МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 2005

УДК 532.51.013.4:536.252

© 2005 г. К. Г. ШВАРЦ

ВЛИЯНИЕ ВРАЩЕНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ АДВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ ПРИ МАЛОМ ЗНАЧЕНИИ ЧИСЛА ПРАНДТЛЯ

Исследуется устойчивость адвективного течения во вращающемся бесконечном горизонтальном слое жидкости с твердыми границами при малом значении числа Прандтля Pr = 0.1 для различных значений числа Тейлора в случае возмущений гидродинамического типа. В рамках линейной теории устойчивости получены нейтральные кривые, описывающие зависимость критического числа Грасгофа от волнового числа. Численно изучается поведение конечно-амплитудных возмущений за порогом устойчивости.

Ключевые слова: адвективное течение, вращение, устойчивость, нормальные возмущения, нейтральная кривая, конечно-амплитудные возмущения.

В плоском горизонтальном слое жидкости при наличии вдоль границ постоянного градиента температуры возникает адвективное течение. При наличии вращения такие течения были впервые описаны аналитически в [1]. Их особенностью является отсутствие вертикальной компоненты скорости, вектор скорости в потоке **v** перпендикулярен силе плавучести, однако имеются обе горизонтальные компоненты. Адвективное течение во вращающемся слое имеет характерную спиралевидную форму, подобную изотермическому течению Экмана [2]. С увеличением разности температур интенсивность адвективного движения возрастает, и оно становится неустойчивым. При этом гидродинамический кризис сопровождается кризисом теплопередачи. Образующееся при потере устойчивости вторичное течение в свою очередь тоже может быть неустойчивым. Последовательность кризисов устойчивости приводит в конце концов к турбулентности.

В первых работах по исследованию устойчивости адвективного течения во вращающемся слое жидкости [3–6] рассматривалась задача о течении в слое с твердыми границами при Pr = 6.7 (вода). Было показано, что вращение стабилизирует адвективное течение, неустойчивость имеет колебательный характер. Вращение приводит к возникновению надкритичных возмущений в виде нестационарных, винтообразных трехмерных вихрей, расположенных в потенциально неустойчивых зонах температуры и движущихся периодически вдоль границ слоя. С ростом числа Тейлора вихри локализуются вблизи горизонтальных границ.

Устойчивость адвективных течений, возникающих в слое без вращения, исследована довольно основательно, прежде всего в работах [7–9]. В частности, было показано, что при малых значениях числа Прандтля нормальные возмущения в виде валов с осями, перпендикулярные основному потоку ("плоские возмущения"), приводят к неустойчивости, обусловленной гидромеханическим механизмом. Она связана с развитием вихрей на границе встречных потоков. При конечных Pr в области образования вихрей имеется устойчивая температурная стратификация, затрудняющая их развитие. В работе [10] проведены расчет и анализ конечно-амплитудных режимов.

Цель данной работы – исследование влияния вращения на устойчивость адвективного течения в горизонтальном слое жидкости с твердыми границами при малом значении числа Прандля (Pr = 0.1) в случае возмущений гидродинамического типа.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоский горизонтальный слой несжимаемой жидкости, ограниченный твердыми плоскостями $Z = \pm h$ и вращающийся с постоянной угловой скоростью Ω_0. Ось вращения совпадает с вертикальной осью координат. На обеих границах слоя задана температура, линейно меняющаяся с горизонтальной координатой x, условие прилипания и замкнутости потока

$$Z = \pm h\colon T = Ax, \quad A = \mathrm{const}, \quad \mathbf{v} = 0, \quad \int_{-h}^{h} v_x dz = 0 \tag{1.1}$$

Исследование будем проводить на основе уравнений конвекции в приближении Буссинеска во вращающейся системе отсчета в декартовой системе координат [11]. Предполагаем, что число Фруда $\mathrm{Fr} = \Omega_0^2 l/g \ll 1$ (g – ускорение свободного падения, l – горизонтальный масштаб), поэтому центробежной конвективной силой можно пренебречь. Выбрав в качестве единиц измерения длины, времени, скорости, температуры и давления соответственно h, h^2/ν, $g\beta A h^3/\nu$, Ah, $\rho_0 g\beta A h^3$ (где ν – кинематическая вязкость, β – коэффициент теплового расширения, ρ_0 – средняя плотность), получим уравнения в безразмерном виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathrm{Gr}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \sqrt{\mathrm{Ta}}(\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}) = -\nabla P + \Delta \mathbf{v} + T\mathbf{e}_z$$

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \mathrm{Gr}\mathbf{v}\nabla T = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta T \tag{1.2}$$

$$\mathrm{Gr} = \frac{g\beta A h^4}{\nu^2}, \quad \mathrm{Ta} = \left(\frac{2\Omega_0 h^2}{\nu}\right)^2, \quad \mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\chi}$$

где $\mathbf{v}(t, x, y, z) = (v_x, v_y, v_z)$ – вектор скорости, T – температура, P – давление, $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$ – орт-вектор вертикальной оси z, Gr – число Грасгофа, Ta – число Тейлора, Pr – число Прандтля, χ – коэффициент температуропроводности.

Для граничных условий (1.1) в плоском вращающемся слое несжимаемой жидкости формируется однородное по x, y стационарное адвективное течение, которое описывается аналитически [3]:

$$u_0(z) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Ta}}}\mathrm{Im} f_1(z), \quad v_0(z) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Ta}}}[z - \mathrm{Re} f_1(z)]$$

$$T_0 = x + \mathrm{GrPr}\tau_0(z), \quad \tau_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Ta}}} v_0(z), \quad p_0 = xz + \int_{-1}^{z} \frac{\mathrm{GrPr}}{\sqrt{\mathrm{Ta}}} v_0(\zeta) d\zeta \tag{1.3}$$

$$f_1(z) = \frac{\sinh(\mu z)}{\sinh(\mu)}, \quad \mu = \sqrt[4]{\mathrm{Ta}}\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad i = \sqrt{-1}$$

Профили компонент скорости $u_0(z)$. $v_0(z)$ и соответственно $\tau_0(z)$ антисимметричны относительно оси x. Они описывают характерное спиралевидное движение. Температура представляется в виде функции, описывающей два антисимметричных тепловых потока, направленных в противоположные стороны. С ростом числа Тейлора вблизи твердых границ образуются пограничные слои скорости и температуры, их относительная ширина убывает пропорционально $\sqrt[4]{\mathrm{Ta}/4}$.

Для исследования устойчивости стационарного адвективного течения (1.3) применим метод малых возмущений

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{V}, \quad \mathbf{v}_0 = (u_0, v_0, 0), \quad \mathbf{V} = (u, v, w), \quad T = T_0 + \theta, \quad P = p_0 + P' \tag{1.4}$$

Подставим возмущенные поля (1.4) в исходную систему (1.2) и граничные условия (1.1), получим следующую задачу:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathrm{Gr}[(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{V}] + \sqrt{\mathrm{Ta}}(\mathbf{e}_z \times \mathbf{V}) = -\nabla P' + \Delta \mathbf{V} + \theta \mathbf{e}_z \tag{1.5}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{V} = 0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathrm{Gr}[\mathbf{V}\nabla\theta + \mathbf{V}\nabla T_0 + \mathbf{v}_0\nabla\theta] = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta\theta \tag{1.6}$$

$$z = \pm 1: \mathbf{V} = 0, \quad \theta = 0$$

2. Линейная теория. В рамках линейной теории устойчивости в уравнениях (1.5) пренебрежем квадратичными по возмущениям $\mathbf{V}$ и θ слагаемыми. Рассмотрим периодические по x возмущения в виде валов с осью, перпендикулярной оси x. Уравнения возмущений выводятся из линеаризованной системы (1.5)–(1.6) в предположении, что производная по y от всех функций равна нулю. В случае отсутствия вращения такие возмущения назывались плоскими, так как в получаемых уравнениях остаются только две компоненты возмущения скорости. В рассматриваемом случае имеются все три компоненты, которые, так же как и возмущение температуры, суть функции времени и двух пространственных координат x, z, поэтому в дальнейшем будем называть эти возмущения винтовыми.

Введем функцию тока возмущений $\psi(t, x, z)$ и вихря возмущения скорости ϕ:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \phi = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = -\Delta\psi, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\phi = [\phi_1(t, z) + i\phi_2(t, z)]\exp(ik_x x), \quad \psi = [\psi_1(t, z) + i\psi_2(t, z)]\exp(ik_x x)$$

$$v = [v_1(t, z) + iv_2(t, z)]\exp(ik_x x), \quad \theta = [\theta_1(t, z) + i\theta_2(t, z)]\exp(ik_x x)$$

где k_x – волновое число. В результате задача сведется к системе линейных уравнений в частных производных по времени t и переменной z, со следующими начальными условиями по t и граничными условиями по z:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} - k_x \mathrm{Gr}[u_0(z)\phi_2 + u_0''(z)\psi_2] - \sqrt{\mathrm{Ta}}\frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} - k_x^2\phi_1 + k_x\theta_2$$

$$\frac{\partial^2 \psi_\alpha}{\partial z^2} - k_x^2\psi_\alpha + \phi_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + k_x \mathrm{Gr}[u_0(z)\phi_1 + u_0''(z)\psi_1] - \sqrt{\mathrm{Ta}}\frac{\partial v_2}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} - k_x^2\phi_2 - k_x\theta$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} - k_x \mathrm{Gr}[u_0(z)v_2 + v_0'(z)\psi_2] - \sqrt{\mathrm{Ta}}\frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - k_x^2 v_1 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + k_x\mathrm{Gr}[u_0(z)v_1 + v_0'(z)\psi_1] - \sqrt{\mathrm{Ta}}\frac{\partial\psi_2}{\partial z} = \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} - k_x^2 v_2$$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial t} - k_x\mathrm{Gr}\left[u_0(z)\theta_2 + \frac{\mathrm{Ra}}{\sqrt{\mathrm{Ta}}}v_0'(z)\psi_2\right] - \mathrm{Gr}\frac{\partial\psi_1}{\partial z} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\left[\frac{\partial^2\theta_1}{\partial z^2} - k_x^2\theta_1\right]$$

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial t} + k_x\mathrm{Gr}\left[u_0(z)\theta_1 + \frac{\mathrm{Ra}}{\sqrt{\mathrm{Ta}}}v_0'(z)\psi_1\right] - \mathrm{Gr}\frac{\partial\psi_2}{\partial z} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\left[\frac{\partial^2\theta_2}{\partial z^2} - k_x^2\theta_2\right]$$

$$v_\alpha = \theta_\alpha = \sin^2\pi z, \quad \phi_\alpha = 2\pi^2\cos 2\pi z \quad (\alpha = 1, 2) \tag{2.2}$$

$$z = \pm 1: \psi_\alpha = \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial z} = v_\alpha = \theta_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2) \tag{2.3}$$

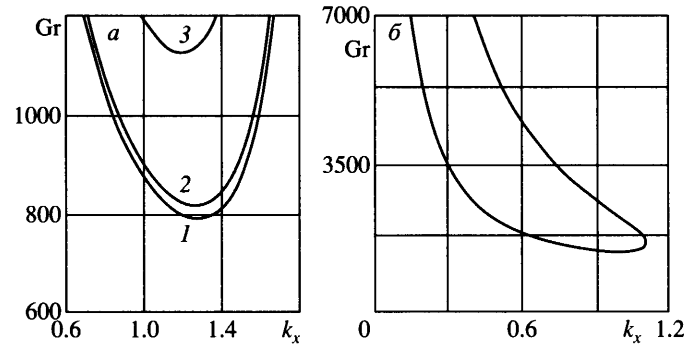
Число Релея Ra = GrPr.

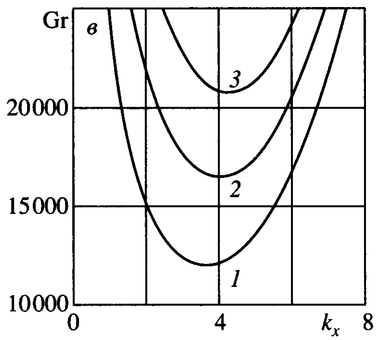
Система (2.1)–(2.3) решается по численной методике, описанной в работе [5], аналогичной схемам двухполевого метода [12], который используется для решения двумерных задач в переменных функции тока и вихря скорости. Уравнения для возмущения вихря и функции тока решаются с помощью классической неявной схемы. Вихри $\phi_{1,2}$ на границах аппроксимируются по формуле Вудса [12]. Число узлов сетки бралось равным 201, оно определяется требуемой точностью приближенного решения и шириной пограничного слоя, уменьшающейся с ростом Ta. Число Тейлора изменялось в интервале $0 \le \mathrm{Ta} \le 10^5$, число Прандтля зафиксировано: Pr = 0.1.

Для построения нейтральной кривой, описывающей зависимость критического числа Грасгофа от волнового числа k_x при фиксированном числе Тейлора, для каждого выбранного значения k_x требуется найти такое число Грасгофа, при котором действительная часть декремента возмущений $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ равна нулю. Иными словами, решается задача о поиске корня $\lambda_1 = 0$ для неявной функции $\lambda_1(k_x$, Gr, Ta). Эта функция строилась дискретно по точкам с помощью многократного решения эволюционной задачи (2.1)–(2.3) методом сеток. Для нахождения действительной части декремента возмущений λ_1 прослеживалась эволюция во времени максимумов по модулю неизвестных. В качестве аппроксимации зависимости амплитуд от времени использована экспоненциальная формула $C\exp(\lambda_1 t)$. Неизвестные C и λ_1 определялись методом наименьших квадратов [13] по ходу вычислений уравнений системы. Нулевое значение декремента возмущений уточняется методом хорд.

Расчеты показали, что вращение не меняет монотонный характер неустойчивости адвективного течения. Анализ нейтральных кривых (фиг. 1) показывает, что при $0 \le \mathrm{Ta} < 279$ критическое число Грасгофа Gr_c резко возрастает с ростом числа Тейлора (фиг. 2, *а*, кривая *1*), т.е. слабое вращение стабилизирует адвективное течение. При этом волновое число k_x, соответствующее Gr_c, сначала убывает в интервале $0 \le \mathrm{Ta} \le 65$ с ростом Ta (фиг. 2, *б*, кривая *1*), а при Ta > 65 оно начинает возрастать. Исследование порога устойчивости очень затруднительно в интервале 100 < Ta < 279, где критическое значение числа Грасгофа принимает очень большие значения.

При Ta = 295 появляется длинноволновая неустойчивость, волновое число, соответствующее Gr_c, равно 0.074. Численный анализ дает приближенную оценку его роста на интервале $295 \le \mathrm{Ta} \le 10^5$ пропорционально $\mathrm{Ta}^{0.25}$ (фиг. 2, *б*, кривая *2*). При $279 \le \mathrm{Ta} \le 550$ с ростом числа Тейлора происходит дестабилизация течения, критическое число Грасгофа убывает (фиг. 2, *а*, кривая *2*). Нейтральные кривые (фиг. 1, *б*) имеют нижние и верхние ветви: для каждого волнового числа имеется интервал неустойчивости по Gr. Начиная с $\mathrm{Ta} \ge 550$ критическое число Грасгофа монотонно возрастает с ростом числа Тейлора (фиг. 2, *а*, кривая *2*). Численный анализ показывает, что





Фиг. 1. Нейтральные кривые адвективного течения при малых значениях числа Тейлора (Ta = 0, 1, 10 – кривая *1–3*) (*а*), при Ta = 500 (*б*) и при больших Ta (Ta = 20000, 30000, 40000 кривая *1–3*) (*в*)

на интервале $550 \le \mathrm{Ta} \le 10^5$ Gr_c возрастает пропорционально $\mathrm{Ta}^{0.875}$. Вид нейтральных кривых становится подобным виду нейтральных кривых для малых Ta (фиг. 1, *в*). Таким образом, быстрое вращение стабилизирует адвективное течение в плоском горизонтальном слое жидкости при малом числе Прандтля для данного вида нормальных возмущений.

3. Конечно-амплитудные пространственные возмущения. Поведение возмущений конечной амплитуды в надкритической области и вторичные течения исследуются на основе нелинейной системы (1.5), (1.6), для пространственных винтовых периодических по x возмущений она имеет вид

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathrm{Gr}\left[-\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial z} + u_0(z)\frac{\partial\phi}{\partial x} + u_0''(z)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right] - \sqrt{\mathrm{Ta}}\frac{\partial v}{\partial z} = \Delta\phi - \frac{\partial\theta}{\partial x}$$

$$\Delta\psi + \phi = 0$$

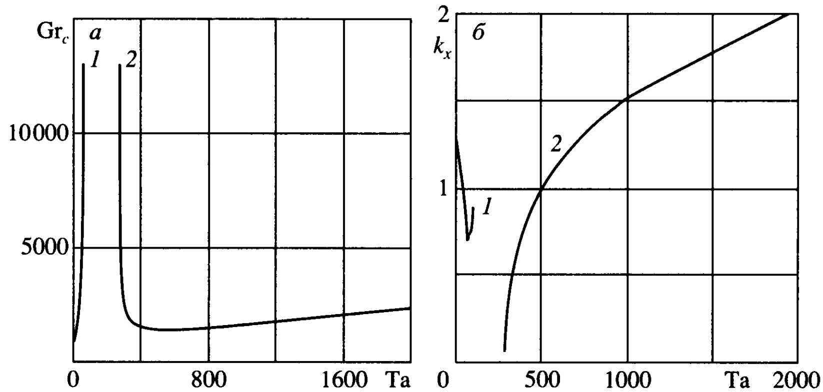
$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathrm{Gr}\left[-\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} + u_0(z)\frac{\partial v}{\partial x} + v_0'(z)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right] - \sqrt{\mathrm{Ta}}\frac{\partial\psi}{\partial z} = \Delta v \qquad (3.1)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \mathrm{Gr}\left[-\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial z} + u_0(z)\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\mathrm{Ra}}{\sqrt{\mathrm{Ta}}}v_0'(z)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right] = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta\theta$$

Граничные условия

$$z = \pm 1:\ \psi = \frac{\partial\psi}{\partial z} = v = \theta = 0 \qquad (3.2)$$

$$\begin{aligned} &\psi(t, 0, z) = \psi(t, L, z), \quad \phi(t, 0, z) = \phi(t, L, z) \\ &v(t, 0, z) = v(t, L, z), \quad \theta(t, 0, z) = \theta(t, L, z) \end{aligned} \qquad (3.3)$$



Фиг. 2. Зависимость критического числа Грасгофа Gr_c (*а*) и соответствующего ему волнового числа k_x (*б*) от числа Тейлора

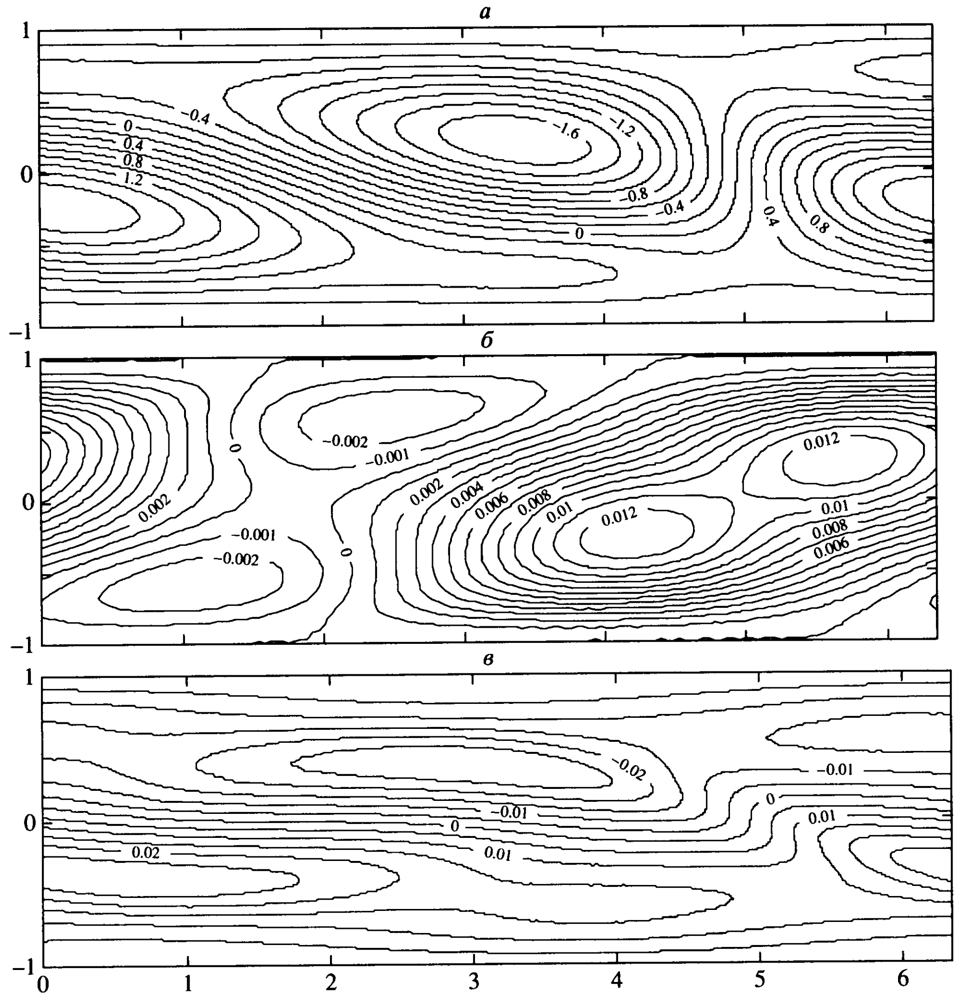
где L – длина волны возмущений, соответствующая критическому числу Грасгофа для фиксированного числа Тейлора.

Функция тока $\psi(t, x, z)$ описывает проекцию движения конечно–амплитудных возмущений на плоскость XZ. Вторая же компонента скорости $\upsilon(t, x, z)$ описывает проекцию движения конечно-амплитудных возмущений на плоскость YZ или XY. Положительная величина скорости описывает движение вглубь, а отрицательное значение – движение в противоположном направлении, перпендикулярное плоскости XZ.

С помощью системы уравнений (3.1) с граничными условиями (3.2)–(3.3) исследовалась структура конечно-амплитудных возмущений, возникающих в горизонтальном слое жидкости для значений числа Грасгофа выше критического при $\mathrm{Pr} = 0.1$ и для различных значений Та. Нелинейная двумерная задача решалась численно методом сеток. В рамках двухполевого метода [12] использована явная конечно-разностная схема. Уравнение Пуассона для функции тока решалось методом последовательной верхней релаксации. Вихрь на твердых границах аппроксимировался по формуле Вудса. Основные расчеты проводились на сетке 41×150 для $0 \le \mathrm{Ta} \le 10^5$. В качестве начальных возмущений неизвестных бралась функция $\cos(2\pi x/L)\sin^2\pi z$, удовлетворяющая граничным условиям (3.2)–(3.3).

Расчеты, проведенные для случая отсутствия вращения при $\mathrm{Ta} = 0$, подтвердили результаты [7–9]. Вблизи от минимумов нейтральных кривых возмущения температуры представляют собой систему чередующихся теплых и холодных пятен вдоль оси X, а функция тока возмущений описывает систему стационарных вихрей, расположенных также вдоль оси абсцисс и охватывающих весь поток. Косинус угла наклона вихрей к оси X положительный.

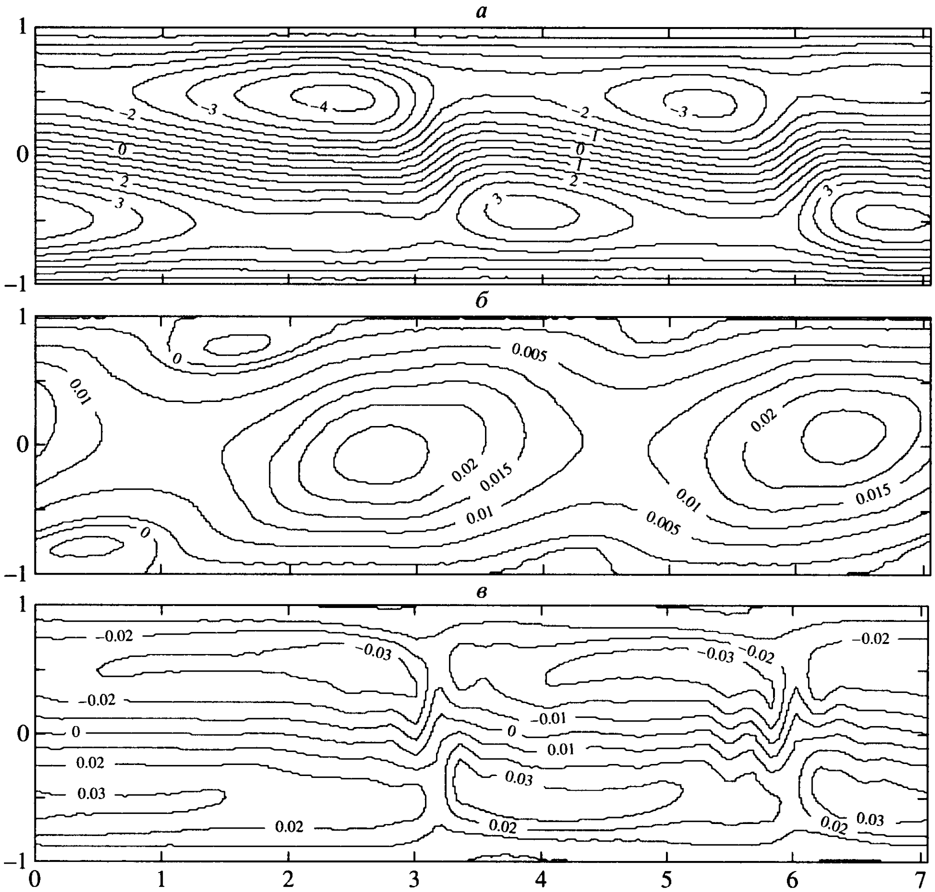
При слабом вращении для $0 < \mathrm{Ta} < 50$ с ростом числа Тейлора (фиг. 3, *а*) уменьшаются вертикальные размеры чередующихся тепловых пятен (примерно в 2 раза при $\mathrm{Ta} = 40$). Холодные пятна начинают локализоваться в верхней половине, а теплые – в нижней половине слоя жидкости. Конечно-амплитудные возмущения образуют систему пространственных вихрей. Проекция движения, описанная функцией тока возмущений, представляет собой систему чередующихся стационарных пар вращающихся в одинаковом направлении вихрей. Причем пары вихрей, вращающихся в плоскости XZ по часовой стрелке, увеличиваются в размерах, амплитуда же вихрей, вращающихся против часовой стрелки, уменьшается (фиг. 3, *б*). Одновременно y-я компонента скорости возмущения, имеющая в верхней половине слоя отрицательное значение, а в ни-



Фиг. 3. Изотермы θ (*а*), линии тока ψ (*б*) и изолинии компоненты скорости v (*в*) стационарных конечно-амплитудных возмущений при Ta = 40, Gr = 4000

жней – положительное (фиг. 3, *в*), описывает вращение стационарных вихрей против часовой стрелки в плоскости *YZ*.

При 50 ≤ Ta < 279 конечно-амплитудные возмущения приобретают нестационарный характер. Можно выделить две основные периодически меняющиеся по времени картины течения. На первой фазе распределение тепловых пятен и расположение вихрей вдоль слоя аналогично стационарному распределению, возникавшему при меньших значениях числа Тейлора и представленному на фиг. 3. Затем с течением времени пара вихрей, вращающаяся по часовой стрелке в плоскости *XZ*, разворачивается и вытесняет из центра слоя пару вихрей, движущуюся против часовой стрелки. В результате во второй фазе (фиг. 4, *б*) в центре слоя вдоль оси *X* возникает цепочка вихрей, вращающихся по часовой стрелке в плоскости *XZ*. Затем снова повторяется первая фаза. В то же время скорость $v(t, x, z)$ остается преимущественно отрицательной в верхней половине и преимущественно положительной в нижней половине

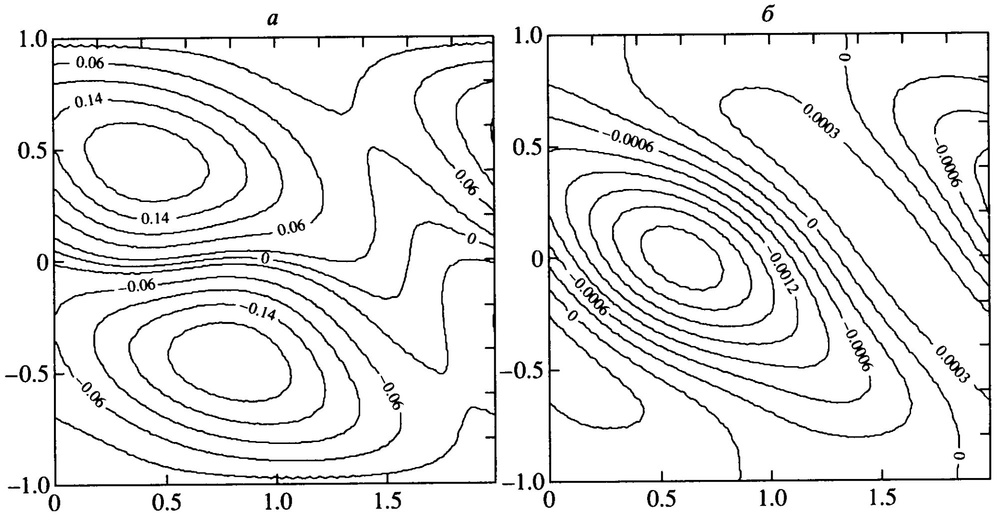


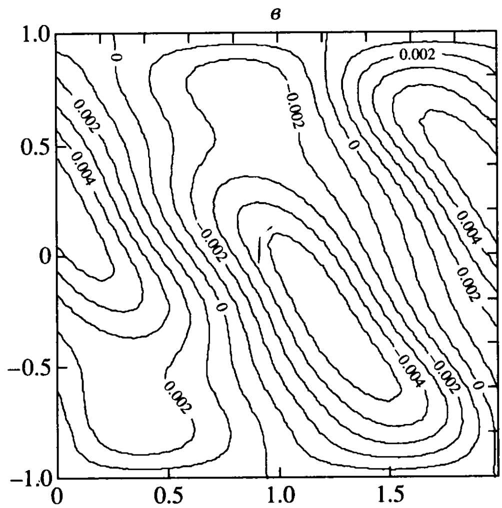
Фиг. 4. То же, что на фиг. 3 для второй фазы нестационарных конечно–амплитудных возмущений при Та = 50, Gr = 7000

слоя (фиг. 4, *в*). В верхней половине слоя жидкость холоднее, чем в нижней половине (фиг. 4, *а*).

При больших значениях числа Тейлора температурное расслоение жидкости изменяется: жидкость в верхней половине слоя теплее, чем в нижней (фиг. 5, *а*). Функция тока возмущений описывает систему стационарных вихрей, расположенных вдоль оси абсцисс и охватывающих весь поток (фиг. 5, *б*). Однако косинус угла наклона вихрей к оси X отрицательный в отличие от случая малых значений Та (фиг. 3, *б*). Амплитуда вихрей, вращающихся в плоскости XZ по часовой стрелке, меньше, чем амплитуда вихрей, вращающихся против часовой стрелки. Компонента скорости возмущений v меняет свое значение с положительного на отрицательное не поперек слоя, как раньше, а вдоль оси X (фиг. 5, *в*). Таким образом, описывается вращение чередующихся стационарных вихрей в плоскости XY, то по, то против часовой стрелки.

Заключение. На основе расчетов, проведенные в интервале чисел Тейлора Та: $0 \le \mathrm{Ta} \le 10^5$, оценено влияние вращения на устойчивость адвективного течения в плоском горизонтальном слое жидкости при малом числе Прандтля Pr = 0.1 для нормальных возмущений в виде валов с осями, перпендикулярными направлению градиента температуры на границах слоя (гидродинамическая мода).





Фиг. 5. То же, что на фиг. 3 при Та = 104, Gr = 8000

В рамках линейной теории вращение не меняет монотонный характер неустойчивости течения. Численный анализ показывает, что при $0 \le \mathrm{Ta} < 279$ и $550 \le \mathrm{Ta} \le 10^5$ с ростом числа Тейлора возрастает критическое число Грасгофа Gr_c, увеличивается устойчивость адвективного течения. При $279 < \mathrm{Ta} \le 550$ Gr_c убывает с ростом числа Тейлора. Таким образом, вращение стабилизирует адвективное течение, за исключением небольшого интервала значений Та. Волновое число k_x, соответствующее критическому числу Грасгофа, с ростом Та уменьшается в интервале $0 \le \mathrm{Ta} \le 65$, а при $65 < \mathrm{Ta} < 279$ возрастает. При $\mathrm{Ta} \ge 295$ развивается неустойчивость, для которой волновое число k_x растет пропорционально $\mathrm{Ta}^{0.25}$.

Поведение конечно-амплитудных возмущений, возникающих в слое жидкости при значениях числа Грасгофа выше критического, исследовано методом сеток на основе нелинейной задачи. Возмущения температуры представляют собой систему чередующихся теплых и холодных пятен, расположенных вдоль направления градиента температуры на границах слоя. С ростом числа Тейлора их вертикальные размеры уменьшаются. При $0 \le \mathrm{Ta} \le 295$ жидкость в верхней половине слоя холоднее, чем в нижней, а при

Та ≥ 295, наоборот, она теплее в верхней половине слоя. При 0 ≤ Та < 50 и 295 ≤ Та ≤ 10^5 вблизи от минимумов нейтральных кривых возмущения движения представляют собой систему стационарных пространственных вихрей, положение, количество и размер которых меняются в зависимости от числа Тейлора. В интервале 50 ≤ Та < 295 эти вихри нестационарные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аристов С.Н., Фрик П.Г.* Динамика крупномасштабных течений в тонких слоях жидкости: Препринт ИМСС УрО АН СССР. Свердловск, 1987. 47 с.
2. *Педлоски Дж.* Геофизическая гидродинамика: В 2 т. М.: Мир, 1981. 396 с.
3. *Аристов С.Н., Шварц К.Г.* Об устойчивости адвективного течения во вращающемся горизонтальном слое жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1999, № 5. С. 3–11.
4. *Шварц К.Г.* Конечно-амплитудные пространственные возмущения адвективного течения во вращающемся горизонтальном слое жидкости // Вычислительные технологии, 2001. Т. 6. Спец. выпуск. Ч. 2. Тр. Междунар. конф. RDAMM-2001. С. 702–707.
5. *Тарунин Е.Л., Шварц К.Г.* Исследование линейной устойчивости адвективного течения методом сеток // Вычисл. технологии. 2001. Т. 6. № 6. С. 108–117.
6. *Schwarz K.G.* Instability of Advective Flow in Rotating Horizontal Layer of Liquid // Selected Papers of the International conference “Fluxes and Structures in Fluids”. St. Petersburg, Russia, June 23–26, 2003. Moscow. IPM RAS. 2004. P. 164–171.
7. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Мызников В.М.* Об устойчивости плоскопараллельного конвективного течения в горизонтальном слое // ПМТФ. 1974. № 1. С. 95–100.
8. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Мызников В.М.* Устойчивость плоскопараллельного конвективного течения жидкости в горизонтальном слое относительно пространственных возмущений // ПМТФ. 1974. № 5. С. 145–147.
9. *Gershuni G.Z., Laure P., Myznikov V.M., Roux B., Zhukhovitsky E.M.* On the stability of plane-parallel advective flows in long horizontal layers // Microgravity Q. 1992. V. 2. № 3. P. 141–151.
10. *Мызников В.М.* Конечно-амплитудные конвективные движения жидкости в горизонтальном слое с продольным градиентом температуры // Математические модели течений жидкости: Тр. VI Всесоюз. семинара по числ. методам механики вязкой жидкости. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1978. С. 176–186.
11. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
12. *Тарунин Е.Л.* Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 225 с.
13. *Демидович В.П., Марон И.А., Шувалова Э.З.* Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. М.: Наука, 1967. 368 с.

Пермь

Поступила в редакцию
I.VI.2004