт показал, что решение уравнения Больцмана в форме простого асимптотического разложения по степеням малого параметра приводит к макроскопическому описанию поведения газа в гидродинамических терминах плотности, массовой скорости и температуры [1, 2]. Однако прямолинейный подход Гильберта порождает ряд проблем. Во-первых, в безразмерном уравнении Больцмана малый параметр стоит перед всеми производными. Следовательно, разложение Гильберта представляет собой так называемое внешнее разложение, теряющее свою справедливость в начальных и пограничных слоях Кнудсена [3–5]. Во-вторых, источником неравномерного поведения прямых асимптотических разложений является также наличие бесконечной области изменения независимой переменной. В этом случае неравномерность демонстрирует себя неограниченным ростом решения вследствие появления "вековых" членов. Впервые это было показано С. Богуславским еще в 1915 г. [6]. В результате решение Гильберта оказывается неспособным правильно описывать диссипативные процессы в газе. Возникает необходимость в регуляризации разложения, пример которой для простейшего случая звуковой волны приведен в работе [7]. Д. Энског, введя помимо разложения функции распределения также и разложение временнóго оператора, сумел получить известные газодинамические уравнения Навье–Стокса [1, 2]. Однако процедура Энскога также не содержит механизма регуляризации, что может приводить к трудностям в высших приближениях [8].

В начале 70-х годов прошлого столетия был указан новый тип асимптотического разложения, описывающий медленные неизотермические течения газа [9–12]. Выдвинутая идея была основана на введении другой системы масштабов. При переходе к безразмерной форме уравнения Больцмана в методах Гильберта и Энскога в качестве масштабов как для молекулярной скорости, так и для массовой скорости газа используется величина порядка скорости звука (например, $C_s^2 = kT_s/m$, T_s – масштаб температуры), а для времени – величина, характеризующая время прохождения звуковой волной масштабного макроскопического расстояния ($t_s = L/C_s$). При рассмотрении медленных течений газа естественно для массовой скорости ввести свой масштаб εC_s, где ε – предполагаемое малым число Кнудсена. Новый масштаб $t_s' = L/\varepsilon C_s$, т.е. величина порядка времени диссипативной релаксации в газе, используется также для времени. Иная система масштабов приводит к иной форме безразмерного уравнения Больцмана и, следовательно, к иной форме решения. Новый подход позволил, в частности, обнаружить бессиловую конвекцию, обусловленную эффектами Барнетта [10]. Указанный путь позволяет в случае слабой неизотермичности получить квазинесжимаемую систему уравнений Навье–Стокса [13, 14]. В [15] было показано, что медленные неизотермические течения и квазинесжимаемые течения газа можно объединить в класс квазистационарных медленных течений.

В настоящей работе асимптотическое разложение для случая медленного течения слабо неизотермического газа строится для линеаризованного уравнения Больцмана с помощью многомасштабной техники [3–5]. Это позволяет продемонстрировать уникальность проблемы медленных течений газа, где обычный метод Гильберта обеспечивает в линейном случае равномерность разложения по крайней мере вплоть до уровня Барнетта. Для гидродинамических переменных нулевого приближения получена квазинесжимаемая система уравнений. Для следующего приближения нахождение скорости сводится к общей проблеме определения векторного поля по заданным расхождению и вихрю [16]. Для случая полупространственной конфигурации приведено аналитическое решение, описывающее отток газа от стенки в процессе прогрева.

Пусть неподвижный одноатомный газ с постоянными плотностью n_s и температурой T_s заполняет некоторый фиксированный объем. Предполагаем, что функция распределения газа представляет собой абсолютный максвеллиан f_0. Пусть в газе создается малое возмущение с характерной плотностью n_s'. Используя для невозмущенной функции и функции возмущения соответственно масштабы $f_s = n_s/C_s^3$, $f_s' = n_s'/C_s^3$ представим функцию распределения газа в безразмерном виде как

$$f = f_0 + \gamma f \tag{1}$$

$$f_0 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\exp\left(-\frac{c^2}{2}\right), \quad \gamma = \frac{n_s'}{n_s} \ll 1 \tag{2}$$

Подставляя (1) в безразмерное уравнение Больцмана, получим для функции $\phi = f'/f_0$ с учетом временного масштаба t_s' в линейном приближении уравнение

$$\varepsilon^2\frac{\partial\phi}{\partial t} + \varepsilon\mathbf{c}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{r}} = L\phi$$

$$L\phi = \int f_0(\mathbf{c}_1)[\phi(\mathbf{c}_1') + \phi(\mathbf{c}') - \phi(\mathbf{c}_1) - \phi(\mathbf{c})]gbdbd\beta d\mathbf{c}_1 \tag{3}$$

В уравнении (3) и далее $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, $\mathbf{ab}$ – скалярное и диадное произведения векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, двоеточие в $\mathbf{A}:\mathbf{B}$ обозначает свертку тензоров второго ранга $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, значок градуса в $\mathring{\mathbf{A}}$ – девиаторную часть тензора $\mathbf{A}$.

Макроскопические параметры возмущения определяются через функцию распределения ϕ следующим образом:

$$n = \int f_0\phi d\mathbf{c}, \quad \mathbf{v} = \int \mathbf{c} f_0\phi d\mathbf{c}, \quad u = \int \frac{c^2}{2} f_0\phi d\mathbf{c}$$
$$u = 3/2p, \quad p = n + T \tag{4}$$

Использование линеаризованного уравнения (3) ограничивает, конечно, применимость результатов областью малых возмущений в газе, однако позволяет шире использовать аналитические методы [2].

Для предельного случая малых чисел Кнудсена ε асимптотическое приближение к решению уравнения (3) будем искать с помощью техники многомасштабных разложений [3–5]. Следуя основной идее метода, полагаем, что функция распределения зависит явно от вспомогательных переменных $t_k = \varepsilon^k t$, которые рассматриваются как независимые. Таким образом,

$$\phi = \phi(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t_0, t_1, \ldots, t_N), \quad \frac{\partial}{\partial t} = \sum_0^N \varepsilon^k \frac{\partial}{\partial t_k} \tag{5}$$

Число N определяет временную область справедливости асимптотического приближения. Кроме того, полагаем

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon\phi_1 + \varepsilon^2\phi_2 + \varepsilon^3\phi_3 + \ldots \tag{6}$$

Так как любое разложение функции распределения означает и соответствующее разложение ее моментов, то из (4) и (6) следует

$$n = \sum \varepsilon^k n_k, \quad \mathbf{v} = \sum \varepsilon^k \mathbf{v}_k, \quad u = \sum \varepsilon^k u_k$$
$$p_k = n_k + T_k, \quad u_k = 3/2p_k \tag{7}$$

$$n_k = \int f_0\phi_k d\mathbf{c}, \quad \mathbf{v}_k = \int \mathbf{c} f_0\phi_k d\mathbf{c}, \quad u_k = \int \frac{c^2}{2} f_0\phi_k d\mathbf{c} \tag{8}$$

Подстановка разложений (5) и (6) в уравнение (3) приводит к цепочке интегральных уравнений типа

$$L\phi_k = Q_k \tag{9}$$

$$Q_0 = 0, \quad Q_1 = \mathbf{c}_1\frac{\partial\phi_0}{\partial\mathbf{r}}, \quad Q_2 = \frac{\partial\phi_0}{\partial t_0} + \mathbf{c}\frac{\partial\phi_1}{\partial\mathbf{r}}$$
$$Q_3 = \frac{\partial\phi_1}{\partial t_0} + \frac{\partial\phi_0}{\partial t_1} + \mathbf{c}\frac{\partial\phi_2}{\partial\mathbf{r}}, \ldots \tag{10}$$

Решение уравнений (9) можно представить в виде суммы решения соответствующего однородного уравнения g_k и любого частного решения h_k исходного неоднородного уравнения $\phi_k = g_k + h_k$. Решение однородного уравнения имеет вид

$$g_k = \sum_1^5 a_{kj}\psi_j$$
$$\psi_1 = 1, \quad \psi_2 = c_x, \quad \psi_3 = c_y, \quad \psi_4 = c_z, \quad \psi_5 = c^2 \tag{11}$$

Здесь ψ_i (i = 1–5) – собственные функции уравнения $L\psi = 0$. Однозначность частных решений обеспечивается условиями Гильберта [1, 2]

$$\int \psi_j f_0 h_k d\mathbf{c} = 0 \tag{12}$$

Тогда с помощью соотношений (8) и (12) можно выразить величины a_{kj} через макроскопические параметры n_k, $\mathbf{v}_k$, u_k. В результате находим

$$g_k = -1/2(c^2-5)n_k + \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{c} + 1/2(c^2-3)p_k \tag{13}$$

Неоднородная часть в (9) должна удовлетворять условиям существования решения

$$\int \psi_j f_0 Q_k d\mathbf{c} = 0 \tag{14}$$

Перейдем теперь к последовательному рассмотрению уравнений в цепочке (9). В нулевом приближении имеем

$$\phi_0 = -1/2(c^2-5)n_0 + \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{c} + 1/2(c^2-3)p_0 \tag{15}$$

В следующем, первом, приближении вычисление интегралов (14) дает для макроскопических переменных уравнения

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0, \quad \nabla p_0 = 0 \tag{16}$$

Далее будем рассматривать частный случай [11, 13, 14]

$$p_0 = 0 \Rightarrow n_0 + T_0 = 0 \tag{17}$$

Условия (16) свидетельствуют о недостаточности приближения “несжимаемости” для такой существенно сжимаемой среды как газ.

С помощью (15) и (17) преобразуем интегральное уравнение первого приближения к виду

$$L\phi_1 = \frac{1}{2}(c^2-5)\mathbf{c} \cdot \nabla T_0 + \mathring{\mathbf{c}\mathbf{c}} : \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{v}_0 \tag{18}$$

Опуская известные детали, выпишем решение уравнения (18)

$$\phi_1 = g_1 + h_1$$

$$g_1 = -1/2(c^2-5)n_1 + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{c} + 1/2(c^2-3)p_1 \tag{19}$$

$$h_1 = -\mathbf{A} \cdot \nabla T_0 - \mathbf{B} : \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{v}_0$$

где величины **A** и **B** определяются интегральными уравнениями [1, 2]

$$L\mathbf{A} = -1/2(c^2-5)\mathbf{c}, \quad L\mathbf{B} = -\mathring{\mathbf{c}\mathbf{c}} \tag{20}$$

Перейдем к следующему приближению. Вычислив интегралы (14) для соответствующего уравнения (9), получаем условия разрешимости в форме

$$\frac{\partial n_0}{\partial t_0} + \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t_0} + \nabla p_1 + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{\Pi}_0 = 0 \tag{21}$$

$$5/2\nabla\cdot\mathbf{v}_1 + \nabla\cdot\mathbf{q}_0 = 0$$

$$\mathbf{\Pi}_k = -2\mu\overset{\circ}{\mathbf{E}}_k,\quad \mathbf{q}_k = -\lambda\nabla T_k,\quad k = 0, 1, \ldots$$
$$\mu = -\frac{1}{10}\int\mathbf{B} : L\mathbf{B}f_0 d\mathbf{c},\quad \lambda = -\frac{1}{3}\int\mathbf{A}\cdot L\mathbf{A}f_0 d\mathbf{c} \tag{22}$$

Здесь $\overset{\circ}{\mathbf{E}}_k$ – тензор скоростей сдвига для $\mathbf{v}_k$.

Исключая $\nabla\cdot\mathbf{v}_1$ из первого и последнего уравнений (21), получаем с учетом (17) уравнение переноса тепла для частного случая постоянного давления

$$\frac{5}{2}\frac{\partial T_0}{\partial t_0} - \lambda\Delta T_0 = 0 \tag{23}$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\cdot\mathbf{\Pi}_k = -2\mu\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{E}}_k = -\mu\left(\Delta\mathbf{v}_k + \frac{1}{3}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}_k)\right)$$

то первое уравнение в (16) и второе уравнение в (21) составляют систему для определения скорости $\mathbf{v}_0$ и давления p_1 в приближении модели “несжимаемой жидкости”

$$\nabla\cdot\mathbf{v}_0 = 0,\quad \frac{\partial\mathbf{v}_0}{\partial t_0} + \nabla p_1 - \mu\Delta\mathbf{v}_0 = 0 \tag{24}$$

Существенно, что в отличие от обычного условия “несжимаемости” $n_0 = \text{const}$, здесь возмущенная плотность газа оказывается переменной величиной и определяется уравнением состояния. Система уравнений (23), (24) должна быть дополнена начальными условиями, граничными условиями непроницаемости и прилипания для скорости, а также граничными условиями для температуры. Например, для рассматриваемой ситуации слабой неизотермичности можно поставить следующие условия

$$\mathbf{v}_0 = 0,\quad T_0 = 0 \tag{25}$$

$$v_{0n} = 0,\quad v_{0\tau} = 0,\quad T_0 = T_w \tag{26}$$

где индексами n и τ отмечены нормальная и касательная составляющие скорости.

Первое уравнение в (24) удовлетворяется, если ввести векторный потенциал [16]

$$\mathbf{v}_0 = \nabla\times\mathbf{w}_0,\quad \nabla\cdot\mathbf{w}_0 = 0 \tag{27}$$

Тогда, применяя операцию ($\nabla\times$) к второму уравнению в (24), получим известное бигармоническое уравнение для векторного потенциала [17]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0} - \mu\Delta\right)\Delta\mathbf{w}_0 = 0 \tag{28}$$

Если отсутствуют внешние причины для движения газа, то уравнение (28) с однородными начальными и граничными условиями (25), (26) имеет нулевое решение $\mathbf{w}_0 = 0$, т.е.

$$\mathbf{v}_0 = 0,\quad p_1 = 0 \tag{29}$$

Таким образом, в этом случае газ остается неподвижным, а уравнение (23) вместе с тепловыми начальным и граничными условиями описывает процесс установления в газе температуры, причем соответствующее изменение плотности определяется соотношением (17). Возвратимся к рассматриваемому второму приближению. Преобразуя правую часть соответствующего интегрального уравнения (9) с помощью (15), (17) и (19), получим

$$L\phi_2 = \frac{1}{2}(c^2-5)\mathbf{c}\cdot\nabla T_1 = \overset{\circ}{\mathbf{c}\mathbf{c}} : \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\mathbf{v}_1 +$$
$$+\frac{1}{5}\lambda(c^2-5)\Delta T_0 - \mathbf{c}\mathbf{A} : \nabla\nabla T_0 + \mu\mathbf{c}\cdot\Delta\mathbf{v}_0 - \mathbf{c}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left(\mathbf{B} : \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\mathbf{v}_0\right) \qquad (30)$$

Получение условий разрешимости для уравнения третьего приближения не требует знания детального вида частного решения (30). Действительно, вычисляя интегралы (14), находим

$$\frac{\partial n_1}{\partial t_0} + \frac{\partial n_0}{\partial t_1} + \nabla\cdot\mathbf{v}_2 = 0$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}_1}{\partial t_0} + \frac{\partial\mathbf{v}_0}{\partial t_1} + \nabla p_2 - \mu\left(\Delta\mathbf{v}_1 + \frac{1}{3}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}_1)\right) + 2\mu^2\nabla\Delta T_0 = 0 \qquad (31)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_0} + \frac{5}{2}\nabla\cdot\mathbf{v}_2 - \lambda\Delta T_1 = 0$$

При вычислении использовались соотношения

$$\int\mathbf{c}\mathbf{c}h_2 f_0 d\mathbf{c} = \mathbf{\Pi}_1 + \mathbf{\Pi}_B, \quad \int\frac{c^2}{2}\mathbf{c}h_2 f_0 d\mathbf{c} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_B$$

$$\mathbf{\Pi}_B = 3\mu^2\overset{\circ}{\nabla\nabla} T_0, \quad \mathbf{q}_B = 3/2\mu^2\Delta\mathbf{v}_0 \qquad (32)$$

$$\mathbf{A} = 1/5\lambda(c^2-5)\mathbf{c}, \quad \mathbf{B} = \mu\overset{\circ}{\mathbf{c}\mathbf{c}}, \quad \lambda = 15/4\mu$$

Нетрудно убедиться, что

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\cdot\mathbf{\Pi}_B = 2\mu^2\nabla\Delta T_0, \quad \nabla\cdot\mathbf{q}_B = 0 \qquad (33)$$

Исключая $\nabla\mathbf{v}_2$ из первого и последнего уравнений в (31), получаем уравнение переноса для величины T_1

$$\frac{5}{2}\frac{\partial T_1}{\partial t_0} - \lambda\Delta T_1 = \frac{\partial p_1}{\partial t_0} - \frac{5}{2}\frac{\partial T_0}{\partial t_1} \qquad (34)$$

Так как T_0 удовлетворяет уравнению (23), то общее решение (34) представим в виде

$$T_1 = T_1^* - t_0\left(\frac{\partial T_0}{\partial t_1}\right) \qquad (35)$$

где T_1^* есть решение неоднородного уравнения

$$\frac{5}{2}\frac{\partial T_1^*}{\partial t_0} - \lambda\Delta T_1^* = \frac{\partial p_1}{\partial t_0} \qquad (36)$$

В разложении T по степеням ε член εT_1 будет малой поправкой к T_0 только в случае $\varepsilon t_0 \ll 1$. Для того чтобы разложение для температуры было справедливо и при временах порядка ε^{-1}, секулярный член в (35) должен отсутствовать, т.е. необходимо принять $\partial T_0/\partial t_1 = 0$.

Таким образом, уравнение (23) оказывается справедливым и в интервале времени t_1. Температура T_1 определяется теперь уравнением (36). Для оставшихся неизвестных из первого уравнения в (21) и второго уравнения в (31) получаем

$$\begin{gathered}\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = \frac{\partial T_0}{\partial t_0} \\ \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t_0} + \nabla p_2 - \mu\left(\Delta \mathbf{v}_1 - \frac{1}{3}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}_1)\right) = -\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t_1} - 2\mu^2 \nabla \Delta T_0\end{gathered} \tag{37}$$

Нахождение распределения величины $\mathbf{v}_1$ сводится к общей задаче определения векторного поля по заданному расхождению и вихрю [16]. Представляя поле скоростей как сумму потенциального и вихревого полей, вводим скалярный и векторный потенциалы соотношениями

$$\mathbf{v}_1 = \nabla\theta_1 + \nabla \times \mathbf{w}_1, \quad \nabla \cdot \mathbf{w}_1 = 0 \tag{38}$$

Подставляя (38) в первое уравнение (37), получаем с учетом (23) для определения скалярного потенциала уравнение

$$\Delta(\theta_1 - 2/5\lambda T_0) = 0 \tag{39}$$

Подставляя далее (38) во второе уравнение (37), получаем

$$\nabla \times \left[\left(\frac{\partial}{\partial t_0} - \mu\Delta\right)\mathbf{w}_1 + \frac{\partial \mathbf{w}_0}{\partial t_1}\right] + \nabla\left(p_2 + \frac{\partial \theta_1}{\partial t_0}\right) = 0 \tag{40}$$

Применение операции ($\nabla\times$) дает для векторного потенциала $\mathbf{w}_1$ уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0} - \mu\Delta\right)\Delta \mathbf{w}_1 = -\frac{\partial}{\partial t_1}\Delta \mathbf{w}_0 \tag{41}$$

С учетом (28) нетрудно убедиться, что уравнение (41) удовлетворяется подстановкой

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_1^* - t_0\left(\frac{\partial \mathbf{w}_0}{\partial t_1}\right)$$

где $\mathbf{w}_1^*$ есть решение аналогичного (28) бигармонического уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0} - \mu\Delta\right)\Delta \mathbf{w}_1^* = 0 \tag{42}$$

Чтобы в решении для $\mathbf{w}_1$ избежать секулярного роста при больших временах, следует положить $\partial \mathbf{w}_0/\partial t_1 = 0$.

Таким образом, как уравнение теплопроводности (23) для T_0, так и уравнение (28) для векторного потенциала $\mathbf{w}_0$ оказываются справедливыми по крайней мере до времен порядка ε^{-1}. Следовательно, для медленных течений газа классический метод Гильберта дает в линейном приближении равномерно пригодное разложение вплоть до барнеттовского уровня.

Применение операции ($\nabla\cdot$) к соотношению (40) приводит к уравнению Пуассона для давления

$$\Delta p_2 = -\frac{\partial^2 T_0}{\partial t_0^2}$$

В целом уравнения (39) и (42) описывают бессиловую конвекцию газа, возникающую в газе в процессе его прогрева или охлаждения.

Простое аналитическое решение имеет место для задачи о прогреве, например, неподвижного газа, заполняющего верхнее полупространство $y \geq 0$. Предполагается, что в начальный момент на поверхности $y = 0$ задается постоянная температура T_w. В этом случае $\mathbf{w}_0 = 0$, $\mathbf{w}_1 = 0$. Решая уравнение (23) с начальными и граничными условиями (25), (26), находим распределение температуры в газе

$$T_0 = T_w[1 - \Phi(z)], \quad \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp(-x^2)dx, \quad z = \frac{y}{2}\sqrt{\frac{5}{2\lambda t_0}}$$

Тогда однократное интегрирование уравнения (39) с граничным условием непроницаемости на стенке для скорости дает

$$v_{1y} = \frac{\partial \theta_1}{\partial y} = T_w\sqrt{\frac{2\lambda}{5\pi t_0}}\left[1 - \exp\left(-\frac{5y^2}{8\lambda t_0}\right)\right]$$

Таким образом, в рассмотренном линейном случае отток газа от стенки в процессе его прогрева описывается барнеттовскими членами.

Заключение. Процесс диссипативной релаксации газа характеризуется наличием двух этапов: начального этапа Эйлера, когда вязкость и теплопроводность еще не играют заметной роли, и основного этапа Навье–Стокса. В гидродинамическом пределе малых чисел Кнудсена временные масштабы этих двух режимов существенно различны, что создает значительные трудности при построении асимптотического приближения для уравнения Больцмана. В частности, известное разложение Гильберта, построенное на характерных для режима Эйлера масштабах, оказывается неспособным описать правильно диссипативные процессы в газе. Один из возможных путей преодоления этой проблемы состоит в дополнении метода Гильберта механизмом регуляризации разложения. Однако можно также указать ситуации, когда и классическая процедура Гильберта приводит к равномерно пригодному асимптотическому разложению. В настоящей работе на примере линеаризованного уравнения Больцмана показано, что для случая медленных течений, когда начальный этап Эйлера отсекается, простое разложение приводит к гидродинамическим уравнениям, описывающим релаксацию газа сразу в режиме Навье-Стокса. Существенно, что для такого квазистационарного случая изменение скорости, давления и температуры определяется в главном приближении уравнениями, не содержащими плотности. Последняя может быть определена дополнительно из уравнения состояния. В следующем приближении нахождение скорости сводится к общей проблеме определения векторного поля по заданным расхождению и вихрю. В результате оказывается, что процесс прогрева неподвижного газа сопровождается возникновением вторичных течений. Для простого одномерного примера приведено аналитическое решение, демонстрирующее отток газа от стенки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
2. *Cercignani C.* Theory and Applicaiton of the Boltzmann Equation. Edinburgh: Scottish Acad. Press, 1975. = *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.
3. *Kevorkian J., Cole J.D.* Multiple Scale and Singular Perturbation Methods. N.Y. etc.: Springer, 1996. 632 p.
4. *Hayfeh A.* Perturbation Methods. N.Y. etc.: Wiley, 1973. = *Найфе А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
5. *Smith D.R.* Singular–Perturbation Theory. London: Cambridge Univ. Press, 1985. 500 p.
6. *Boguslawski S.* Zum Problem der inneren Reibung in der kinetischen Theorie // Math. Ann. (Leipzig). 1915. Bd. 76. S. 431–437.
7. *Чекмарев И.Б., Чекмарева О.М.* Метод многомасштабных разложений в проблеме Гильберта // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 4. С. 158–164.
8. *Бобылев А.В.* О методах Чепмена–Энскога и Грэда решения уравнения Больцмана // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. № 1. С. 71–75.
9. *Галкин В.С., Коган М.Н., Фридлендер О.Г.* О некоторых кинетических эффектах в течениях сплошной среды // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 3. С. 13–21.
10. *Галкин В.С., Коган М.Н., Фридлендер О.Г.* О свободной конвекции в газе в отсутствие внешних сил // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 3. С. 98–107.
11. *Коган М.Н., Галкин В.С., Фридлендер О.Г.* О напряжениях, возникающих в газах вследствие неоднородности температуры и концентраций. Новые типы свободной конвекции // Успехи физ. наук. 1976. Т. 119. № 1. С. 111–125.
12. *Галкин В.С., Шавалиев М.Ш.* Газодинамические уравнения высших приближений метода Чепмена–Энскога // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 4. С. 3–28.
13. *De Masi A., Esposito R., Lebowitz J.L.* Incompressible Navier–Stokes and Euler limits of the Boltzmann equation // Communs Pure Appl. Math. 1989. V. 42. № 3. P. 1189–1214.
14. *Esposito R., Lebowitz J.L., Marra R.* On the derivation of hydrodynamics from the Boltzmann equation // Phys. Fluids. 1999. V. 11. № 8. P. 2354–2366.
15. *Bobylev A.V.* Quasistationary hydrodynamics for the Boltzmann equation // J. Stat. Physics. 1995. V. 80. № 5/6. P. 1063–1083.
16. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1970. 568 с.
17. *Frank Ph., Mises R.* Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. Braunschweig: Vieweg, 1927 = *Франк Ф., Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Л.; М.: ОНТИ, 1937. 998 с.

Аахен

Поступила в редакцию
1.X.2003