

УДК 532.526.4

© 2005 г. В. В. МИХАЙЛОВ

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ ЗАКОН ДЕФЕКТА СКОРОСТИ ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Рассмотрены течения несжимаемой жидкости в плоском турбулентном пограничном слое. Проведено уточнение известного закона следа Коулса, позволившее обеспечить гладкое сопряжение профиля скорости турбулентного пограничного слоя с внешним течением и расширить область справедливости закона на случай больших положительных градиентов давления. Проверка точности полученной аналитической аппроксимации проведена сравнением с известными из экспериментов равновесными профилями скорости. Используя предложенную зависимость, выведено соотношение для расчета распределения напряжения Рейнольдса по поперечному сечению равновесного пограничного слоя. Разграничены режимы распределения давления, при которых существует однозначность или двузначность равновесного течения в турбулентном пограничном слое.

Ключевые слова: пограничный слой, турбулентность, дефект скорости, напряжение Рейнольдса, равновесное течение.

Модернизацию закона следа Коулса удобно провести на примере хорошо изученных равновесных течений в турбулентном пограничном слое. Согласно результатам испытаний, такое равновесное течение при реальных числах Рейнольдса может существовать на тех участках тела, где параметр Клаузера постоянен. Поскольку закон дефекта скорости справедлив, строго говоря, лишь для плоскопараллельных течений, равновесный (неизменный) профиль этой скорости свидетельствует о том, что отличие течения в пограничном слое от плоскопараллельного мало. Это обстоятельство сделало возможным использование экспериментальных профилей дефекта скорости (вместо менее обоснованных моделей турбулентной вязкости) для замыкания уравнений равновесного турбулентного пограничного слоя. Такой подход применялся в ряде исследований, но имел существенные недостатки. Во-первых, выбранные ранее профили могли использоваться лишь для определенных ограниченных режимов равновесного течения и, во-вторых, эти профили имели разрыв производной скорости на верхней границе пограничного слоя и, как следствие, отличное от нуля напряжение Рейнольдса на ней. Указанные недостатки устранены в данной статье. С этой целью для всего диапазона значений параметра Клаузера введены универсальные масштабы скорости и толщины пограничного слоя. Благодаря этому, закон дефекта скорости записан в едином виде. Для аппроксимации профиля дефекта скорости найдена единая однопараметрическая зависимость от известного параметра Клаузера, достаточно хорошо описывающая экспериментальный профиль и на его верхней границе слоя гладко (до первой производной) сопрягающимся с невозмущенным потоком. Это позволило получить аналитическое решение для распределения напряжения Рейнольдса с нулевыми значениями напряжения и его производной на верхней границе слоя.

1. Универсальные масштабы для профиля дефекта скорости. Введем координаты x, y – соответственно вдоль и по нормали к поверхности тела. Пусть $u_0(x)$ – скорость, рассчитанная с помощью уравнения Бернулли при заданном распределении давления

по поверхности тела; δ^* , θ толщины вытеснения и потери импульса; $H = \delta^*/\theta$; δ – толщина пограничного слоя; p , ρ – давление и плотность; ν – кинематическая вязкость; τ_w – касательное напряжение при $y = 0$; $c_f = 2\tau_w/\rho u_0^2$; $\epsilon = (c_f/2)^{1/2}$; $\gamma = \delta^*/\epsilon^2$; $\beta = \gamma(d \ln u_0/dx)$ – параметр Клаузера; $Re_* = u_0 \delta^*/\nu$.

Закон дефекта скорости выводится из условия плоскопараллельности течения [2], что означает достаточно большой продольный характерный размер слоя по сравнению с поперечным. В этом случае безразмерный профиль дефекта скорости локально равновесного течения ($Re_* \rightarrow \infty$) зависит лишь от безразмерной переменной $\zeta = y\epsilon/\delta^*$ и местного значения β [1]. При реальных числах Re равновесие не реализуется, поскольку градиент давления не обеспечивает условие $\beta = \text{const}$ на достаточно протяженном (в масштабе δ) участке тела. При выполнении этого условия течение близко к равновесному, поскольку непараллельность относительно слабо влияет на формирование профиля дефекта скорости. Поэтому параметр β можно считать единственным параметром подобия для профиля дефекта скорости равновесных течений. При этом характерной толщиной слоя служит δ^*/ϵ [3], а характерной скоростью – $u_\tau = \epsilon u_0$. Как показано в [4], равновесное течение существует и при $\epsilon = 0$, т.е. и для отрывного профиля скорости. Следовательно, при исследовании этого режима из u_τ и δ^*/ϵ необходимо исключить ϵ , используя критерий подобия β . Тогда для новых характерных масштабов можно, например, записать $u_p = u_0 \epsilon \beta^{1/2}$, $\delta_p = \delta^*/(\epsilon \beta^{1/2})$, так как произведение $\epsilon \beta^{1/2}$ не зависит от ϵ . Такие преобразования применяются в [5] при $\beta \geq 1$. Однако они не являются универсальными, поскольку их нельзя использовать при $\beta \leq 0$. Указанная универсальность обеспечивается введением вместо $\beta^{1/2}$ некоторых функций $s_1(\beta) > 0$, $s_2(\beta) > 0$, таких, что $s = O(1)$ при $\beta = O(1)$ и $s \sim \beta^{1/2}$ при $\beta \rightarrow \infty$. Тогда универсальными масштабами будут

$$u_u = u_0 \epsilon s_1, \quad \delta_u = \frac{\delta^*}{(\epsilon s_2)} \quad (1.1)$$

Как показали результаты измерений [4], при отрывном течении значение $\epsilon \beta^{1/2} \approx 0.1$, т.е. величина порядка единицы. Таким образом для этого режима характерными масштабами являются u_0 и δ^* . При этом из интегрального уравнения сохранения импульса, полагая $\epsilon \equiv 0$ и $H \leq 3$, имеем оценку $d\delta^*/dx \leq 0.05$. Следовательно, наклон верхней границы слоя мал, но конечен, и закон дефекта скорости для отрывного равновесного течения нельзя считать асимптотически точным при $Re \rightarrow \infty$. Это замечание относится ко всем результатам исследований отрывных равновесных течений (например, [6]), использующих закон дефекта скорости. В то же время согласно результатам многочисленных измерений, малый наклон верхней границы слоя обеспечивает хорошую практическую точность этого закона и для этого режима. Учитывая сказанное и результаты [2], запишем универсальный закон дефекта скорости равновесного течения в виде

$$\frac{u - u_0}{u_u} = \Psi_1\left(\frac{y}{\delta_u}, \beta\right) \quad (1.2)$$

При $\beta \rightarrow \infty$, когда $u_u \sim u_0$, $\delta_u \sim \delta^*$, из (1.2) следует

$$\frac{u}{u_0} = \Psi_2\left(\frac{y}{\delta^*}\right) \quad (1.3)$$

Здесь Ψ_2 – некоторая универсальная функция.

Соотношения (1.2), (1.3) описывают течение во внешней части пограничного слоя, где влиянием вязкости можно пренебречь. Как показано, например, в [2], при $u_u \approx u_\tau$

сращивание (1.2) с пристеночной областью происходит на логарифмическом участке профиля скорости. Покажем, что этот участок должен исчезать при переходе к отрывному режиму течения.

Пусть Δu и Δy – характерные скорость и размер пристеночной зоны отрывного течения. В этой зоне должны быть существенными силы вязкого трения, уравновешивающие градиент давления. Поэтому, приравнявая соответствующие члены в уравнении движения и полагая число Re , подсчитанное по Δu , Δy , равным по порядку единице, имеем

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -u_0 \frac{du_0}{dx} = \frac{u_p}{\delta^*} = O\left(v \frac{\Delta u}{\Delta y^2}\right), \quad \frac{\Delta u \Delta y}{v} = O(1) \quad (1.4)$$

Отсюда, учитывая, что при $\epsilon \beta^{1/2} = O(1)$ значение $u_p = O(u_0)$, следует

$$\frac{\Delta u}{u_0} = O(Re_*^{-1/3}); \quad \frac{\Delta y}{\delta^*} = O(Re_*^{-2/3}) \quad (1.5)$$

Таким образом, считая $Re_*^{-1/3}$ малой величиной, имеем $\psi_2 \rightarrow 0$ при $y/\delta^* \rightarrow 0$.

Определим вид функции ψ_2 в области сращивания внешнего и пристеночного решений, т.е. при $Re_*^{-2/3} \ll y/\delta^* \ll O(1)$. В этой области отсутствуют масштабы скорости и линейного размера (при $\tau_w \neq 0$ в области сращивания отсутствовал лишь линейный размер). Поэтому для обезразмеривания скорости, опираясь на теорию размерности, необходимо использовать размерные переменные y , ρ и dp/dx . Тогда

$$\frac{y}{u^2} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = \text{const}$$

Отсюда и из (1.4) следует

$$\frac{u}{u_0} = C_1 \frac{u_p}{u_0} \left(\frac{y}{\delta^*}\right)^{1/2} = C_2 \left(\frac{y}{\delta^*}\right)^{1/2}, \quad C_1, C_2 - \text{const}$$

Аналогичные формулы из других исходных положений получены ранее в [7], где принято $C_1 = 2A = 4.88$ ($A = 2.44$). В [6], [8] на основании результатов эксперимента выбраны соответственно $C_1 = 4.5$ и $C_2 = 0.47$. Исходя из этих данных и оценки $u_p/u_0 \approx 0.1$, примем, что на режиме $\epsilon = 0$, $\beta = \infty$ должно выполняться условие

$$\frac{u}{u_0} \rightarrow 0.47 \left(\frac{y}{\delta^*}\right)^{1/2}, \quad \frac{y}{\delta^*} \rightarrow 0 \quad (1.6)$$

2. Переход от безотрывной к отрывной схеме течения. С помощью закона дефекта скорости и соотношения, связывающего ϵ , Re_* , β , полученного в [1], имеем

$$\frac{1}{\epsilon} = A \ln \frac{Re_*}{0.105a}; \quad A = 2.44 \quad (2.1)$$

Здесь $a = a(\beta)$ определяет вид логарифмической особенности профиля дефекта скорости, записанного в виде

$$\frac{u - u_0}{u_\tau} = f(\zeta, \beta); \quad f \rightarrow A \ln(a\zeta), \quad \zeta \rightarrow 0 \quad (2.2)$$

Первое из соотношений (2.2) справедливо для предельного асимптотического решения $H = 1$ [1] (локальное равновесие $\beta = \beta(x)$, f не зависит явно от x). Для реальных Re

оно справедливо, если $\beta = \text{const}$. При этом, так как $\text{Re} \gg 1$, но $\text{Re} \neq \infty$, значение $\varepsilon \equiv 0$ (отрыв) может быть достигнуто только при $a \rightarrow 0$, когда из (2.1) в пределе $A\varepsilon \ln a = -1$. Логарифмическая особенность профиля скорости в этом предельном решении отсутствует. Это непосредственно следует из соотношения (2.2), которое при $\zeta \rightarrow 0, f \rightarrow A \ln a \zeta$ можно записать в виде

$$\frac{u - u_0}{u_0 A \varepsilon \ln a} \rightarrow 1 + \frac{\varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon \ln(y/\delta^*)}{\varepsilon \ln a} \quad (2.3)$$

Отсюда, учитывая, что во внешней области значение y/δ^* ограничено снизу, согласно (1.5), величиной $\text{Re}_*^{-2/3}$, имеем $u/u_0 \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а $-\ln a \sim \beta^{1/2}$ при $\beta \rightarrow \infty$ ($\varepsilon \beta^{1/2} = \text{const}$). Таким образом, в отличие от предельного перехода в асимптотическом решении [1] (когда $\beta = O(1)$, $\text{Re}_* \rightarrow \infty$), стремление к отрыву соответствует условиям $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon \beta^{1/2} = \text{const}$, $\text{Re}_* \gg 1$, когда исчезает логарифмический участок профиля скорости. Проведенное рассмотрение относится к случаю течений, в которых с помощью подобранного определенным образом градиента давления обеспечено условие $\beta = \text{const}$.

Вернемся к асимптотическому решению [1], соответствующему предельному переходу $\beta = O(1)$, $\text{Re}_* \rightarrow \infty$

$$\beta = -\gamma \frac{d \ln u_0}{dx}, \quad H \equiv 1, \quad \gamma = \left(\text{const} + \int_{x_1}^x u_0^3 dx \right) u_0^{-3} \quad (2.4)$$

Естественно, что решение (2.4) не может описать режим отрыва, поскольку в этом предельном решении значение $H \equiv 1$. Таким образом область отрыва должна находиться в той части течения, где такое решение неприменимо, т.е. $\beta = \infty$. Из (2.4) следует, что значение β конечно, если $d \ln u_0/dx$ ограниченная величина. При $\text{Re} \rightarrow \infty$ отрыв потока (где решение (2.4) неприменимо) возможен лишь в бесконечно малой области вблизи критических точек $u_0 = 0$ или в точках, где $du_0/dx = \infty$ (угловые точки, точки "невязкого" отрыва). Это свойство турбулентного пограничного слоя существенно отличает его от ламинарного. Для последнего из-за появления особенности Гольдштейна решение не может быть продолжено вниз по потоку через область достаточно большого положительного градиента давления [9]. Отметим также, что решение [1] подтверждает вывод, сделанный в [10], о том, что классической двухслойной схемой турбулентного пограничного слоя нельзя описать явление отрыва.

3. Профиль дефекта скорости, выбранный аппроксимацией экспериментальных результатов. Такой профиль использовался в ряде исследований равновесного турбулентного пограничного слоя. Для случая обтекания пластины ($\beta = 0$) в [11] приведены результаты расчёта напряжения Рейнольдса, полученные с помощью профиля Коулса [12]. Профиль, имеющий при $y \rightarrow 0$ вид (1.6), применялся в [8] для исследования равновесных течений с умеренными и большими градиентами давления. Проведенное рассмотрение позволяет построить универсальный однопараметрический профиль, который можно использовать для всех режимов равновесного течения в турбулентном пограничном слое.

Введем некоторую условную толщину пограничного слоя δ и переменную ξ

$$\xi = \frac{y}{\delta} = \frac{\zeta}{\zeta_\delta}, \quad \zeta_\delta = \frac{\delta \varepsilon}{\delta^*} \quad (3.1)$$

В качестве функций s_1, s_2 , задающих масштабирование (1.1), выберем

$$s_1 = k = -\ln(a \zeta_\delta), \quad s_2 = \frac{1}{\zeta_\delta} \quad (3.2)$$

При $\beta \rightarrow 0$, когда $\epsilon\beta^{1/2} \rightarrow \text{const}$, $\delta \rightarrow \delta^*$, значение $\zeta_\delta \sim \epsilon \sim \beta^{-1/2}$ и $-\ln(a\zeta_\delta) \sim (-\ln a) \sim \beta^{1/2}$ ($\ln a \rightarrow -1/A\epsilon$). Примем линейную зависимость $f(\xi, \beta)$ от k во всем диапазоне $0 < \xi \leq 1$ (не только при $\xi \rightarrow 0$) и запишем закон дефекта скорости в виде

$$\frac{f}{A} = \frac{u - u_0}{A\epsilon u_0} = \chi_1(\xi) + (k - 1)\chi_2(\xi) = \chi(\xi, k) \quad (3.3)$$

В отличие от [8, 12] на функцию χ наложим требования, обеспечивающие не только условие $u = u_0$ при $\xi = 1$, но и гладкую стыковку с течением вне пограничного слоя $-du/dy = 0$ при $y = \delta$. Кроме этого, выберем функции χ_1, χ_2 таким образом, чтобы выполнялись условия (2.2) и (1.6). Всем этим требованиям удовлетворяют функции

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \ln \xi + \xi(1 + 2\xi - 2\xi^2) - 1 \\ \chi_2 &= 0.736(\xi^{1/2} - \xi) + \xi^2(2.632 - 1632\xi) - 1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Соотношения (3.3), (3.4) – по существу уточненный закон следа Коулса [12], а параметр k связан с параметром следа зависимостью $k = 2\Pi$.

Используя соотношения из [1], имеем

$$\int_0^\infty f d\zeta = A\zeta_\delta \int_0^1 \chi d\xi = -1; \quad G = \int_0^\infty f^2 d\zeta = A^2 \zeta_\delta^2 \int_0^1 \chi^2 d\xi \quad (3.5)$$

$$H = (1 - G\epsilon)^{-1}$$

Подставляя (3.4) в (3.3) и интегрируя, с учетом (3.5) получим

$$A\zeta_\delta = \frac{1}{4/3 + 0.408(k - 1)}; \quad \frac{G}{A} = \frac{3.544 + 1.812(k - 1) + 0.2532(k - 1)^2}{4/3 + 0.408(k - 1)} \quad (3.6)$$

Для равновесного турбулентного пограничного слоя $G = G(\beta)$, и, следовательно, параметры k, ζ_δ, a однозначно связаны с β , поскольку

$$-\ln a = k + \ln \zeta_\delta \quad (3.7)$$

Найденная экспериментально функция $G(\beta)$, согласно [13, 14], имеет соответственно вид

$$G = 5.77(\beta + 1.25)^{1/2}, \quad G = 6.1(\beta + 1.81)^{1/2} - 1.7$$

Далее для расчета будем использовать соотношение, дающее некоторое среднее значение G при $\beta = 0$

$$G = 6.1(\beta + 1.8)^{1/2} - 1.7 \quad (3.8)$$

Тогда при заданном β значение k находится из второго уравнения (3.6), которое при $A = 2.44$ дает

$$k = 1 + g_1 + (g_1^2 + g_2)^{1/2} \quad (3.9)$$

$$g_1 = 0.3302G - 3.578, \quad g_2 = 2.158G - 13.99$$

Из (3.8), (3.9) следует, что при $\beta = 0$ значение $k = 1$, и, согласно (3.3), дефект скорости для случая обтекания пластины определяет лишь функция χ_1 .

Рассмотрим предельный случай $\beta \rightarrow \infty$; $k \rightarrow \infty$. При этом $-\ln a \rightarrow k$, $Ak\varepsilon = 1$, и из (3.5), (3.6) получим

$$G\varepsilon = 0.6206, \quad H = 2.636 \quad (3.10)$$

$$\frac{u}{u_0} = 1 + \chi_2, \quad \frac{\delta^*}{\delta} = 0.408 \quad (3.11)$$

Тогда из второго соотношения (3.4) при $\xi \rightarrow 0$ следует (1.6). Подставляя (3.8) в (3.10), при $\beta \rightarrow \infty$, $A = 2.44$ находим

$$\varepsilon\beta^{1/2} = 0.1017 \quad (3.12)$$

Полученное значение согласуется с указанным выше экспериментальным результатом.

При $k \gg 1$ ($\beta \gg 1$) в соотношениях (3.3), (3.6) можно пренебречь слагаемыми с относительным порядком $1/k$. В этом случае предлагаемая методика принципиально совпадает с приведенной в [8], где логарифмический участок профиля скорости заменен скачком скорости при $y = 0$. Тогда из (3.3)–(3.6) получим

$$\frac{u - u_0}{qu_0} = \chi_2(\xi), \quad G\varepsilon = 0.6206q \quad (3.13)$$

$$\beta^{1/2}\varepsilon = 0.1017q, \quad q = A\varepsilon k$$

В этих соотношениях введенной в [8] характерной скорости U_s соответствует qu_0 , а скорость (скачок скорости) при $\xi = 0$ ($\chi_2 = -1$) равна $u_0(1 - q)$.

Сравнение расчета профилей дефекта скорости по формулам (3.3)–(3.9) с экспериментальными данными и расчетом [5] дано на фиг. 1–3. При этом отрывный профиль (3.11) представлен в той же форме, что и в [5]

$$\frac{u - u_0}{u_p} = \frac{u_0}{u_p}\chi_2(\xi), \quad \frac{u_0}{u_p} = 10.27$$

Отметим, что подобные сопоставления, проведенные в переменной ξ , не совсем корректны, поскольку толщина слоя δ определяется различными авторами по-разному. Поэтому на фиг. 4 при сравнении с данными эксперимента [3] использована переменная ζ .

4. Распределение касательного напряжения по сечению пограничного слоя. Из уравнений сохранения импульса и неразрывности следует

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_0 \frac{du_0}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad v = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad (4.1)$$

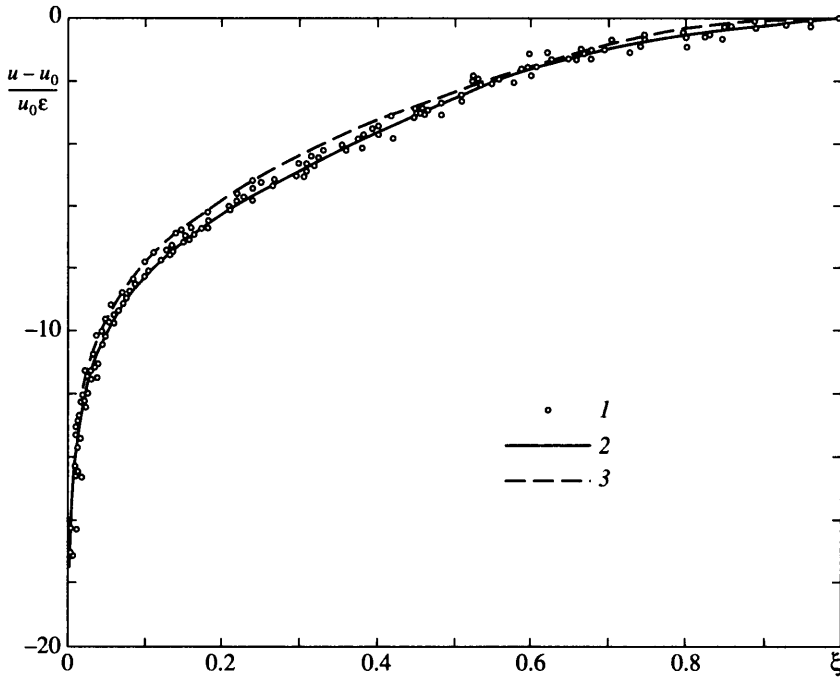
Здесь τ_{xy} – напряжение Рейнольдса.

Закон дефекта скорости запишем в виде

$$u = u_0[1 + \varepsilon f(\zeta, \beta)] \quad (4.2)$$

Далее, преобразуя (4.1), пренебрегаем величиной $d \ln \varepsilon / dx$ по сравнению с единицей, так как из (2.1) следует

$$\frac{d \ln \varepsilon}{dx} = \varepsilon O\left(\frac{d \ln \delta^*}{dx}\right), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\zeta \left(\frac{d \ln \delta^*}{dx} - \frac{d \ln \varepsilon}{dx}\right) \approx -\zeta \frac{d \ln \delta^*}{dx} \quad (4.3)$$



Фиг. 1. Профили $(u - u_0)/(u_0\epsilon)$ от ξ для $\beta = 0$: 1 – экспериментальные данные из [5]; 2 – расчет [5]; 3 – расчет по (3.3)–(3.9)

Аналогичным образом, согласно (3.5), при $\beta = \text{const}$ ($G = \text{const}$) можно опустить и dH/dx . Тогда из интегрального уравнения сохранения импульса будем иметь

$$\frac{d\delta^*}{dx} = \epsilon^2 H + \beta \epsilon^2 (H + 2) \tag{4.4}$$

Отметим, что слагаемые с относительным порядком $d \ln \epsilon / dx$ не учитывались и в [8]. Однако это допущение оспаривалось в [5]. Доводы авторов [5] нельзя признать убедительными, поскольку, исходя из (4.2) (и некоторой модели турбулентной вязкости), они получили после решения (4.1) $f = f(\zeta, \beta, \epsilon)$, что противоречит принятому ранее соотношению (4.2).

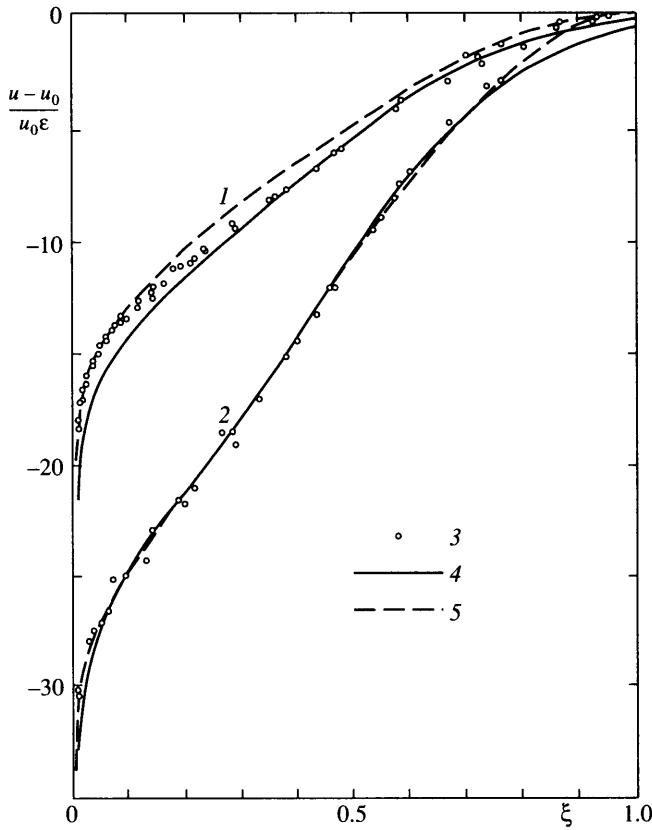
Для параметра $T = \tau_{xy} / \tau_w$ из (4.1), используя (4.2)–(4.4) и переходя к переменной ζ , получим

$$\frac{dT}{d\zeta} = -\beta f(2 + \epsilon f) - [H + \beta(H + 1)] \frac{\partial f}{\partial \zeta} \left(\zeta + \epsilon \int_0^\zeta f d\zeta \right) \tag{4.5}$$

Отсюда при $f = A\chi$ имеем

$$\frac{dT}{d\xi} = -A\zeta_\delta \left\{ \beta \chi(2 + \epsilon A\chi) + [H + \beta(H + 1)] \frac{d\chi}{d\xi} \left(\xi + \epsilon A \int_0^\xi \chi d\xi \right) \right\} \tag{4.6}$$

$$T = 1 - A\zeta_\delta \left\{ \beta \int_0^\xi \chi(2 + \epsilon A\chi) d\xi + [H + \beta(H + 1)] \left[\int_0^\xi \frac{d\chi}{d\xi} d\xi + \epsilon A \left(\chi \int_0^\xi \chi d\xi - \int_0^\xi \chi^2 d\xi \right) \right] \right\} \tag{4.7}$$



Фиг. 2. Профили $(u - u_0)/(u_0\epsilon)$ от ξ для 1 - $G = 10.1$ ($\beta \approx 1.9$); 2 - $G = 19.3$; ($\beta \approx 10$):
3 - экспериментальные данные из [5]; 4 - расчет [5]; 5 - расчет по (3.3)–(3.9)

Учитывая значения интегралов (3.5) и условия $\chi = dx/d\xi = 0$ при $\xi = 1$, из (4.6), (4.7) следует $T = dT/d\xi = 0$ при $\xi = 1$.

Все входящие в (4.6), (4.7) интегралы берутся в конечном виде, но приводят к очень громоздким выражениям. Однако, являясь стандартными, они могут быть рассчитаны раз и навсегда. Тогда решение находится с помощью соотношений (2.1), (3.3)–(3.9), (4.6), (4.7).

При больших значениях β можно найти приближенное решение (4.7), следующее из (3.13), $\chi \approx k\chi_2$. Тогда, умножая (4.7) на ϵ^2 и интегрируя, получим

$$T\epsilon^2 = \frac{\tau_{xy}}{\rho u_0^2} = \epsilon^2 + \xi \sum_0^6 a_i \xi^i + \xi^{3/2} \sum_0^3 b_i \xi^i \quad (4.8)$$

$$H = (1 - 0.6206q)^{-1}$$

Здесь коэффициенты a_i , b_i являются некоторыми суммами слагаемых, зависящих от H , q и ϵ^2 .

Сравнение результатов расчёта по формуле (4.8) с содержащимися в [8] экспериментальными данными приведено на фиг. 5.

Оценка значений $\beta \gg 1$, при которых $k \gg 1$ и допустимо применять соотношения (4.8), может быть сделана с помощью помещенных ниже результатов расчета.

β	-0.25	0	3	5	7	10	200	5000	∞
G	5.89	6.48	11.7	14.2	16.4	19.2	85.0	430	∞
k	0.548	1.00	4.63	6.34	7.81	9.72	53.2	281	∞
ζ_δ	0.357	0.307	0.146	0.117	0.100	0.0838	0.0181	0.0035	0
$\ln a$	0.483	0.179	-2.70	-4.20	-5.51	-7.24	-49.2	-275	$-\infty$
$Re_* = 10^4$									
ϵ	0.0373	0.0363	0.0289	0.0262	0.0242	0.0219	0.0068	0.0014	0
q	0.0499	0.0887	0.327	0.405	0.460	0.520	0.877	0.980	1
H	1.28	1.31	1.51	1.59	1.66	1.73	2.35	2.59	2.64
m	0.542	0	-0.249	-0.256	-0.257	-0.256	-0.230	-0.218	-0.216
$Re_* = 10^6$									
ϵ	0.0263	0.0258	0.0218	0.0202	0.0190	0.0176	0.0063	0.0014	0
q	0.0352	0.0630	0.247	0.313	0.362	0.417	0.815	0.964	1
H	1.18	1.20	1.34	1.40	1.45	1.51	2.14	2.53	2.64
m	0.646	0	-0.264	-0.271	-0.273	-0.273	-0.241	-0.221	-0.216

Универсальная формула (4.7) дает достаточно простое выражение для частного случая обтекания пластины $\beta = 0, k = 1, \chi = \chi_1$

$$T = 1 - 0.75HT_1 + 0.282(H - 1)T_2$$

$$T_1 = \xi \left(1 + \frac{1}{2}\xi + \frac{4}{3}\xi^2 - \frac{3}{2}\xi^3 \right)$$

$$T_2 = -T_1 \ln \xi + \xi \left(3 + \xi + \frac{49}{18}\xi^2 - \frac{47}{12}\xi^3 + \frac{1}{6}\xi^4 + \xi^5 - \frac{3}{7}\xi^6 \right)$$

(4.9)

$$G = 6.484, \quad H = (1 - 6.484\epsilon)^{-1}, \quad a = 1.196, \quad \zeta = \xi\zeta_\delta = 0.307\xi$$

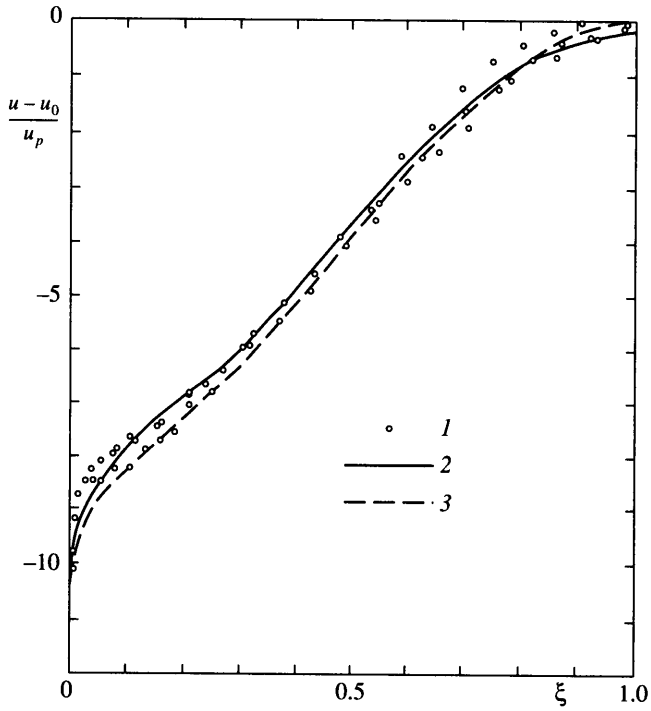
На фиг. 6 дано сравнение расчётных и экспериментальных данных [11] для этого случая.

5. Условия реализации равновесного течения в турбулентном пограничном слое при реальных значениях Re_* . В отличие от предельного случая $Re_* \rightarrow \infty$ такие течения требуют распределения давления по поверхности тела, обеспечивающего на достаточно большом (по сравнению с δ) участке x значение $\beta = \text{const}$. Если принять в этой области $\epsilon = \text{const}, H = \text{const}$, то постоянное значение β достигается при $u_0 = (x - \text{const})^m$ ($m = \text{const}$). Параметр $m(Re_*, \beta)$ может меняться в широких пределах, но при фиксированном значении Re_* имеет по β некоторое минимальное значение m_β . Вторая “пороговая” величина $m_* > m_\beta, m_\beta < 0$ (определяющая отрывный профиль скорости) ограничивает сверху значения m , при которых одно и то же m соответствует не одному, а двум различным равновесным течениям. Используя полученные результаты (часть из них приведена выше), рассчитаем m_* и m_β . Значения этих параметров различаются у многих авторов, а иногда и противоречат, как это указано в [8], экспериментальным данным.

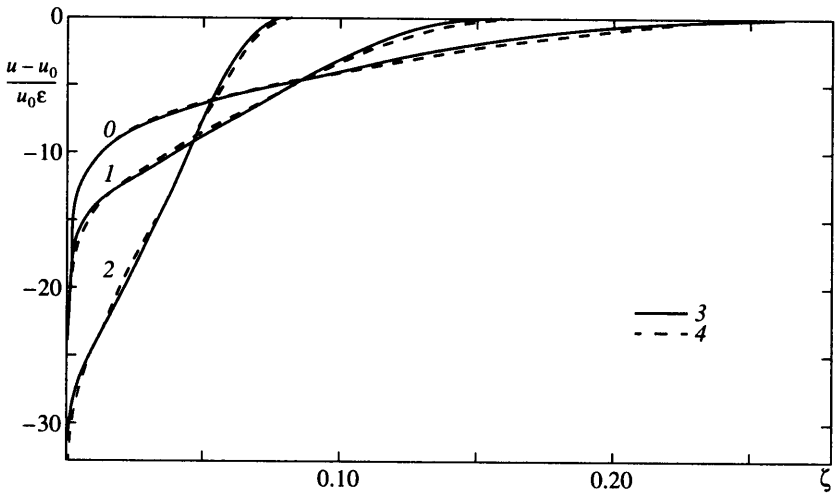
Прежде всего отметим, что условия $\epsilon, \beta = \text{const}$, согласно (2.1), требуют, чтобы $Re_* = \text{const}$, т.е. $\delta^* = \text{const}$. В то же время из (4.4) следует линейная зависимость δ^* от x . Такая противоречивость связана с отличием течения от плоскопараллельного и исчезает в асимптотическом пределе $Re_* \rightarrow \infty$ при $\beta = O(1)$. Для реальных достаточно больших Re_* значение ϵ очень слабо зависит от δ^* , поскольку $\epsilon \sim (\ln Re_*)^{-1}$.

С учетом этого запишем выражение для β и уравнение (4.4) в виде

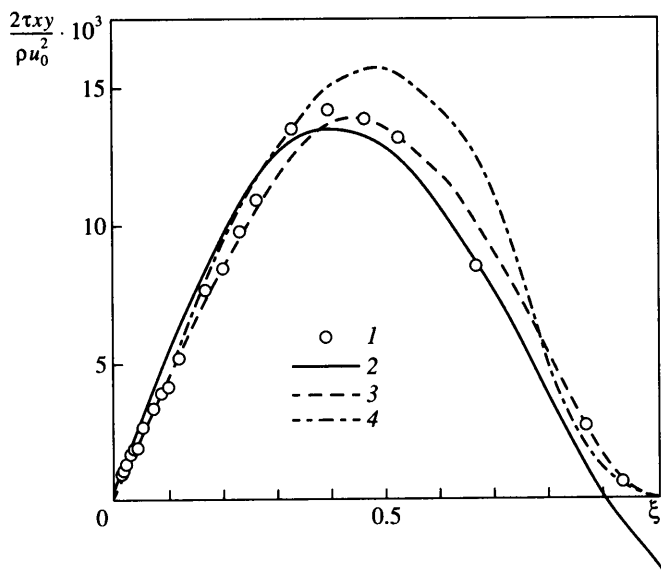
$$\frac{d \ln u_0}{dx} = \frac{\beta \epsilon^2}{\delta^*}, \quad 1 = \frac{m}{\beta \epsilon^2} \frac{d \delta^*}{dx}, \quad m = \frac{\beta}{H + \beta(H + 2)}, \quad m \approx \text{const} \quad (5.1)$$



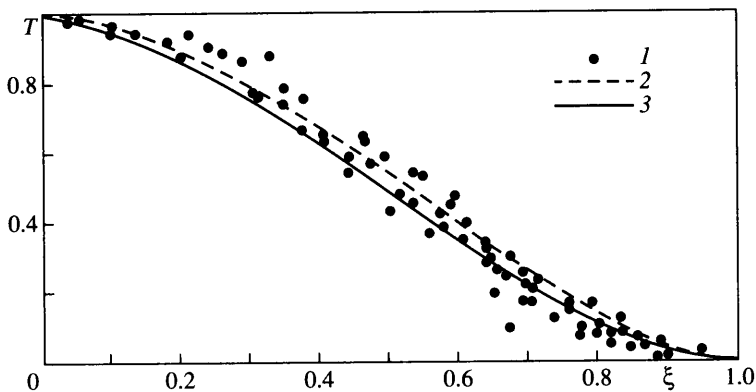
Фиг. 3. Профили $(u - u_0)/(u_0 \epsilon)$ от ξ для $\beta = \infty$: 1 – экспериментальные данные из [5]; 2 – расчет [5]; 3 – расчет по (3.13)



Фиг. 4. Профили $(u - u_0)/(u_0 \epsilon)$ от ζ : 0 – $\beta = 0$; 1 – $G = 10.1$ ($\beta \approx 1.9$); 2 – 19.3; (10); 3 – аппроксимация экспериментальных данных [4]; 4 – расчет по (3.3)–(3.9)



Фиг. 5. Профили $2\tau_{xy}/(\rho u_0^2)$ от ξ для $\beta \geq 1$: 1 – экспериментальные данные из [8]; 2 – расчет [8]; 3, 4 – расчеты по (4.8), $\epsilon = 0$, $q = 0.93$ и 1



Фиг. 6. Профили $T = \tau_{xy}/\tau_w$ от ξ для $\beta = 0$: 1 – экспериментальные данные из [11]; 2, 3 – расчет по (4.9), $H = 1.42$, 1

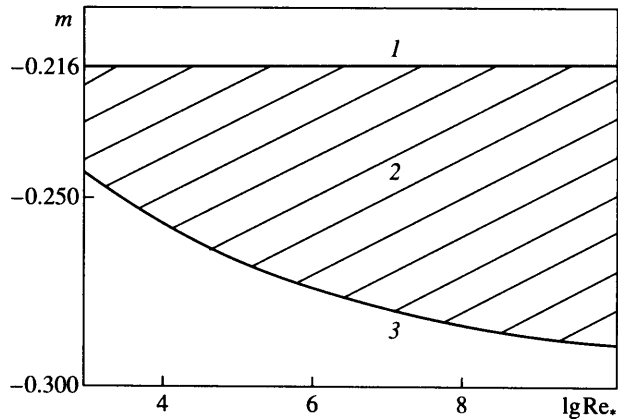
Отсюда получим

$$\frac{d \ln u_0}{dx} = m \frac{d \ln \delta^*}{dx}, \quad u_0 = \text{const}(\delta^*)^m \tag{5.2}$$

$$\frac{\delta^*}{\delta_1^*} = 1 - \frac{\beta \epsilon^2}{\delta_1^* m} (x - x_1), \quad \frac{u_0}{u_{01}} = \left[1 - \frac{\beta \epsilon^2}{\delta_1^* m} (x - x_1) \right]^m$$

Здесь δ_1^* , u_{01} – значения параметров при $x = x_1$.

В случае отрывного течения $H = 2.636$ и из (5.1) $m = m_* = -0.2157$ при любом Re_* . Если $\beta \neq \infty$, то $m = m(Re_*, \beta)$ и, как видно из приведенных выше результатов расчета,



Фиг. 7. Область значений m , соответствующих двум равновесным течениям: 1 – $m = m_* = 0.216$; 2 – область двузначности; 3 – $m = m_\beta(\text{Re}_*)$

для каждого $\text{Re}_* = \text{const}$ существует минимум $m = m_\beta$. При этом $m_\beta(\text{Re}_*) > -1/3$. Значения m_* , m_β , ограничивающие область, в которой существуют два равновесных течения с одним и тем же значением m , показана на фиг. 7. В [8] сообщается, что подобная двузначность при значении $m = -0.23$ доказана экспериментально.

Заключение. Предложенный универсальный однопараметрический закон дефекта скорости можно считать достаточно обоснованным для случая плоского равновесного течения несжимаемой жидкости в турбулентном пограничном слое. При неравновесном течении параметр k уже не связан однозначно с параметром Клаузера. Однако известный закон следа Коулса говорит о том, что однозначная зависимость профиля дефекта скорости от параметра k должна сохраниться и для этого случая.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 04-01-00632).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михайлов В.В. Применение асимптотических методов к расчету турбулентного пограничного слоя // Инж.-физ. журн. 2004. Т. 77. № 1. С. 114–121.
2. Михайлов В.В. Закономерности пристеночных турбулентных течений несжимаемой жидкости как следствие их предельных асимптотических свойств // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 5. С. 74–84.
3. Clauser F. Turbulent boundary layers in adverse pressure gradients // J. Aero. /Sci. 1954. V. 21. № 2. P. 91–108.
4. Stratford B.S. An experimental flow with zero skin friction throughout its region of pressure rise // J. Fluid Mech. 1959. V. 5. Pt 1. P. 17–35.
5. Mellor G.L., Gibson D.M. Equilibrium turbulent boundary layers // J. Fluid Mech. 1966. V. 24. Pt 2. P. 225–253.
6. Kader B.A., Yaglom A.M. Similarity treatment of moving – equilibrium turbulent boundary layers in adverse pressure gradients // J. Fluid Mech. 1978. V. 89. Pt 2. P. 305–342.
7. Stratford B.S. The prediction of separation of the turbulent boundary layer // J. Fluid Mech. 1959. V. 5. Pt 1. P. 1–16.
8. Schofield W.H. Equilibrium boundary layers in moderate to adverse pressure gradients // J. Fluid Mech. 1981. V. 113. P. 91–122.
9. Асимптотическая теория отрывных течений / Под ред. В.М. Сычева М.: Наука, 1987. 256 с.

10. Сычев В.В., Сычев Вик. В. О структуре турбулентного пограничного слоя // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 593–599.
11. Федяевский К.К., Гиневский А.С., Колесников А.В. Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. Л.: Судостроение, 1973. 256 с.
12. Coles D. The law of the wake in turbulent boundary layer // J. Fluid Mech. 1956. V. 1. Pt 2. P. 191–226.
13. Nash J.F. Turbulent Boundary Layer Behavior and the Auxiliary Equation // NPL Report 1137. 1965.
14. East L.F., Sawyer W.G. An investigation of the structure of equilibrium turbulent boundary layers // Turb. Bound. Layers: Experiment, Theory and Modeling AGARD CP-271. 1979.

Москва

Поступила в редакцию
3.VI.2004