

УДК 532.517.2:551.213.3

© 2005 г. А. А. ОСИПЦОВ

## НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ ЛАВЫ НА КОНИЧЕСКОЙ ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

В рамках уравнений неизо термического тонкого слоя сильновязкой жидкости с массоподводом с учетом экспоненциальной зависимости вязкости жидкости от температуры построено семейство гидродинамических моделей остывающего лавового течения на конической поверхности. Указанные модели соответствуют асимптотически различным интенсивностям теплообмена с внешней средой. Численными методами исследован процесс эволюции формы свободной поверхности и полей температуры при стационарном массопроводе. Методом сращиваемых разложений построены решения, пригодные как вблизи области массопровода, так и на значительном удалении от нее. Проведено сравнение полученных решений с известными аналитическими решениями для изотермического течения.

*Ключевые слова:* вязкая жидкость, коническая поверхность, неизо термическое течение, пленочное течение, экструзивное извержение.

Теоретическому исследованию процесса роста лавового купола посвящен ряд работ, относящихся главным образом к изотермическим течениям на плоской подсти лающей поверхности [1]. В [2] построена асимптотическая теория тонкого слоя сильно вязкой ньютоновской жидкости на горизонтальной плоскости с точечным (линей ным) массопроводом и получены автомодельные решения для формы свободной поверхности и закона движения переднего фронта течения. Автомодельное по прост ранственным координатам решение задачи о стационарном течении на наклонной плоскости от точечного источника получено в [3]. Автомодельное решение послед ней задачи в нестационарной постановке при точечном (линейном) массопроводе найдено в [4]. В [5] построена двумерная асимптотическая модель тонкого слоя вязко пластической жидкости на горизонтальной либо слабо наклоненной плоскости. В рамках уравнений [5] в [6] построена изотермическая модель осесимметричного роста вязкопластического лавового купола на горизонтальной плоскости. Обобщение этой модели на случай течения на плоскости с малым углом наклона к горизонта ли проведено в [7]. В [8] построены двумерные модели стационарного осесимметрич ного (плоского) изотермического течения тонкого слоя ньютоновской жидкости на искривленной поверхности с малыми или конечными углами наклона к горизонтали. В [9] получено автомодельное решение задачи о росте лавового купола на поверхно сти конуса с конечным углом наклона образующей к горизонтали, а также проведено численное исследование течения на поверхности с малыми углами наклона образую щей к горизонтали.

Сравнительно меньшее число работ посвящено неизо термическим пленочным те чениям сильновязкой тяжелой жидкости. В [10] решена задача о стационарном неизо термическом течении тонкой пленки вязкой жидкости с учетом поверхностного натя жения на подогретой наклонной плоскости. Численное исследование задачи о неста ционарном неизо термическом течении сильновязкой ньютоновской жидкости на горизонтальной плоскости в приложении к задаче о течении смазочно-охлаждающих жидкостей проведено в [11]. В [12] модель вязкопластического тонкого слоя на гори зонтальной плоскости [6] обобщена на случай неизо термического течения и получе но решение задачи о росте вертикально-изотермического лавового купола. В более

общей неизотермической постановке задача о росте вязкопластического лавового купола численно исследована в [13], где также рассмотрены предельные случаи вертикально-изотермического течения и течения с образованием теплового пограничного слоя вблизи свободной поверхности. В последних работах учтено влияние вязкопластических свойств лавы и нелинейной зависимости вязкости от температуры в пренебрежении криволинейной геометрией подстилающей поверхности.

Как показано в [9], неплоская геометрия подстилающей поверхности приводит к качественному отличию закона движения переднего фронта течения даже в случае малых углов наклона поверхности к горизонтали. Настоящая работа преследует цель обобщить уравнения тонкого слоя на конической поверхности [9] на случай неизотермического течения, оставаясь в рамках модели ньютоновской жидкости, и учесть в первую очередь сильно нелинейную зависимость вязкости от температуры, что можно рассматривать как первый шаг к описанию остывающих лавовых течений с солидификацией.

Ниже построена асимптотическая модель остывающего лавового течения на конической поверхности с произвольными углами наклона образующей к горизонтали.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается неизотермическое нестационарное течение сильновязкой тяжелой жидкости со свободной границей на осесимметричной подстилающей поверхности с массоподводом в вершине. Предполагается, что внешняя среда находится в состоянии покоя. Вязкость жидкости существенно зависит от температуры, а плотность и теплопроводность постоянны. Систему координат  $x, y$  с центром в вершине  $O$  свяжем с подстилающей поверхностью. Оси  $x$  и  $y$  направлены вдоль образующей и по нормали к поверхности соответственно. Введем безразмерные переменные

$$\mathbf{V}^* = U\mathbf{V}, \quad \tau^{ij*} = \frac{\mu_0 U}{L} \tau^{ij}, \quad e_{ij}^* = \frac{U}{L} e_{ij}, \quad t^* = \frac{L}{U} t$$

$$p^* = p_a^* + \frac{\mu_0 U}{L} p, \quad T^* = T_a^* + T \Delta T^*, \quad \Delta T^* = T_e^* - T_a^*$$

Здесь  $\mathbf{V}$  – вектор скорости жидкости,  $\mu_0$  – характерный масштаб вязкости жидкости,  $L$  и  $U$  – характерные масштабы длины и скорости жидкости (при рассмотрении течений вблизи и вдали от зоны массоподвода будут выбраны различные масштабы длины, а масштаб скорости будет выражен через известные определяющие параметры),  $p$  – избыточное давление по сравнению с давлением на свободной поверхности,  $p_a^*$  и  $T_a^*$  – давление и температура во внешней среде,  $T_e^*$  – температура подводимой жидкости,  $e_{ij} = (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)/2$  – компоненты тензора скоростей деформаций,  $\tau^{ij}$  – компоненты тензора вязких напряжений (где это необходимо, размерные переменные обозначены звездочкой). В безразмерном виде уравнения движения и притока тепла в проекции на оси координат примут вид

$$\frac{\partial(ur)}{\partial x} + \frac{\partial(vHr)}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$\varepsilon Re a_1 + \frac{\varepsilon}{H} \frac{\partial p}{\partial x} = 2\varepsilon L_1 + \sin\theta(x), \quad \varepsilon Re a_2 + \varepsilon \frac{\partial p}{\partial y} = 2\varepsilon L_2 - \cos\theta(x)$$

$$L_1 = \frac{1}{Hr} \left[ \frac{\partial(r\mu e_{11})}{\partial x} + \frac{\partial(Hr\mu e_{21})}{\partial y} \right] + \frac{\mu e_{12}}{H} \frac{\partial H}{\partial y}$$

$$L_2 = \frac{1}{Hr} \left[ \frac{\partial(r\mu e_{12})}{\partial x} + \frac{\partial(Hr\mu e_{22})}{\partial y} \right] - \frac{\mu e_{11}}{H} \frac{\partial H}{\partial y}$$

$$\text{Pe} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{u}{H} \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 2\text{EcPr} \mu e^{ij} e_{ij} + L_4$$

$$L_4 = \frac{1}{Hr} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{r}{H} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( Hr \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \quad (1.2)$$

$$\text{Re} = \frac{\rho UL}{\mu_0}, \quad \varepsilon = \frac{\text{Fr}^2}{\text{Re}} = \frac{\mu_0 U}{\rho g L^2}, \quad \text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gL}}$$

$$\text{Pe} = \frac{\rho ULc}{\lambda}, \quad \text{Pr} = \frac{\mu_0 c}{\lambda}, \quad \text{Ec} = \frac{U^2}{c \Delta T^*}$$

$$x^* = Lx, \quad y^* = Ly, \quad R^* = LR, \quad r^* = Lr, \quad H = \frac{R+y}{R}$$

Здесь  $\rho$ ,  $c$  и  $\lambda$  – плотность, теплоемкость и теплопроводность жидкости соответственно,  $g$  – ускорение силы тяжести. В уравнениях  $a_1$ ,  $a_2$  и  $u$ ,  $v$  – компоненты ускорения и скорости в проекции на оси  $x$ ,  $y$  соответственно,  $R(x)$  – радиус кривизны образующей,  $\mu(T)$  – зависимость вязкости жидкости от температуры (в качестве масштаба вязкости выбрана вязкость подводимой жидкости, так что  $\mu(1) = 1$ ),  $\theta(x)$  – угол между касательной к образующей поверхности и горизонталью,  $r(x)$  – расстояние до вертикальной оси, содержащей точку  $O$ . Считаем, что толщина слоя в начальный момент времени равна нулю. Граничные условия на твердой ( $y = 0$ ) и свободной ( $y = h$ ) поверхностях, а также при  $x = 0$  и  $x = x_r(t)$  (координата переднего фронта течения) имеют вид

$$y = h: v = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{u}{H} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \mathbf{P}_n = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial n} = -\text{Nu} F(T)$$

$$y = 0, \quad x < D/L: u = 0, \quad v = v_m, \quad T = 1$$

$$y = 0, \quad x > D/L: u = v = \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \text{Nu} = \frac{F_0 L}{\lambda \Delta T^*} \quad (1.3)$$

$$x = 0: \frac{\partial h}{\partial x} = 0; \quad x = x_r(t): h = 0$$

В граничных условиях  $v_m(t, x)$  – профиль скорости массопритока,  $D$  – радиус области массопритока,  $\mathbf{P}_n$  – вектор напряжений на свободной поверхности,  $F_0$  – характерный масштаб потока тепла на свободной поверхности,  $F(T)$  – заданный поток тепла на свободной поверхности как функция ее температуры (конкретный вид  $F(T)$  определяется физическими свойствами процесса). Для лавовых течений характерная величина потока тепла на свободной поверхности существенно превышает величину потока тепла в подстилающую поверхность [1], поэтому при  $y = 0$  вне жерла задано условие адиабатической стенки. Масштаб радиуса кривизны свободной поверхности имеет порядок характерного масштаба течения  $L$  (капиллярное число  $\text{Ca} = \mu U / \sigma \gg 1$ , где  $\sigma$  – поверхностное натяжение), поэтому поверхностным натяжением можно пренебречь.

Поток тепла на свободной поверхности лавового течения вызван излучением и конвекцией во внешней среде [1]. Выражение для потока тепла за счет каждого из этих эффектов имеет вид степенной функции температуры свободной поверхности с показателем степени 4 и 4/3 соответственно [1, 14–16]. В целях иллюстрации качеств

венных особенностей рассматриваемого явления примем выражение для потока тепла в соответствии с линейным законом Ньютона (здесь  $a$  – положительная константа)

$$F(T) = T, \quad F_0 = a\Delta T^* \quad (1.4)$$

В настоящей работе пренебрегается зависимостью вязкости лавы от объемной доли, формы и размера кристаллов и считается, что вязкость зависит только от температуры по следующей безразмерной формуле [1]

$$\mu(T) = \exp[n(1 - T)], \quad n = \gamma\Delta T^* \quad (1.5)$$

где  $\gamma \approx 4 \cdot 10^{-2} \text{ K}^{-1}$  [17]. Характерный перепад температуры  $\Delta T^* \sim 10^2 \text{ K}$  [12], поэтому  $n \sim 1-10$ . Здесь  $n$  – константа, характеризующая масштаб изменения вязкости при изменении безразмерной температуры от 1 до 0.

Будем рассматривать течение на поверхности конуса с конечным углом наклона образующей к горизонтالي  $\theta$ . Решение для формы свободной поверхности при изотермическом течении на конусе [9] содержит особенность в точке  $O$ , поэтому будем рассматривать течение на поверхности конуса, затупленного гладким образом по сфере размерного радиуса  $R_e$ . Всю область течения разобьем на две асимптотические области: внешнюю и внутреннюю. Во внутренней области масштаб длины выбран равным радиусу области массоподвода  $L_i = D$ , углы наклона образующей поверхности к горизонтали считаются малыми. Во внешней области масштаб длины совпадает с радиусом сферы  $L_e = R_e$ , при этом  $L_i/L_e \ll 1$ , а углы наклона образующей к горизонтали конечны.

Считая  $\varepsilon \ll 1$ , будем искать решение системы (1.1), (1.2) с граничными условиями (1.3) в виде асимптотических рядов по  $\varepsilon$ , удерживая только главные члены. Условие малости параметра  $\varepsilon$  выполняется, в частности, для экструзивных вулканических извержений (при оценке величин  $\varepsilon$  использовались данные [12]). Ниже последовательно получены асимптотические системы уравнений, описывающие течения во внутренней и внешней областях.

**2. Течение при малых  $\theta$ .** Рассматривается течение во внутренней области при малых углах наклона образующей поверхности к горизонтали на масштабе длины  $L_i = D$  (в формулах (1.1)–(1.3) положим  $L = L_i$ ). Здесь и далее в случаях, когда это необходимо, используем индекс  $i$  для параметров внутренней области и индекс  $e$  для параметров внешней области. Главные члены асимптотических разложений искомых функций при малых  $\theta$  имеют порядки

$$y = \varepsilon_i^{1/3} \eta_i, \quad h = \varepsilon_i^{1/3} h_0, \quad v = \varepsilon_i^{1/3} v_0, \quad \theta = \varepsilon_i^{1/3} \vartheta, \quad p = \varepsilon_i^{-2/3} p_0 \quad (2.1)$$

Остальные функции имеют порядок единицы. Индекс 0 ниже опущен. Полагая в качестве характерного масштаба компоненты скорости  $v$  величину  $Q/L_i^2$ , где  $Q$  – характерный масштаб расхода массоподвода, из уравнения неразрывности имеем  $Q/L_i^2 = \varepsilon_i^{1/3} U$ . Последнее равенство позволяет выразить величины масштаба скорости  $U$  и малого параметра  $\varepsilon_i$  через определяющие размерные параметры

$$U = \left( \frac{\rho g Q^3}{\mu L_i^4} \right)^{1/4}, \quad \varepsilon_i = \left( \frac{\mu Q}{\rho g} \right)^{3/4} \frac{1}{L_i^3} \quad (2.2)$$

Считаем  $\text{Re} = o(\varepsilon_i^{-2/3})$ . Подставляя (2.1) в (1.1)–(1.3) и оставляя главные члены, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \vartheta(x), \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} = -1$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial \eta} &= k_1 \mu \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + k_2 \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \\
k_1 &= \frac{\text{Ec}}{\text{Re}^{1/3} \text{Fr}^{4/3}}, \quad k_2 = \frac{1}{\text{Re}^{1/3} \text{Fr}^{4/3} \text{Pr}} \\
\eta = h: v &= \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}, \quad p = 0 \\
\frac{\partial u}{\partial \eta} &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \eta} = -\varepsilon_i^{1/3} \text{Nu}_i F(T) \\
\eta = 0, \quad x < 1: u &= 0, \quad v = v_m, \quad T = 1 \\
\eta = 0, \quad x > 1: u &= v = \frac{\partial T}{\partial \eta} = 0 \\
x = 0: \frac{\partial h}{\partial x} &= 0; \quad x = x_r(t): h = 0
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Из динамического уравнения в проекции на ось  $\eta$  с учетом граничного условия на свободной поверхности имеем  $p = h - \eta$ . Будем считать, что радиус сферы  $R_e = L_i \varepsilon_i^{-1/3}$ , тогда  $\vartheta(x) = x$ . Используя (2.2), получаем выражения для параметров  $k_1$  и  $k_2$  через определяющие размерные параметры

$$k_1 = \left( \frac{\mu g^3 Q}{\rho c^4 \Delta T^* 4} \right)^{1/4}, \quad k_2 = \left( \frac{g \lambda^4 L_i^8}{\mu \rho^3 c^4 Q^5} \right)^{1/4} \tag{2.4}$$

В табл. 1 приведены порядки величин параметров  $k_1$ ,  $k_2$  и  $\varepsilon_i$  для двух типов лавы: кислой и основной [18]. При вычислении значений параметров использованы данные [12].

Таблица 1

| Параметр      | Внутренняя область |               | Внешняя область |               |
|---------------|--------------------|---------------|-----------------|---------------|
|               | Кислая лава        | Основная лава | Кислая лава     | Основная лава |
| $k_1$         | $10^{-4}$          | $10^{-5}$     | $10^{-2}$       | $10^{-2}$     |
| $k_2$         | $10^{-6}$          | $10^{-5}$     | $10^{-1}$       | 1             |
| $\varepsilon$ | $10^{-1}$          | $10^{-4}$     | $10^{-5}$       | $10^{-8}$     |

В силу того что  $k_2 \ll 1$ , вблизи свободной поверхности образуется температурный пограничный слой асимптотической толщины  $\sim \sqrt{k_2}$ . Вне пограничного слоя слагаемыми в правой части уравнения притока тепла (2.3) можно пренебречь и течение является изотермическим ( $\mu = \mu(1) = 1$ ). Однократное интегрирование динамического уравнения в проекции на ось  $x$  дает выражение

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = (h - \eta) \left( \vartheta(x) - \frac{\partial h}{\partial x} \right)$$

В пределах пограничного слоя  $du/d\eta$  имеет асимптотический порядок  $\sqrt{k_2}$ , тогда слагаемое с диссипативной функцией имеет порядок  $k_1 k_2 \ll k_2$ , и им можно пренебречь.

Будем рассматривать решение задачи при  $k_2 \sim 1$  и выясним характер зависимости решения от этого параметра при  $k_2 \rightarrow 0$ .

Система (2.3) описывает течение в области с неизвестной границей, поэтому для удобства последующего численного решения введем новые независимые переменные ( $x = x_1$ ,  $\eta = \xi h$ ,  $t = t_1$ ). Частные производные по старым переменным связаны с производными по новым переменным следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_1} - \xi \frac{\partial h}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -\xi \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial t_1}$$

Индекс 1 ниже опущен. Система (2.3) в новых переменных с учетом проведенных рассуждений принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = -\frac{h \partial u x}{x \partial x} + \xi \frac{\partial h \partial u}{\partial x \partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = -h^2 \left( x - \frac{\partial h}{\partial x} \right)$$

$$h^2 \frac{\partial T}{\partial t} + u h^2 \frac{\partial T}{\partial x} + h \left[ v - \xi \left( \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial T}{\partial \xi} = k_2 \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}$$

$$\xi = 1: v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \xi} = -\epsilon_i^{1/3} \text{Nu}_i h F(T) \quad (2.5)$$

$$\xi = 0, \quad x < 1: u = 0, \quad v = v_m, \quad T = 1$$

$$\xi = 0, \quad x > 1: u = v = \frac{\partial T}{\partial \xi} = 0$$

$$x = 0: \frac{\partial h}{\partial x} = 0; \quad x = x_r(t): h = 0$$

**3. Течение при конечных  $\theta$ .** Рассмотрим течение во внешней области на поверхности конуса при конечных углах наклона образующей конуса к горизонтали на масштабе длины  $L_e = R_e$  (в формулах (1.1)–(1.3) положим  $L = L_e$ ). Главные члены асимптотических разложений искомых функций при конечных  $\theta$  имеют порядки

$$y = \epsilon_e^{1/2} \eta, \quad h = \epsilon_e^{1/2} h_0, \quad v = \epsilon_e^{1/2} v_0, \quad p = \epsilon_e^{-1/2} p_0 \quad (3.1)$$

Остальные функции имеют порядок единицы. Индекс 0 ниже опущен. Для масштаба скорости  $U$  и малого параметра  $\epsilon_e$  имеем выражения через определяющие размерные параметры

$$U = \left( \frac{\rho g Q^2}{\mu L_e^2} \right)^{1/3}, \quad \epsilon_e = \left( \frac{\mu Q}{\rho g} \right)^{2/3} \frac{1}{L_e^{8/3}} \quad (3.2)$$

Считаем  $\text{Re} = o(\epsilon_e^{-1/2})$ . Подставляя (3.1) в (1.1)–(1.3) и оставляя главные члены, имеем

$$\frac{\partial u x}{\partial x} + x \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, \quad 0 = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \sin \theta, \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} = -\cos \theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial \eta} = k_1 \mu \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + k_2 \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \quad (3.3)$$

$$k_1 = \frac{Ec}{Fr^2}, \quad k_2 = \frac{1}{Fr^2 Pr}$$

$$\eta = h, \quad x > 0: v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}, \quad p = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = -\epsilon_e^{1/2} Nu_e F(T)$$

$$\eta = 0, \quad x > 0: u = v = \frac{\partial T}{\partial \eta} = 0$$

$$x = x_r(t): h = 0$$

Граничное условие при  $x_e = 0$  должно быть заменено условием асимптотического сращения с решением во внутренней области [19]. Последнее условие состоит в том, что асимптотика решения во внешней области при  $x_e \rightarrow 0$  должна совпадать с асимптотикой решения во внутренней области при  $x_i \rightarrow \infty$ , переписанной во внешних переменных.

Используя (3.2), получаем выражения для параметров  $k_1$  и  $k_2$

$$k_1 = \frac{gL}{c\Delta T^*}, \quad k_2 = \left( \frac{g\lambda^3 L_i^7}{\mu \rho^2 c^3 Q^4} \right)^{1/3} \quad (3.4)$$

Порядки величин параметров  $k_1$ ,  $k_2$  и  $\epsilon_e$  приведены в табл. 1 (при вычислении значений параметров использованы данные [12]). Исходя из оценки порядка величины параметра  $k_1$ , слагаемым с диссипативной функцией в уравнении притока тепла (3.3) пренебрегаем. Введем новые переменные

$$x = x_1 \sin \theta, \quad \eta = \xi h, \quad t = t_1, \quad u = u_1 \sin \theta$$

Остальные зависимые переменные оставлены без изменений, индекс  $l$  ниже опущен. Система (3.3) в новых переменных имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = -\frac{h}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \xi \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = -h^2$$

$$h^2 \frac{\partial T}{\partial t} + u h^2 \frac{\partial T}{\partial x} + h \left[ v - \xi \left( \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial T}{\partial \xi} = k_2 \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}$$

$$\xi = 1: v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \xi} = -\epsilon_e^{1/2} Nu_e h F(T) \quad (3.5)$$

$$\xi = 0, \quad x > 0: u = v = \frac{\partial T}{\partial \xi} = 0$$

$$x = x_r(t): h = 0$$

В рамках рассматриваемой модели все безразмерные параметры считаются известными, кроме безразмерной величины потока тепла  $Nu$  на свободной поверхности. В целях иллюстрации рассмотрим все асимптотические возможности. Используя соотношение между масштабами длины во внутренней и внешней областях  $L_e = L_i \epsilon_i^{-1/3}$ ,

Таблица 2

|   | Порядок $Nu_e$                                     | Внутренняя область                        | Внешняя область                           |
|---|----------------------------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|
| 1 | $Nu_e \ll \epsilon_e^{-3/8}$                       | $\partial T_i / \partial \xi_i = 0$       | $\partial T_e / \partial \xi_e = 0$       |
| 2 | $Nu_e \sim \epsilon_e^{-3/8}$                      | $\partial T_i / \partial \xi_i = -F(T_i)$ | $\partial T_e / \partial \xi_e = 0$       |
| 3 | $\epsilon_e^{-3/8} \ll Nu_e \ll \epsilon_e^{-1/2}$ | $F(T_i) = 0$                              | $\partial T_e / \partial \xi_e = 0$       |
| 4 | $Nu_e \sim \epsilon_e^{-1/2}$                      | $F(T_i) = 0$                              | $\partial T_e / \partial \xi_e = -F(T_e)$ |
| 5 | $\epsilon_e^{-1/2} \ll Nu_e$                       | $F(T_i) = 0$                              | $F(T_e) = 0$                              |

находим соотношение между величинами малых параметров  $\epsilon_i = \epsilon_e^{9/16}$ . Полученное соотношение позволяет привести граничные условия для температуры на свободной поверхности во внутренней и внешней областях к единому виду

$$\frac{\partial T}{\partial \xi_i} = -\epsilon_e^{3/8} Nu_e h F(T), \quad \frac{\partial T}{\partial \xi_e} = -\epsilon_e^{1/2} Nu_e h F(T)$$

В зависимости от порядка величины  $Nu_e$  имеем пять асимптотически различных вариантов, которые приведены в табл. 2. В случае, когда на свободной поверхности в обеих областях задано адиабатическое условие 1 (табл. 2), течение является изотермическим и описывается полученными ранее автомодельными решениями [9], в остальных случаях будем решать системы (2.5) и (3.5) численно.

Наличие контактной линии в задачах о течении со свободной границей по твердой поверхности при условии, что на подстилающей поверхности задано условие прилипания, вызывает возникновение неинтегрируемой особенности в распределении касательных напряжений в окрестности контактной линии [20]. Решение задачи в пренебрежении поверхностным натяжением не требует дополнительного граничного условия на контактной линии, поэтому можно ожидать, что решение не будет зависеть от способа устранения особенности. Одним из способов устранения особенности является введение так называемого предвестника – тонкого слоя конечной толщины во всей расчетной области в начальный момент времени (это условие использовалось при численных расчетах, например, в [6, 7, 9, 11–13]). С введением предвестника постановка задачи не содержит контактной линии, что позволяет построить регулярное решение, удовлетворяющее условию прилипания во всех точках подстилающей поверхности.

**4. Численный метод.** Система уравнений (2.5) решается численно на прямоугольной сетке в области  $[0, X] \times [0, 1] \times [0, t_{\max}]$ , где  $X$  – фиксированная точка, до которой передний фронт течения заведомо не дойдет за расчетное время  $t_{\max}$ . Выражения для потока тепла на свободной поверхности и зависимости вязкости от температуры принимаются в форме (1.4) и (1.5) соответственно. Профиль скорости массоподвода задан в форме Пуазейля  $u_m = 1 - x^2$ . При  $t = 0$  задан изотермический тонкий слой конечной толщины в всей области течения (предвестник)  $h(0, x) = \alpha \exp(-x^2/30)$ ,  $T(0, x, \xi) = 1$ . Процедура расчета организована следующим образом: по известным значениям  $h$ ,  $T$  на текущем временном слое рассчитываются компоненты скорости  $u$ ,  $v$ , затем производится расчет  $T$ ,  $h$  на следующем временном слое. На каждом временном слое задача о нахождении  $u$ ,  $v$  при известных  $h$ ,  $T$  и задача о нахождении  $T$  при известных  $u$ ,  $v$ ,  $h$  являются параболическими по координате  $x$ , поэтому в первую очередь рассчитываются значения параметров  $u$ ,  $v$ ,  $T$  на оси симметрии, которые затем используются как

начальные условия при  $x = 0$  для расчета вдоль слоя. Из уравнений и граничных условий (2.5) следует, что искомые функции при  $x \rightarrow 0$  можно представить в виде

$$u = xa(t, \xi), \quad v = b(t, \xi), \quad h = \delta_0(t) - \delta_2(t)x^2 \quad (4.1)$$

Подставляя разложения (4.1) в уравнения (2.5), получаем

$$\frac{\partial b}{\partial \xi} = -2\delta_0 a, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \mu \frac{\partial a}{\partial \xi} \right) = -\delta_0^2 (1 + 2\delta_2)$$

$$\delta_0^2 \frac{\partial T}{\partial t} + \delta_0 (b - \xi \delta_0') \frac{\partial T}{\partial \xi} = k_2 \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} \quad (4.2)$$

$$\xi = 0: a = 0, \quad b = v_m(t, 0), \quad T = 1$$

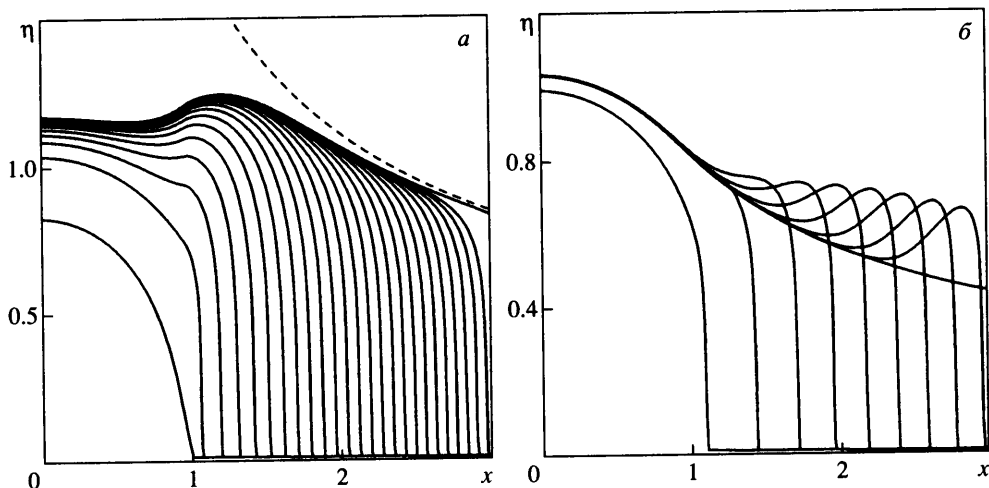
$$\xi = 1: \frac{\partial a}{\partial \xi} = 0$$

Граничное условие для температуры при  $\xi = 1$  выбираем из табл. 2. Дискретизация уравнений системы (4.2) полностью неявная по времени со вторым порядком по  $\xi$  и с первым порядком по  $t$ . Граничные условия, в которые входят производные искоемых величин, аппроксимируются с первым порядком точности. Сначала методом прогонки [21] разрешается система уравнений для  $a$ , затем методом трапеций [21] находится  $b$ , после чего методом прогонки находится  $T$ .

При построении схем для расчета  $u$ ,  $v$  и  $T$  дискретизация уравнений (2.5) проводится с первым порядком по  $x$  и  $t$  и со вторым порядком по  $\xi$ ; граничные условия, в которые входят производные искоемых функций, аппроксимируются с первым порядком точности, поэтому в целом схема имеет первый порядок аппроксимации. Шаг сетки по поперечной и продольной координатам изменялся в диапазоне  $10^{-1}$ – $10^{-4}$ . В качестве начального условия при  $x = 0$  используются результаты расчета системы (4.2). Системы уравнений с трехдиагональной матрицей для  $u$  и  $T$  разрешаются методом прогонки,  $v$  находится методом трапеций.

В результате полностью неявной по времени дискретизации кинематического граничного условия на свободной поверхности с первым порядком по  $t$  и со вторым порядком по  $x$  получаем схему расчета  $h$  на следующем временном слое. При вычислении компоненты скорости  $u$  используются значения  $dh/dx$  с текущего временного слоя, поэтому фактически данная схема представляет собой явную схему расчета параболического уравнения для  $h$ . Явные схемы расчета параболических уравнений устойчивы [20], поэтому шаг по времени выбирался достаточно малым ( $10^{-3}$ – $10^{-4}$ ), чтобы обеспечить устойчивость расчета.

Решение системы (3.5) для внешней области проводилось аналогичным методом. В качестве начального условия при достаточно малом  $x_0 \ll 1$  задаются асимптотические распределения параметров  $u$  и  $T$  внутреннего решения при  $x_i \rightarrow \infty$ , переписанные во внешних переменных. Значения  $u$ ,  $v$ ,  $T$  рассчитываются так же, как во внутренней области. Уравнение для  $h$  во внешней области является гиперболическим, так как в динамическое уравнение не входит  $dh/dx$ . Для того чтобы избежать возникновения разрыва на переднем фронте течения, в уравнение была введена искусственная вязкость в виде  $\beta \partial^2 h / \partial^2 x$  при достаточно малом  $\beta$ . В расчетах получены диапазоны значений толщины предвестника и величины искусственной вязкости, в которых решение слабо зависит от этих параметров. Дискретизация по времени полностью неявная, поэтому схема безусловно устойчива и величина шага по времени определяется исключительно требованиями к точности расчета. Сходимость описанных схем контро-



Фиг. 1. Положения свободной поверхности через равные промежутки времени во внутренней области для  $n = 2$ ,  $k_2 = 1$  (а) и  $0.01$  (б) при заданном потоке тепла на свободной границе (условие 2 табл. 2)

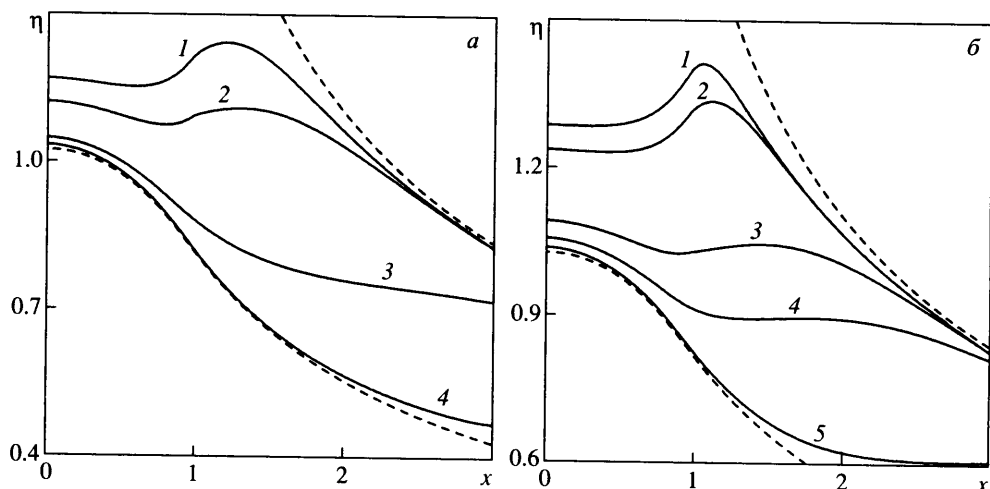
лируется путем проведения расчетов на последовательности сгущающихся сеток и сравнения результатов в совпадающих узлах сетки.

**5. Результаты расчетов.** Расчеты системы (2.5) во внутренней области проведены при различных значениях параметров  $n$  и  $k_2$  для двух возможных типов граничного условия для температуры на свободной поверхности – 2 (задан поток тепла) и 3 (задана нулевая температура) табл. 2. При умеренных коэффициентах  $k_2 \sim 1$  при старшей производной в уравнении притока тепла (2.5), что соответствует основной лаве, на масштабе длины порядка радиуса жерла формируется зона интенсивного остывания, где температура жидкости опускается до температуры внешней среды ( $T = 0$ ) (фиг. 1,а). При этом толщина слоя увеличивается, а форма свободной поверхности приближается к асимптотике изотермического решения [8] при  $x \rightarrow \infty$ , соответствующего температуре внешней среды

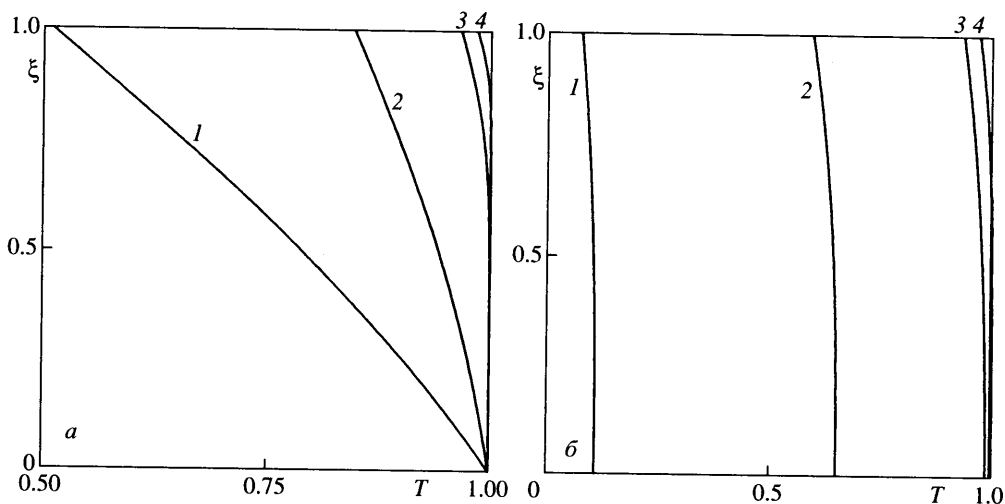
$$h = \left( \frac{3q\mu(0)}{x^2} \right)^{1/3}, \quad q = \int_0^1 v_m(x) x dx$$

При малых  $k_2$  (2.4) (кислая лава, характерный масштаб вязкости которой превышает на пять порядков масштаб вязкости основной лавы [12]) течение изотермическое за исключением окрестности переднего фронта, где жидкость остывает и формируется локальный максимум толщины слоя (фиг. 1,б).

При  $k_2 \rightarrow 0$ , что соответствует параметрам реального лавового течения, неизотермическое решение для формы свободной поверхности стремится к изотермическому при  $T = 1$  (фиг. 2) как в случае, когда на свободной поверхности задан потока тепла (условие 2 табл. 2), так и в случае, когда задана нулевая температура (условие 3 табл. 2). В целях иллюстрации последнего утверждения на фиг. 3, 4 представлены распределения температуры в различных вертикальных сечениях. В случае, когда на свободной поверхности задан поток тепла (условие 2 табл. 2), распределение температуры при  $x_i \rightarrow \infty$  в пределе по  $k_2 \rightarrow 0$  стремится к  $T = 1$  при  $0 \leq \xi \leq 1$  (фиг. 3,б). В случае 3, когда на свободной поверхности задана нулевая температура, предельным распределением температуры при  $x_i \rightarrow \infty$  и  $k_2 \rightarrow 0$  является  $T = 1$  при  $0 \leq \xi < 1$  и  $T = 0$  при  $\xi = 1$  (фиг. 4,б).

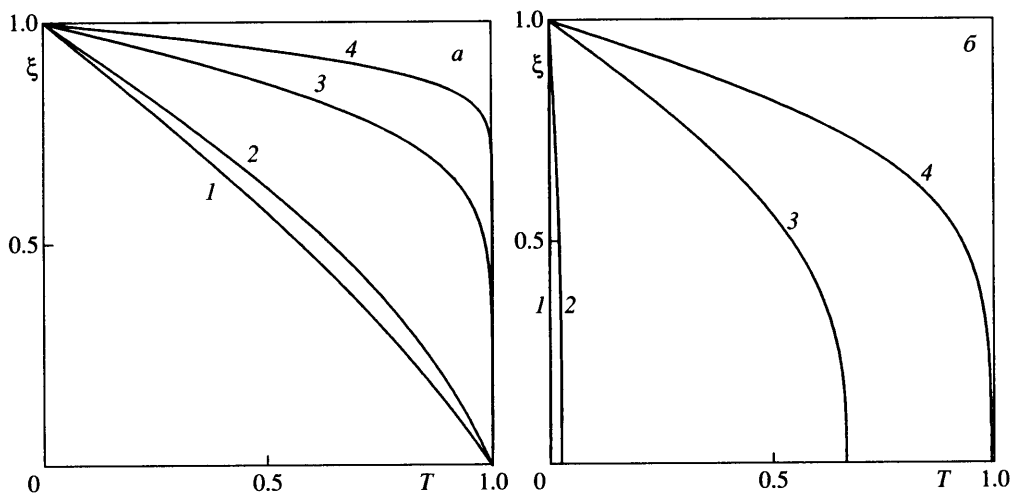


Фиг. 2. Стационарные решения для формы свободной поверхности во внутренней области при  $n = 2$ :  $k_2 = 1, 0.5, 0.1, 0.01$  – кривые 1–4 при заданном потоке тепла на свободной границе (условие 2 табл. 2) (а);  $k_2 = 1, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01$  – кривые 1–5 при заданной температуре на свободной границе (условие 3 табл. 2) (б). Верхняя и нижняя штриховые линии – стационарные изотермические асимптотики для  $T = 0$  и 1

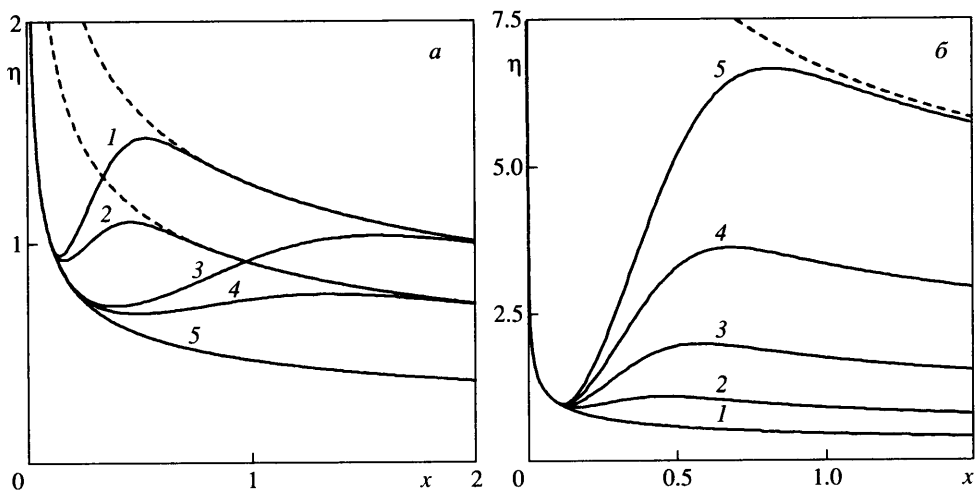


Фиг. 3. Профили температуры для внутренней области в сечениях  $x = 0.5$  (а) и  $1.5$  (б);  $n = 2$ ,  $k_2 = 1, 0.5, 0.05, 0.01$  – кривые 1–4. На свободной поверхности задан поток тепла (условие 2 табл. 3)

Граничные условия во внешней области при  $x_e \rightarrow 0$  задаются из условия асимптотического сращения [19] с предельным решением ( $k_2 = 0$ ) во внутренней области. В обеих областях поперечная координата  $0 \leq \xi \leq 1$ , поэтому сращивание следует проводить только по продольной координате  $x$ . Для численного расчета системы уравнений во внешней области (3.5) при  $x_e = x_0 \ll 1$  задаются распределения температуры и скорости внутреннего решения при  $x_i \rightarrow \infty$ . В случаях 2 и 3 табл. 2 течение во внутренней области изотермическое, а во внешней области на свободной поверхности задано



Фиг. 4. Профили температуры для внутренней области в сечениях  $x = 0.5$  (а) и  $1.5$  (б);  $n = 2$ ,  $k_2 = 1, 0.5, 0.05, 0.01$  – кривые 1–4. На свободной поверхности задана температура (условие 3 табл. 2)



Фиг. 5. Стационарные решения для формы свободной поверхности во внешней области при заданном потоке тепла на свободной границе (условие 4 табл. 2). Кривые 1, 2 соответствуют  $k_2 = 1$ ,  $n = 3$  и 2; кривые 3, 4 –  $k_2 = 0.1$ ,  $n = 3$  и 2; линия 5 – изотермическое решение при  $T = 1$  (а). Кривые 1–5 соответствуют  $k_2 = 1$ ,  $n = 0, 2, 4, 6, 8$  (б). Штриховые линии – стационарные изотермические решения при  $T = 0$

адиабатическое условие, поэтому течение во внешней области также изотермическое и описывается автомодельными решениями [9]. В качестве граничных условий во внешней области при  $x_e \rightarrow 0$  для случаев 4, 5 табл. 2 задаются непрерывные изотермические распределения температуры и скорости (условие может быть изменено в одной точке  $\xi = 1$ , что не повлияет на решения):

$$0 \leq \xi \leq 1: T = 1, \quad u = \frac{\xi h^2 (2 - \xi)}{2} \quad (5.1)$$

Как и во внутренней области, при течении во внешней области формируется зона интенсивного остывания, в которой форма свободной поверхности приближается к изотермическому стационарному решению, соответствующему вязкости жидкости при  $T = 0$ . Ширина зоны остывания растет с уменьшением параметра  $k_2$  (3.4), что соответствует течению сильновязкой кислой лавы (фиг. 5, штриховой линией показаны изотермические стационарные решения  $h = (3\mu(0)/x_p)^{1/3}$  [8]). Таким образом, неизо-термическое решение для толщины слоя зажато между известными аналитическими стационарными решениями, соответствующими температурам извержения ( $T = 1$ ) и окружающей среды ( $T = 0$ ). Аналогично закон движения переднего фронта течения ограничен автомодельными решениями [9], соответствующими вязкости жидкости при  $T = 0$  и 1. В расчетах величина параметра  $n$  достигала значений  $n = 3$  и 8 для внутренней и внешней областей соответственно. При этом вязкость (1.5) изменялась в области течения на один-три порядка, что позволяет использовать построенные модели и полученные решения для приближенного описания остывающих лавовых течений с затвердеванием (фиг. 1 и 5,б).

**Закключение.** В приближении тонкого слоя сильновязкой жидкости с массоподводом методом сращиваемых разложений построено однопараметрическое семейство асимптотических моделей течения остывающей лавы на поверхности конуса при экспоненциальной зависимости вязкости лавы от температуры (параметр – безразмерная интенсивность потока тепла на свободной поверхности). Каждая модель из семейства содержит два безразмерных параметра подобия: коэффициент при старшей производной в уравнении притока тепла и показатель в зависимости вязкости от температуры. Численными методами получены нестационарные решения, описывающие эволюцию формы свободной поверхности и полей гидродинамических параметров при мгновенном начале извержения. Проведено качественное исследование формы свободной поверхности в зависимости от определяющих безразмерных параметров. Показано, что нестационарные формы свободной поверхности ограничены стационарными изотермическими решениями, соответствующими вязкости лавы при температурах извержения и окружающей среды. В области интенсивного остывания возникает локальный максимум толщины слоя, где форма свободной поверхности приближается к изотермическому решению, соответствующему температуре окружающей среды. При этом ширина области интенсивного остывания растет при увеличении вязкости и теплоемкости лавы, поступающей из жерла вулкана. Решения, для которых вязкость меняется на несколько порядков в поле течения, могут быть использованы для приближенного описания лавовых течений с солидификацией вблизи переднего фронта.

Автор выражает благодарность А.А. Бармину и О.Э. Мельнику за обсуждение и полезные рекомендации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Президентского гранта поддержки ведущих научных школ (проект НШ-1697.2003.1) и гранта РФФИ (№ 2-01-00067).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Griffiths R.W. The dynamics of lava flows // Annu. Rev. Fluid Mech. 2000. V. 32. P. 477–518.
2. Huppert H.E. The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents over a rigid horizontal surface // J. Fluid Mech. 1982. V. 121. P. 43–58.
3. Smith P.C. A similarity solution for slow viscous flow down an inclined plane // J. Fluid Mech. 1973. V. 58. Pt 2. P. 275–288.
4. Lister J.R. Viscous flow down an inclined plane from point and line sources // J. Fluid Mech. 1992. V. 242. P. 631–653.
5. Balmforth N.J., Craster R.V. A consistent thin-layer theory for Bingham plastics // J. Non-Newt. Fluid Mech. 1999. V. 84. P. 65–81.

6. Balmforth N.J., Burbidge A.S., Craster R.V., Salzig J., Shen A. Viscoplastic models of isothermal lava domes // J. Fluid Mech. 1999. V. 403. P. 37–65.
7. Balmforth N.J., Craster R.V., Sassi R. Shallow viscoplastic flow on an inclined plane // J. Fluid Mech. 2002. V. 470. P. 1–29.
8. Осипцов А.А. Стационарное пленочное течение сильновязкой тяжелой жидкости с массоподводом // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 6. С. 24–31.
9. Осипцов А.А. Автомоделное решение задачи о росте лавового купола на произвольной конической поверхности // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 1. С. 53–68.
10. Lopez P.G., Bankoff S.G., Miksis M.J. Non-isothermal spreading of a thin liquid film on an inclined plane // J. Fluid Mech. 1996. V. 324. P. 261–286.
11. King J.R., Riley D.S., Sansom A. Gravity currents with temperature-dependent viscosity // Comput. Assist. Mech. Eng. Sci. 2000. V. 7. P. 251–277.
12. Balmforth N.J., Craster R.V. Dynamics of cooling domes of viscoplastic fluid // J. Fluid Mech. 2000. V. 422. P. 225–248.
13. Balmforth N.J., Craster R.V., Sassi R. Dynamics of cooling viscoplastic domes // J. Fluid Mech. 2004. V. 499. P. 149–182.
14. Griffiths R.W., Fink J.H. Solidifying Bingham extrusions: a model for the growth of silicic lava domes // J. Fluid Mech. 1997. V. 347. P. 13–36.
15. Neri A. A local heat transfer analysis of lava cooling in the atmosphere: application to thermal diffusion-dominated lava flows // J. Volcan. Geotherm. Res. 1998. V. 81. P. 215–243.
16. Fink J.H., Griffiths R.W. Radial spreading of viscous-gravity currents with solidifying crust // J. Fluid Mech. 1990. V. 221. P. 485–509.
17. Dragoni M.A. A dynamical model of lava flows cooling by radiation. // Bull. Volcanol. 1989. V. 51. P. 88–95.
18. Классификация магматических (изверженных) пород и словарь терминов (рекомендации подкомиссии по систематике изверженных пород Международного союза геологических наук). М.: Недра. 1997.
19. Ван Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 296 с.
20. Dussan V., E.B. On the spreading of liquids on solid surfaces: static and dynamic contact angles // Annu. Rev. Fluid Mech. 1979. V. 11. P. 371–400.
21. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.