МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 2005

УДК 533.6.011.72:534.2

 Ю. А. СОЗОНЕНКО

О ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССАХ В ЗАЩИТНОМ ЭКРАНЕ

Решена одномерная задача о взаимодействии импульсной волны давления с плоским экраном, разделяющим две среды с различными акустическими импедансами. Полученное точное решение использовано для установления критериев применимости различных приближенных решений рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: защитный экран, импульсная волна, преобразование Лапласа.

Задача о действии импульсной волны давления на защитный экран, укрепленный на жесткой стенке, при пренебрежении волновыми процессами в экране (гипотеза Винклера) решена в [1, 2]. В настоящей работе постановка задачи является более общей, а решение находится с учетом всех волн, возникающих в процессе взаимодействия падающей волны с экраном.

1. Постановка задачи и решение в изображениях. Рассматривается плоский экран $0 < x < h$ (скорость звука c_0, плотность ρ_0). В среде справа от экрана ($x > h$) скорость звука c, плотность ρ; слева от экрана ($x < 0$) скорость звука c_1, плотность ρ_1. В момент времени $t = 0$ к экрану приходит заданная падающая волна $p_i(t + (x - h)/c)$. При $t > 0$ начинается процесс многократного взаимодействия волн в экране и изучения их вне экрана. Излученные волны легко определяются по скоростям границ экрана ($x = 0$ и $x = h$), поэтому достаточно рассмотреть волновые процессы внутри экрана ($0 < x < h$). Эти процессы описываются одномерными акустическими уравнениями с соответствующими начальными и граничными условиями

$$\rho_0\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered} p(x,0) = v(x,0) = 0 \quad (0<x<h) \\ p(h,t) = 2p_i(t) + \rho c v(h,t); \quad p(0,t) = -\rho_1 c_1 v(0,t) \end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь p – избыточное давление, v – скорость, x – координата Лагранжа, t – время.

К уравнениям (1.1) применим преобразования Лапласа по времени и пространственной координате

$$f^t(x,s) = \int_0^\infty e^{-st}f(x,t)dt, \quad f^{xt}(q,s) = \int_0^h e^{-qx}f^t(x,s)dx \tag{1.3}$$

Изображения производных искомых функций находятся интегрированием по частям. В результате дифференциальные уравнения (1.1) заменяются на уравнения для изображений

$$\begin{gathered} s v^{xt}(q,s) + q\frac{p^{xt}(q,s)}{\rho_0} = v^x(q,0) - \frac{p^t(h,s)}{\rho_0}e^{-qh} + \frac{p^t(0,s)}{\rho_0} \\ q v^{xt}(q,s) + \frac{s}{c_0^2}\frac{p^{xt}(q,s)}{\rho_0} = -v^t(h,s)e^{-qh} + v^t(0,s) + \frac{p^x(q,0)}{\rho_0 c_0^2} \end{gathered} \tag{1.4}$$

Уравнения (1.4) содержат изображения искомых функций $v^{xt}(q, s)$, $p^{xt}(q, s)$ и шесть изображений краевых значений этих функций. Краевые условия (1.2) дают только четыре уравнения для определения изображений граничных функций

$$p^x(q,0) = 0; \quad v^x(q,0) = 0$$
$$p^t(h,s) = 2p_i^t(s) + \rho c v^t(h,s); \quad p^t(0,s) = -\rho_1 c_1 v^t(0,s) \tag{1.5}$$

Два дополнительных условия на граничные функции определяются из аналитических свойств искомых функций $v^{xt}(q, s)$ и $p^{xt}(q, s)$. Ввиду того что определяющий интеграл (1.3) в преобразовании по x берется по конечному интервалу, изображения искомых функций являются целыми функциями переменной q. Определитель системы (1.4) обращается в нуль при $q = \pm s/c_0$. Из условия отсутствия полюсов у целых функций $v^{st}(q, s)$ и $p^{xt}(q, s)$ из системы уравнений (1.4) получаются два дополнительных уравнения на изображения граничных функций

$$\left[\frac{p^t(h,s)}{\rho_0} - c_0 v^t(h,s)\right]e^{-sh/c_0} - \frac{p^t(0,s)}{\rho_0} + c_0 v^t(0,s) + \frac{p^x(s/c_0,0)}{\rho_0 c_0} - v^x(s/c_0,0) = 0$$
$$\frac{p^t(h,s)}{\rho_0} + c_0 v^t(h,s) - \left[\frac{p^t(0,s)}{\rho_0} + c_0 v^t(0,s)\right]e^{-sh/c_0} - \left[\frac{p^x(-s/c_0,0)}{\rho_0 c_0} + v^x(-s/c_0,0)\right]e^{-sh/c_0} = 0 \tag{1.6}$$

В результате решения уравнений (1.4) с учетом условий (1.5), (1.6) находится изображение давления

$$p^{xt}(q,s) = \frac{2p_i^t(s)}{(1+\mu)(1+\mu_1)e^{sh/c_0} - (1-\mu)(1-\mu_1)e^{-sh/c_0}} \times$$
$$\times\left[(1+\mu_1)\frac{1-e^{-(q-s/c_0)h}}{q-s/c_0} - (1-\mu_1)\frac{1-e^{-(q+s/c_0)h}}{q+s/c_0}\right] \tag{1.7}$$
$$\mu = \frac{\rho c}{\rho_0 c_0}, \quad \mu_1 = \frac{\rho_1 c_1}{\rho_0 c_0}, \quad (\mu \neq 1, \mu_1 \neq 1)$$

Изображение скорости $v^{xt}(q, s)$ находится аналогично.

2. Обращение изображений. Оригинал изображения (1.7) по переменной x на отрезке $[0, h]$ находится по таблицам оригиналов и их изображений [3]

$$p^t(x,s) = 2p_i^t(s)\frac{(1+\mu_1)e^{-s(h-x)/c_0} - (1-\mu_1)e^{-s(h+x)/c_0}}{(1+\mu)(1+\mu_1) - (1-\mu)(1-\mu_1)e^{-2sh/c_0}} \tag{2.1}$$

При обращении изображения по времени падающая волна выбирается в экспоненциальной форме

$$p_i(t) = p_m e^{-t/\theta}\eta(t) \tag{2.2}$$

Здесь $\eta(t)$ – единичная функция Хевисайда, p_m, и θ – постоянные величины.

Наибольший интерес для исследования представляет волна, прошедшая через экран (давление на задней стенке экрана $x = 0$). Это давление с помощью интеграла обращения определяется из формул (2.1), (2.2)

$$p(0,t) = \frac{2\mu_1 p_m}{\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{s(t-h/c_0)}ds}{(s+1/\theta)[(1+\mu)(1+\mu_1) - (1-\mu)(1-\mu_1)e^{-2sh/c_0}]} \tag{2.3}$$

Здесь $c > 0$, i – мнимая единица.

Интеграл (2.3) берется от мероморфной функции, которая имеет полюсы первого порядка в точках

$$s_* = -\frac{1}{\theta} \tag{2.4}$$

$$s_n = \frac{c_0}{2h}\left[\ln\frac{(1-\mu)(1-\mu_1)}{(1+\mu)(1+\mu_1)} \pm 2\pi n i\right]; \quad (1-\mu)(1-\mu_1)>0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.5}$$

$$s_n = \frac{c_0}{2h}\left[\ln\frac{(1-\mu)(\mu_1-1)}{(1+\mu)(1+\mu_1)} \pm (2n+1)i\right]; \quad (1-\mu)(\mu_1-1)>0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.6}$$

Интеграл (2.3) вычисляется с помощью леммы Жордана [3]. По формулам (2.4)–(2.6) для всех особых точек $\mathrm{Re}\, s < 0$, поэтому $p(0, t) = 0$ при $t < h/c_0$. При вычислении давления для $t \ge h/c_0$ делается сдвиг по времени $\bar{t} = t - h/c_0$, $\bar{p}(0, \bar{t}) = p(0, \bar{t} + h/c_0)$. В дальнейшем изложении черта опускается.

В случае $\mu < 1$, $\mu_1 < 1$ или $\mu > 1$, $\mu_1 > 1$ (2.5) по теореме о вычетах

$$p(0, t) = \frac{4\mu_1 p_m}{(1+\mu)(1+\mu_1)}\left[\frac{e^{-t/\theta}}{1-e^{-\alpha+2h/c_0}} - \frac{e^{-\alpha c_0 t/2h}}{\alpha - 2h/c_0\theta} - 2\left(\alpha - \frac{2h}{c_0\theta}\right)e^{-\alpha c_0/2h} \times\right.$$

$$\left.\times \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi n c_0 t/h)}{(\alpha-2h/c_0\theta)^2+4\pi^2 n^2} + 4\pi e^{-\alpha c_0/2h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin(\pi n c_0 t/h)}{(\alpha-2h/c_0\theta)^2+4\pi^2 n^2}\right], \quad \alpha = \ln\frac{(1+\mu)(1+\mu_1)}{(1-\mu)(1-\mu_1)} \tag{2.7}$$

Члены рядов в формуле (2.7) имеют период $T = 2h/c_0$. При $0 < t < 2h/c_0$ эти ряды свертываются по известным формулам [4]. Путем выделения целой части $k = E(c_0 t/2h)$ эти формулы обобщаются для любых значений времени. В результате получается

$$p(0, t) = 4\mu_1 p_m \frac{e^{-t/\theta} - e^{(-\alpha+2h/c_0\theta)(k+1)-t/\theta}}{(1+\mu)(1+\mu_1)-(1-\mu)(1-\mu_1)e^{2h/c_0\theta}} \tag{2.8}$$

В случае $\mu < 1$, $\mu_1 > 1$ или $\mu > 1$, $\mu_1 < 1$ (2.6) аналогичным образом получается

$$p(0, t) = \frac{4\mu_1 p_m}{(1+\mu)(1+\mu_1)}\left[\frac{e^{-t/\theta}}{1+e^{-\beta+2h/c_0\theta}} - 2\left(\beta - \frac{2h}{c_0\theta}\right)e^{-\beta c_0 t/2h}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(\pi(2n+1)c_0 t/2h)}{(\beta-2h/c_0\theta)^2+\pi^2(2n+1)^2} +\right.$$

$$\left. + 2\pi e^{-\beta c_0 t/2h}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)\sin(\pi(2n+1)c_0 t/2h)}{(\beta-2h/c_0\theta)^2+\pi^2(2n+1)^2}\right] \tag{2.9}$$

$$\beta = \ln\frac{(1+\mu)(1+\mu_1)}{(1-\mu)(\mu_1-1)}$$

Абсолютная величина членов рядов в формуле (2.9) имеет тот же период, что и в формуле (2.7), но на каждом периоде происходит смена знака. В результате свертывания этих рядов получается

$$p(0, t) = 4\mu_1 p_m \frac{e^{-t/\theta} + (-1)^k e^{(-\beta+2h/c_0\theta)(k+1)-t/\theta}}{(1+\mu)(1+\mu_1)-(1-\mu)(1-\mu_1)e^{2h/c_0\theta}} \tag{2.10}$$

Обращение формулы (2.1) для $x \neq 0$ проводится аналогично рассмотренному случаю $x = 0$.

3. Анализ решений. Решения (2.8), (2.10) являются кусочно-непрерывными функциями, имеющими разрывы в моменты прихода волновых фронтов на левую поверхность экрана. Для решения (2.8) величина скачка в точке разрывы определяется по формуле

$$\Delta p = p(0, t+0) - p(0, t-0) = \frac{4\mu_1 p_m}{(1+\mu)(1+\mu_1)} e^{-\alpha c_0 t/2h}, \quad t = \frac{2h}{c_0}k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.1}$$

Формула (3.1) показывает, что величина скачка со временем экспоненциально убывает, поэтому решение (2.8) можно приближенно заменять непрерывной функцией

$$p = 4\mu_1 p_m \frac{e^{-t/\theta} - e^{-t/t_*}}{(1+\mu)(1+\mu_1) - (1-\mu)(1-\mu_1)e^{2h/c_0\theta}}, \quad t_* = \frac{2h}{c_0\alpha} \tag{3.2}$$

Формула (3.2) в точках разрыва совпадает с точным значением $p(0, t-0)$, где $t > 0$.

В решении (2.10) значения $p(0, t)$ справа и слева от точки разрыва лежат на кривых

$$p(0, t) = 4\mu_1 p_m \frac{e^{-t/\theta} \pm e^{-t/t_{**}}}{(1+\mu)(1+\mu_1) - (1-\mu)(1-\mu_1)e^{-2h/c_0\theta}}, \quad t_{**} = \frac{2h}{c_0\beta} \tag{3.3}$$

Формулу (3.3) можно использовать для оценки амплитуды колебаний давления.

Вычисление импульса, прошедшего через экран для решений (2.8), (2.10) приводит к одинаковому результату

$$A = \int_0^\infty p(0, t)dt = \frac{2p_m\theta}{1 + \rho c/\rho_1 c_1} \tag{3.4}$$

Из формулы (3.4) следует, что в одномерной постановке наличие экрана не влияет на величину прошедшего импульса.

Максимальное давление в прошедшей волне оценивается при помощи формулы (3.2). Максимум достигается при $t = \theta/(\theta/t_* - 1)\ln(\theta/t_*)$.

В формуле (3.3) при знаке минус получается аналогичный результат, а при знаке плюс функция монотонно убывает.

При $\theta \to \infty$ решения (2.8), (2.10) можно использовать для падающих волн в виде ступеньки $p_i(t) = p_m\eta(t)$.

Формула (3.2) в этом случае имеет вид

$$p = \frac{2p_m}{1 + \rho c/\rho_1 c_1}[1 - e^{-t/t_*}] \tag{3.5}$$

Функция (3.5) не имеет максимума, а при $t \to \infty$ стремится к значению давления при прохождении волны без экрана. Таким образом, снижение давления в прошедшей волне с помощью защитного экрана в данном случае возможно только для падающих волн конечной длительности, например $p_i(t) = p_m[\eta(t) - \eta(t-\tau)]$. Длительность τ таких волн должна быть соизмерима с параметром t_*. Давление в этом случае находится вычитанием из решения (3.5) решения сдвинутого по времени на τ. При этом в течении при $x > h$ возникают отрицательные давления, что может привести к разрывам слоев жидкости. Пример расчета с такими разрывами дан в [2].

Формула (3.3) для падающей волны в виде ступеньки имеет вид

$$p = \frac{2p_m}{1+\rho c/\rho_1 c_1}[1 \pm e^{-t/t_{**}}] \tag{3.6}$$

Предельные значения давления при $t \to \infty$, полученные по формулам (3.5) и (3.6) совпадают, но поведение рассматриваемых решений при конечных значениях времени качественно различны. Функция (3.5) монотонно возрастает от $p = 0$ до указанного предельного значения. Функция (3.6) при знаке плюс монотонно убывает от удвоенного предельного давления до давления, равного предельному. Знак минус в формуле (3.6) дает кривую, аналогичную кривой (3.5). Таким образом в данном случае давление колеблется около предельного, экспоненциально затухая.

Полученные точные решения позволяют установить критерии применимости различных гипотез, используемых при расчете защитных экранов.

В случае применения гипотезы Винклера в условиях (1.2) полагается $p(h, t) = p(0, t) = p(t)$. Процесс в экране считается квазистатическим. В силу линейности свойств материала слоя

$$p(t) = \frac{\rho_0 c_0^2}{h}\int_0^t[v(0,t) - v(h,t)]dt \tag{3.7}$$

Из формул (1.2), (3.7) получается

$$p(t) = -\frac{\rho_0 c_0^2}{h}\int_0^t\left[\frac{p(t) - 2p_i(t)}{\rho c} + \frac{p(t)}{\rho_1 c_1}\right]dt \tag{3.8}$$

После применения преобразования Лапласа к формуле (3.8) для падающей волны (2.2)

$$p^t(s) = 2p_m\frac{\rho_0 c_0^2}{h\rho c}\frac{1}{(s+1/\theta)(s+1/t_0)}, \quad t_0 = \frac{h\rho c}{\rho_0 c_0^2(1+\rho c/\rho_1 c_1)} \tag{3.9}$$

Оригинал изображения (3.9) имеет вид

$$p(t) = \frac{2p_m}{(1+\rho c/\rho_1 c_1)(1 - t_0/\theta)}(e^{-t/\theta} - e^{-t/t_0}) \tag{3.10}$$

Решение (3.10) удовлетворяет точной формуле (3.4).

Пусть $\rho_0 c_0 \ll \rho c$, $\rho_0 c_0 \ll \rho_1 c_1$, $2h \ll c_0\theta$. В этом случае $\alpha \sim 2(\rho_0 c_0/\rho c + \rho_0 c_0/\rho_1 c_1)$, $t_* \sim t_0$. В формуле (2.7) основными являются первые два члена. После замены $\exp(2h/c_0\theta) \sim 1 +$ $+ 2h/c_0\theta$ точная формула (2.7) совпадает с решением по гипотезе Винклера (3.10) и формулой (3.2).

При отсутствии деформаций в экране (жесткое тело) полагается $v(h, t) = v(0, t) = v(t)$. К условиям (1.2) добавляется уравнение движения экрана как жесткого тела

$$\rho_0 h\frac{dv}{dt} = p(0,t) - p(h,t)$$

Уравнение для давления в прошедшей волне имеет вид

$$\frac{\rho_0 h}{\rho_1 c_1}\frac{dp(0,t)}{dt} + \left(1 + \frac{\rho c}{\rho_1 c_1}\right)p(0,t) = 2p_i(t)$$

Его решение с учетом формулы (2.2) получается из формулы (3.10), если заменить параметр t_0 на $t_1 = \rho_0 h/(\rho c + \rho_1 c_1)$. Рассмотренное приближенное решение соответствует точному решению (2.7) при $\rho_0 c_0 \gg \rho c$, $\rho_0 c_0 \gg \rho_1 c_1$, $2h \ll c_0\theta$.

Заключение. В случае, если акустический импеданс материала защитного экрана значительно меньше акустических импедансов слева и справа от экрана, при расчете действия падающих волн существенно большей длительности, чем время прохода волны по экрану, можно пользоваться гипотезой Винклера. Гипотезу о движении экрана как жесткого тела можно использовать для длинных падающих волн в случае, когда акустический импеданс экрана существенно больше акустических импедансов слева и справа. В остальных случаях следует учитывать волновые процессы в экране.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 01-01-00155).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пекуровский Л.Е., Созоненко Ю.А.* Нормальное падение плоской акустической волны на твердую стенку, покрытую тонким сжимаемым слоем // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 4. С. 139–148.
2. *Пекуровский Л.Е., Поручиков В.Б., Созоненко Ю.А.* Взаимодействие волн с телами (неклассические граничные условия). М.: Изд-во МГУ, 1990. 103 с.
3. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
4. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.XII.2003