

УДК 533.6.011.35

© 2005 г. Ю. В. БИБИК, В. Н. ДИЕСПЕРОВ, С. П. ПОПОВ

О СТРУКТУРЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТРАНСЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ В ПЛОСКИХ КАНАЛАХ

На основе уравнения Линя–Рейснера–Цзяня рассматривается эволюция и взаимодействие сверхзвуковых зон и замыкающих их ударных волн для течения в плоских каналах с локальным сужением.

Ключевые слова: Нестационарные трансзвуковые течения, сверхзвуковые зоны, ударные волны, плоский канал, уравнение Линя–Рейснера–Цзяня.

Рассматриваются трансзвуковые течения в плоских каналах, имеющих локальное сужение. Исследования основываются на численных решениях уравнения Линя–Рейснера–Цзяня. Основное внимание уделяется процессам образования сверхзвуковых зон и замыкающих ударных волн, а также взаимодействию их между собой и со стенками при распространении внутри канала.

1. Постановка задачи. Уравнение Линя–Рейснера–Цзяня было выведено на основе трансзвуковой теории малых возмущений [1], в которой в качестве малых параметров брались отклонение местного числа Маха M от единицы и относительная толщина профиля. Это уравнение описывает нестационарное трансзвуковое течение, возникающее в случае низкочастотных возмущений набегающего равномерного потока.

В данной работе, так же как и в [2], все параметры течения возмущены относительно их значений в набегающем из бесконечности равномерном дозвуковом потоке со скоростью U_∞ . В качестве характерного размера течения l взята $1/25$ ширины канала L . Обозначим через T – время; X, Y – декартовы координаты. Если в трансзвуковом потоке возникают ударные волны, то они слабые, а возникающая при этом завихренность в первом приближении несущественна [2], поэтому для описания течения можно ввести потенциал скорости Φ и в рамках трансзвуковой теории малых возмущений представить его в виде

$$\begin{aligned} \Phi &= lU_\infty \left(\delta^{1/3} x + \frac{\delta}{\gamma + 1} \varphi(t, x, y) + \dots \right) \\ X &= l\delta^{1/3} x, \quad Y = ly, \quad T = \frac{2l}{U_\infty \delta^{1/3}} t \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь δ – малый параметр, характеризующий величину возмущений, обусловленных отклонением формы стенок от прямолинейной, φ – безразмерный потенциал скорости возмущений, а x, y, t – растянутые безразмерные декартовы координаты и время. Формулы (1.1) аналогичны используемым при решении задачи о трансзвуковом течении в сопле и о трансзвуковом струйном течении [2]. Трансзвуковое разложение в этом случае строится по координате x с тем, чтобы учесть большие градиенты параметров течения в этом направлении. Безразмерные компоненты скорости возмущений по осям x и y заданы как

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

На основании этих формул из уравнений для потенциала скорости Φ , Бернулли и состояния аналогично [2] получим уравнение Линя-Рейснера-Цзяня в форме

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x} + \left(K + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь $K = (M_\infty^2 - 1)/\delta^{2/3}$ – трансзвуковой параметр подобия, а M_∞ – число Маха набегающего потока. Отметим, что K отличается знаком от приведенного в [2]. Выбор такой формы уравнения (1.2) продиктован используемым методом численного расчета.

Для описания процесса образования сверхзвуковых зон и замыкающих их ударных волн, а также взаимодействия их между собой в плоском канале с параллельными стенками решается смешанная задача для уравнения (1.2), записанного относительно компоненты скорости возмущений $u(t, x, y)$

$$u_t + (K + u)u_x = \int_{-\infty}^x u_{yy} d\xi$$

$$x = -\infty, \quad u = 0; \quad x = +\infty, \quad u_x = 0$$

$$y = 0, \quad u_y = f(x); \quad y = L, \quad u_y = -f(x)$$

$$t = 0, \quad u = 0 \quad (1.3)$$

Здесь ось x совпадает с нижней стенкой канала, $f(x)$ – функция, интегрируемая на всей оси.

Таким образом, при $t \leq 0$ поток однородный, дозвуковой и направлен вдоль x . Нестационарность течения возникает из-за того, что поток при $t > 0$ начинает взаимодействовать со стенками канала, геометрия которых определяется функцией $f(x)$.

Для вычисления поперечной компоненты скорости v необходимо из уравнения $u = \Phi_x$ найти потенциал Φ , а затем воспользоваться связью $v = \Phi_y$. Из последнего равенства следует, что $\int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi$ задает значение v в каждой точке границы $y = 0$. Это в дальней-

шем изложении будет интерпретироваться (при соответствующем выборе функции $f(x) > 0$) как локальное сужение зазора между пластинками, образующими канал.

Уравнение (1.2) имеет широкое применение [3]. Интерес к этому уравнению для описания нестационарных трансзвуковых течений в настоящее время вызван, в частности, следующими задачами. Одна из них – задача о свободном взаимодействии пограничного слоя с внешним нестационарным трансзвуковым потоком газа в случае низкочастотных возмущений. В [4] установлено, что течение во внешней потенциальной области описывается уравнением (1.2). Если нестационарный процесс устанавливается, то оно переходит в уравнение Кармана. Для стационарного свободного взаимодействия в случае малой неровности на пластине во внешней потенциальной области возникают сверхзвуковые зоны, замыкающиеся слабыми ударными волнами [5, 6]. Отметим, что в настоящий момент из-за сложности задачи в целом выявление тонкой структуры нестационарного течения в возникающих сверхзвуковых зонах (которые замыкаются ударными волнами) – трудно реализуемая проблема с практической точки зрения.

Другая – задача об образовании, развитии и взаимодействии ударных волн. Она относится к классическим задачам аэродинамики. В рамках этой задачи, в частности,

возникает вопрос о возникновении и конфигурации ударных волн, замыкающих сверхзвуковые зоны. В [7–9] выяснено, что для стационарного случая в классе автомодельных решений уравнения Кармана (или Трикоми) звуковая линия и ударная волна могут исходить из одной точки, если только в нее приходит вдоль характеристики либо конечный разрыв первых производных, либо бесконечный разрыв вторых производных.

Численным расчетом в [10, 11] подтверждено предположение Гудерлея [12], что ударная волна в случае стационарного течения возникает внутри сверхзвуковой зоны. В [13] показано, что если это предположение реализуется, то из точки образования ударной волны внутри сверхзвуковой зоны вдоль характеристики распространяется бесконечный разрыв вторых производных, приходящий на звуковую линию. Он приводит к образованию второй ударной волны, примыкающей к звуковой линии. В результате получается перевернутая лямбда-конфигурация ударных волн, замыкающая сверхзвуковую зону. Таким образом даже качественная картина образования ударных волн и их развитие во времени до момента установления представляет несомненный интерес.

В [14] была рассмотрена задача о щелевом вдуве и детально исследована эволюция структуры течения в сверхзвуковой зоне на основе уравнения (1.2). Эта задача, в частности, моделирует вытесняющее влияние пограничного слоя. Далее возникает естественный и интересный вопрос, как взаимодействуют между собой сверхзвуковые зоны и замыкающие их ударные волны. Задача о начальном развитии трансзвукового течения в плоском канале, рассматриваемая здесь, реализует такую возможность, причем оказывается, что до соединения сверхзвуковых зон решение примерно следует соответствующему решению для полуплоскости [14].

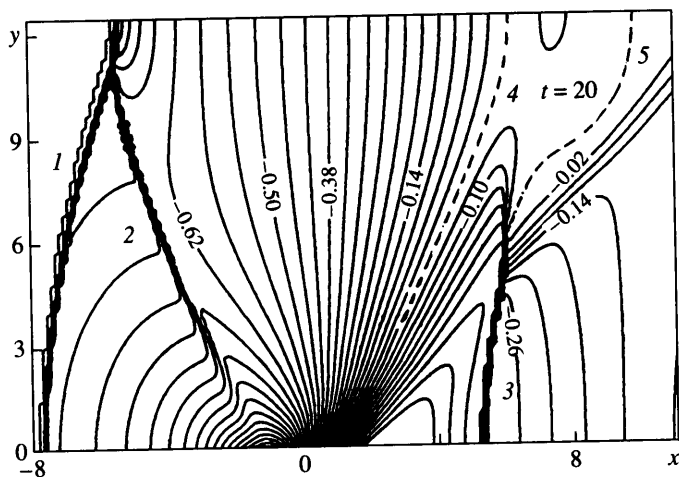
Примеры численного моделирования трансзвуковых течений на основе уравнения (1.2) приведены в [15, 16].

В последнее время также интенсивно развивается исследование в приближении уравнения (1.2) особенностей процессов взаимодействия слабых ударных волн и отражения их от стенок [17]. В [18] на основе численных методов в рамках уравнений Эйлера решена проблема нерегулярного отражения слабых скачков, известная как парадокс Неймана. Показано, что в этом случае реализуется не трехударная, как обычно, а четырехволновая структура с тремя скачками и пучком волн разрежения. Позже в [17] для некоторого класса параметров течения этот же результат получен на основе уравнения (1.2) с применением численных и аналитических методов.

2. Результаты расчетов уравнения Линия–Рейснера–Цзяня. В данной работе численные расчеты проводились по схеме, описанной в [14, 15] и основанной на методе координатного расщепления. На первом этапе при фиксированных u для всех x решалось уравнение (1.3) без учета интеграла от $u_{,yy}$ и использовалась схема с коррекцией потоков. Это позволило осуществить сквозной расчет ударных волн с “размазыванием” их на две–три точки сетки. На втором этапе учитывалось интегральное слагаемое, не рассматривавшееся на первом этапе. Оптимальные пространственные сетки определялись в процессе предварительного численного анализа каждого отдельного варианта исследуемой задачи. В представленных численных расчетах задавались $\Delta x = 0.04$, $\Delta y = 0.03125$, $\Delta t = 0.025$. Однако в окрестности левой и правой границ области по координате x использовалась неравномерная сетка с увеличивающимся шагом. Число точек по x равнялось 1300, а по y – 400. В результате этого расчетная область с течением времени расширялась в направлении x .

В плоскости (x, y) канал занимает область $0 \leq y \leq 25$. В этой плоскости прямая $y = 12.5$ – ее линия симметрии.

На фигурах изображена половина сечения канала: $0 \leq y \leq 12.5$. Представляющие интерес для описания картины течения ударные волны и звуковые линии отмечены цифрами.



Фиг. 1. Распределение $u + K$ при $t = 20$: 1, 2, 3 – ударные волны; 4, 5 – звуковые линии

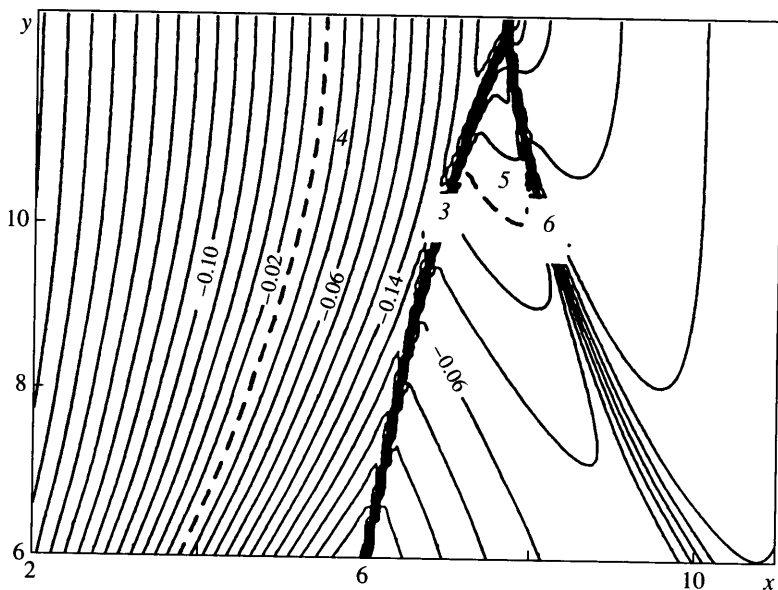
Предполагалось, что $f(x) = -0.75x \exp(-x^2/2)$, $K = -0.1$. Динамика развития течения описывается с помощью изолиний функции $u + K$ и представлена на фиг. 1. В рассматриваемом приближении $u + K = (M^2 - 1)/\delta^{2/3}$. Штриховыми линиями обозначены звуковые линии $M = 1$.

На фиг. 1 ($t = 20$) приведена первоначальная стадия взаимодействия потока с сужающейся частью канала. В результате образуется ударная волна 1, перекрывающая все сечение канала и распространяющаяся с постоянной скоростью вверх по потоку. Взаимодействие ее с линией симметрии приводит к появлению отраженной волны 2.

Со временем точка их пересечения продвигается к стенке, интенсивность волны 2 при этом уменьшается, а вся двойная конфигурация превращается ($t > 35$) в одну прямолинейную ударную волну. В дальнейшем ее присутствие подразумевается, но в иллюстрациях она изображаться не будет. Чтобы эта ударная волна не вышла с течением времени из расчетной области, в окрестности ее местоположения использовалась неравномерная сетка по x .

Наиболее интересной представляется область, расположенная вниз по потоку от места сужения канала. На фиг. 1 представлена картина течения сразу после слияния локализованных на обеих стенках канала сверхзвуковых зон. В результате образуется одна сверхзвуковая зона, перекрывающая весь канал. Она расположена между звуковыми линиями 4 и 5. Сформировалась замыкающая ударная волна 3. К ней примыкает звуковая линия 5. На этот момент времени ее структура соответствует решению, полученному для бесконечной пластинки с локальным возмущением [14]. В дальнейшем начинают проявляться эффекты интенсивного взаимодействия с линией симметрии. С увеличением времени ударная волна 3 достигает этой линии и разбивает вышеупомянутую на фиг. 1 сверхзвуковую область на две. Во второй области в окрестности пересечения звуковой линии 5 с линией симметрии формируется новая ударная волна 6 ($y > 11$).

Она постепенно смещается вверх по потоку. Одновременно вниз по течению навстречу продвигается верхняя часть ударной волны 3. При $t = 30$ (фиг. 2) они встречаются. Звуковая линия 5 в окрестности точек множества $u = 10$, $7 < x < 9$ переходит с одной волны на другую. Образующаяся конфигурация со временем упрощается и возникает одна ударная волна 3, перекрывающая весь канал (фиг. 3, $t = 48$). Сверхзвуковая область находится левее ее, вплоть до звуковой линии 4. Течение в месте сужения канала стабилизируется.



Фиг. 2. Конфигурация ударных волн, образующихся на линии симметрии канала при смыкании местных сверхзвуковых зон ($t = 30$): 3, 6 – ударные волны; 4, 5 – звуковые линии

Со временем возникает очень медленное продвижение ударной волны 3 вниз по течению. Скорость в окрестности линии симметрии несколько выше, чем на стенке. Это приводит к постепенному увеличению расстояния между точками пересечения ударной волны 3 с линией симметрии и стенкой канала. В результате чего ударная волна вытягивается в направлении движения газа.

В некоторый момент времени начинается процесс отражения от линии симметрии. Характерной особенностью данной фазы течения является то, что за очень небольшой промежуток времени возникает пара звуковых линий 7 и 8. Они ограничивают новую сверхзвуковую зону, дополнительную к уже существующей перед ударной волной 3, и представлены на фиг. 4 ($t = 88$).

Далее отраженная от линии симметрии ударная волна 9 усиливается и смещается в глубь канала вместе со звуковой линией 8. Одновременно с этим волна 3 затухает, а звуковая линия 7 пропадает. При временах t порядка 140 остается только одна ударная волна 9, форма которой становится подобной изображенной на фиг. 3, но симметрично отраженной относительно прямой $x = 10$. После этого процесс идет по описанному для времен $48 < t < 88$ сценарию, и структура течения при $t = 180$ изображена на фиг. 5.

Таким образом, продвижение ударной волны в область канала за сужающейся частью, где стенки параллельны, осуществляется поочередным ее отражением от стенок и от линии симметрии.

Расчетами установлено, что представленный тип течений характерен для значений K от -0.15 и до -0.05 (при неизменной форме канала). Уменьшение величины K до -0.2 приводит к изменению режима течения. Прямая ударная волна, идущая вверх по потоку, образуется, но местные сверхзвуковые зоны в сужающейся части канала не достигают линии симметрии канала. Они локализируются у стенок, принимая стационарные формы, подобные изображенным на фиг. 1.

Нарушение симметричности в расположении сужающихся участков стенок канала также ведет к возникновению новых режимов. В зависимости от способов внесения

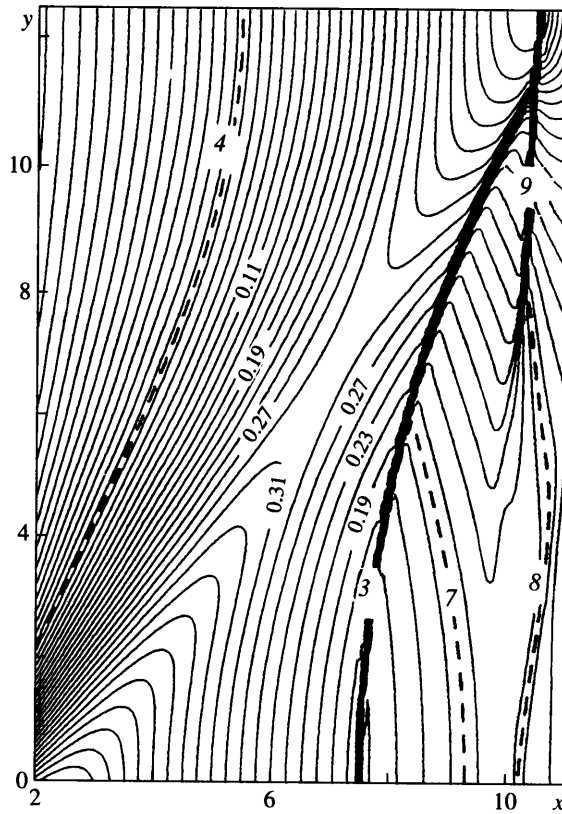


Фиг. 3. Фаза течения с одной ударной волной, перекрывающей канал ($t = 48$):
3 – ударная волна, 4 – звуковая линия

несимметричности могут, в частности, реализовываться течения с замкнутыми локализованными сверхзвуковыми зонами и с отражением ударных волн не от линии симметрии, как изображено на фиг. 2–5, а от противоположной стороны канала. Некоторые примеры подобных течений приведены в [15].

Область применения уравнения Линя–Рейснера–Цзяня можно расширить, если учесть, что при определенных допущениях уравнения Эйлера описывают поверхностные волны в мелкой воде. В этом случае возможно проведение преобразований, приводящих к уравнению (1.2), поэтому представленные расчеты допускают дополнительное толкование, связанное с возникновением и взаимодействием прыжков высоты в теории мелкой воды. Существуют также асимптотические теории длинноволновых возмущений, сводящиеся к уравнению (1.3) с дисперсионным слагаемым, пропорциональным u_{xxx} . Такое уравнение известно под названием уравнения Кадомцева–Петвиашвили второго рода. Оно является ключевым в теории солитонных возмущений. Данный круг задач требует отдельного рассмотрения.

3. Результаты расчетов уравнений Эйлера. Сопоставление моделей, которые описываются уравнениями (1.2) и Эйлера, представляет собой отдельную область исследований. В настоящее время известны единичные примеры сравнений в относительно простых случаях. Например, в [14] исследовалась только местная сверхзвуковая зона, замыкающаяся ударной волной, а в [17] рассматривались парные взаимодействия слабых ударных волн и отражение их от стенок. Течения в сужающихся каналах значительно сложнее и включают случаи, изученные в [14, 17].



Фиг. 4. Структура течения при отражении ударной волны от линии симметрии ($t = 88$): 3, 9 – ударные волны; 4, 7, 8 – звуковые линии

В данной работе для расчетов уравнений Эйлера отобран вариант, прежде всего удобный для численного моделирования. Это относится к выбору простейшей формы сужения канала в виде клина.

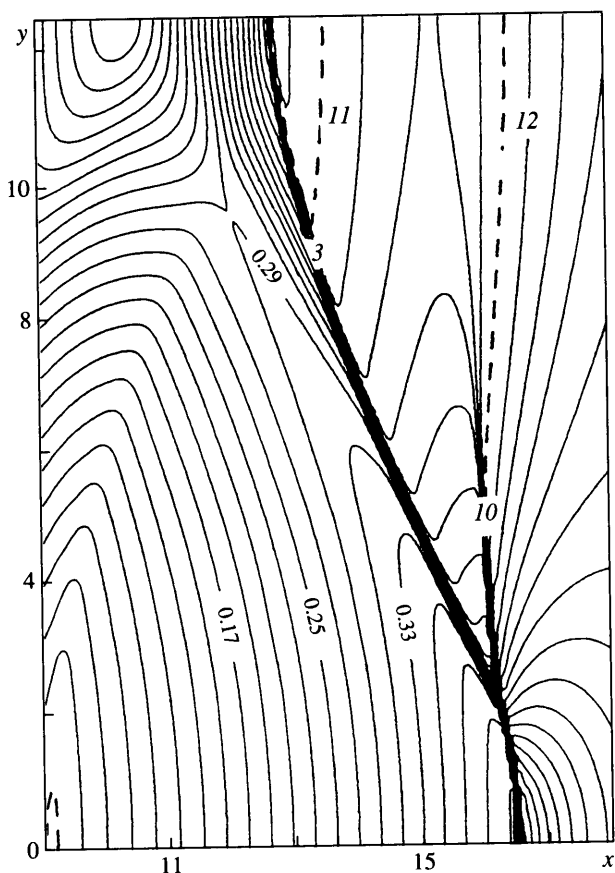
Форма сужения канала и масштабы координат представлены на фиг. 6, величина $\delta = 0.05$. В набегающем потоке $M_\infty = 0.9932$, а $K = -0.1$.

При выходе из канала выполнялись требования равенства нулю всех производных. На стенках ставились условия непротекания.

Результат расчета в виде изолиний скорости u ко времени $t = 4.33$ приведен на фиг. 6, на которой изображена половина канала. Сравнение с фиг. 1 указывает на очень хорошее качественное согласование в расположении всех ударных волн и звуковых линий (за исключением λ -конфигурации ударных волн, образующейся при обтекании клина в окрестности излома образующей). Указанное соответствие не нарушается и в дальнейшем.

4. Автомодельные решения уравнения Лия–Рейснера–Цзяня. Если в уравнении (1.2) сделать замену $\phi_x = \psi_x - K$, то оно примет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (4.1)$$



Фиг. 5. Структура течения при отражении ударной волны от стенки ($t = 180$):
3, 10 – ударные волны, 11, 12 – звуковые линии

Уравнение (1.2) в форме (4.1) выведено в [1] в предположении, что скорость в потоке мало отличается от критической скорости.

Пусть

$$\omega = x + by^2 + \beta(t)$$

где $\beta(t)$ – достаточно гладкая функция. Тогда автомодельное решение уравнения (4.1) для компоненты скорости возмущений $u = \phi_x$ будет иметь вид [19]

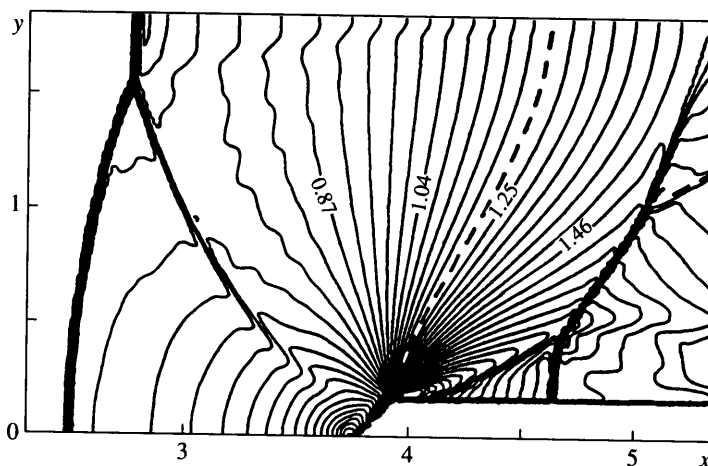
$$u = Z(\omega) + 4b^2y^2 - \beta' \tag{4.2}$$

Из условия отсутствия завихренности следует, что компонента скорости возмущений $v = \phi_y$ дается выражением

$$v = 2byZ + 8b^2yx + \frac{8}{3}b^3(y^3) + y(8b^2\beta - \beta'')$$

Подставляя (4.2) в продифференцированное по x уравнение (4.1), для определения функции Z получим обыкновенное дифференциальное уравнение [19]

$$ZZ' + (Z - 4b)(Z + 2b) = 0 \tag{4.3}$$



Фиг. 6. Трансзвуковое течение около клина в рамках уравнений Эйлера, подобное изображенному на фиг. 1

Оно имеет решение, записываемое в неявном виде

$$(Z - 4b\omega)^2(Z + 2b\omega) = \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{b}\right)^3 \quad (4.4)$$

где α – постоянная интегрирования. Уравнение (4.3) впервые найдено в [20] для описания стационарных трансзвуковых течений в соплах. Решения, описываемые интегралом (4.4), содержат произвольную функцию времени $\beta(t)$ и описывают нестационарные трансзвуковые течения в каналах. Они позволяют получить нестационарные аналоги течений, построенных в [20]. Выбор функции $\beta(t)$ зависит от граничных и начальных условий.

Как показано в [19], особый физический интерес представляет случай $\alpha \leq 0$. Это связано со следующим обстоятельством. В начальный момент запуска сопла на обеих его стенках вблизи минимального сечения возникают местные сверхзвуковые зоны, не смыкающиеся друг с другом, так что дозвуковая область остается односвязной и расположена вдоль всей линии симметрии сопла. Такое течение называется течением Тейлора [21].

С помощью решений (4.4) для $\alpha < 0$ можно описать течение Тейлора. При $\omega \rightarrow -\infty$ оно выходит на решение $Z = 4b\omega$, а при $\omega \rightarrow +\infty$ – на $Z = -2b\omega$.

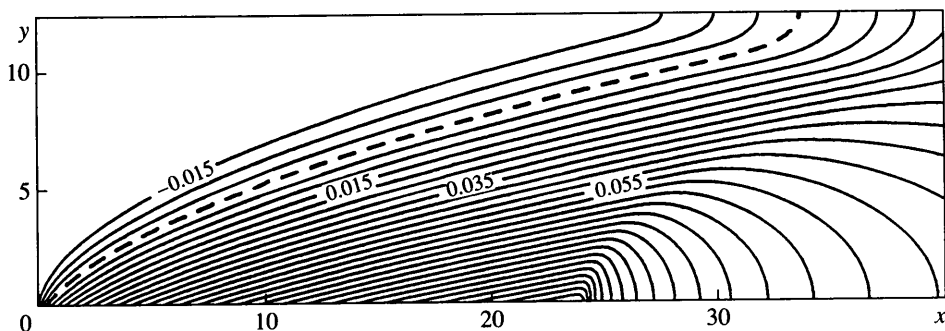
При уменьшении модуля α сверхзвуковые области сближаются друг с другом. Они характеризуются формой, напоминающей треугольную [19].

В стационарном случае предельное течение Тейлора описывается решением при $\alpha \rightarrow 0$ ($\alpha < 0$), когда

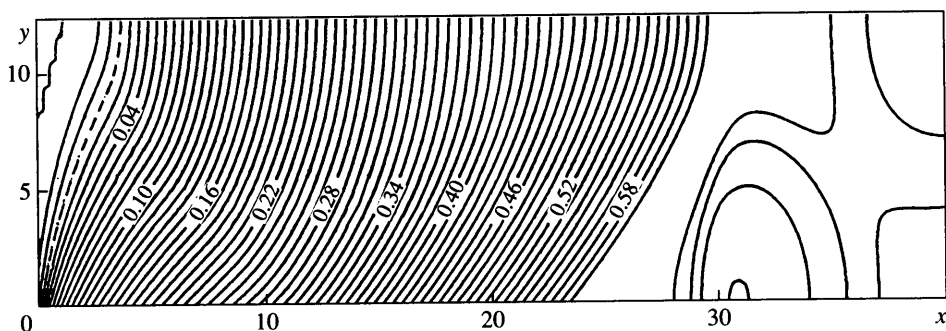
$$Z = 4b\omega, \quad \omega < 0, \quad Z = -2b\omega, \quad \omega > 0$$

Если $\beta \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то в нестационарном случае местные сверхзвуковые зоны смыкаются в одной точке на оси канала.

Решение для $\alpha = 0$ вида $Z = 4b\omega$ в стационарном случае описывает классическое течение Мейера [22], а в нестационарном – течение, подобное ему. Оно симметрично относительно оси x . Вопрос о развитии течения Тейлора в рамках модифицированного уравнения Линя–Рейснера–Цзяня рассматривался в [23].



Фиг. 7. Течение в расширяющемся параболическом сопле в момент соединения сверхзвуковых зон по модели Линя–Рейснера–Цзяня, $K = -0,02$, $t = 1,6$



Фиг. 8. Установившаяся форма течения в расширяющейся части сопла ($t = 19$)

Автомодельные решения предполагают задание определенных граничных и начальных условий, которые в полном объеме на практике осуществить сложно. Численный подход позволяет исследовать постановки, близкие к практической реализации и удовлетворяющие некоторым условиям существования автомодельных решений. В качестве примера рассмотрим задачу, аналогичную рассмотренной в разд. 2. Сужающуюся часть канала заменим расширяющейся и положим, что форма стенок соответствует закону $f(x) = -0,02$, $0 \leq x \leq 24$. Вне этого промежутка стенки прямолинейны: $f(x) = 0$. Величина $K = -0,02$.

Основная цель численного решения этой задачи – показать, что течение на участке $x \in [0, 24]$, обусловленное граничным условием на нем, находится в хорошем качественном соответствии с описанными выше автомодельными решениями.

В начальный момент времени на верхней и нижней стенках канала образуются местные сверхзвуковые зоны. С увеличением времени эти зоны растут, и в некоторый момент времени $t_0 < 1,6$ они смыкаются на линии симметрии. В результате образуются две звуковые линии, перекрывающие канал. Центральная часть одной из них (левой) движется вверх по течению к срезу канала $x = 0$. Другая, правая, движется вниз по течению. Картина течения и положение левой звуковой линии в момент времени $t = 1,6$ при $x \in [0, 40]$ представлены на фиг. 7. Здесь внутри сверхзвуковой зоны распределение изолиний находится в качественном соответствии с автомодельным решением, описывающим течение Тейлора. Звуковая линия с течением времени продолжает смещаться на срез канала $x = 0$ и ко времени $t = 19$ (фиг. 8) течение на участке $x \in [0, 24]$

стабилизируется, приобретая вид, который дает автомодельное решение, описывающее течение Мейера.

Решение Мейера частично реализуется и в исследованных в разд. 2 течениях. Оно занимает узкую область вблизи звуковой линии и линии симметрии (фиг. 2–5). На фиг. 3 течение в окрестности линии симметрии подобно течению с ударной волной, построенному на основе автомодельного решения в [24] с $\beta = \exp(-4t)/4$. На фиг. 2, 4 течение только в окрестности звуковой линии, перекрывающей весь канал, и линии симметрии аналогично указанному выше течению с $\beta = \exp(-4t)/4$.

Таким образом, автомодельные решения, полученные в [19], описывают довольно широкий класс течений по сравнению с тем, что дает численное решение уравнения Линя–Рейснера–Цзяня.

Заключение. В результате численного исследования нестационарных трансзвуковых течений в сужающемся канале на основе уравнения Линя–Рейснера–Цзяня получен ряд картин развития сверхзвуковых зон и ударных волн, их взаимодействия между собой, со стенками канала и линией симметрии.

Сравнение с решениями Эйлера при малых значениях параметра δ показало качественное совпадение картин течений. Этот факт подтверждает целесообразность использования уравнения Линя–Рейснера–Цзяня в качестве модельного трансзвукового уравнения, весьма адекватно передающего большинство особенностей трансзвуковой нестационарной динамики газа. Более того, исследовать задачи теории малых возмущений на основе системы уравнений Эйлера непросто из-за большой разницы в масштабах продольной и поперечной координат.

Отмечено также, что в местных нестационарных сверхзвуковых зонах ударные волны имеют участки в виде аппендиксов, полностью расположенные внутри этих зон. Аналогичная ситуация наблюдалась в стационарных трансзвуковых течениях, в которых ударные волны, замыкающие местные сверхзвуковые зоны, согласно предположению Гудерлея, формируются внутри них.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 04-01-00807).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lin C.C., Reissner E., Tsien H.S. On two-dimensional non-steady motion of a slender body in a compressible fluid // *Math. Phys.* 1948. V. 27. № 3. P. 220–231.
2. Коул Дж., Кук П. Трансзвуковая аэродинамика. М.: Мир, 1989. 360 с.
3. Богданов А.Н. Высшие приближения трансзвукового разложения в задачах нестационарных трансзвуковых течений // *ПММ.* 1997. Т. 61. Вып. 6. С. 798–811.
4. Рыжов О.С. О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением при околоскоростях внешнего потока // *Докл. АН СССР.* 1977. Т. 236. № 5. С. 1091–1094.
5. Богданов А.Н., Диесперов В.Н., Жук В.И., Королев Г.Л., Лунатов И.И., Савенков И.В. Асимптотические модели вязких трансзвуковых течений // *Аннот. докл. Всерос. съезда по теор. и прикл. механике.* Пермь, 2001. С. 106–107.
6. Диесперов В.Н., Королев Г.Л. Возникновение сверхзвуковых зон и зон локального отрыва при трансзвуковом стационарном обтекании неровности поверхности // *Изв. РАН. МЖГ.* 2003. № 1. С. 50–59.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Исследование особенностей течений при помощи уравнения Эйлера–Трикоми // *Докл. АН СССР.* 1954. Т. 96. № 4. С. 725–728.
8. Горьков Л.П., Питаевский Л.П. Возникновение ударной волны при отражении слабого разрыва от звуковой линии // *Докл. АН СССР.* 1962. Т. 144. № 2. С. 293–296.
9. Лифшиц Ю.Б. О течении в окрестности точки встречи звуковой линии со скачком уплотнения // *Инж. журн.* 1965. Т. 5. Вып. 1. С. 29–34.
10. Morretti G. Accuracy and efficiency in the numerical analysis of transonic flow // *Symposium Transonicum 2.* Gottingen, 1975. Berlin: Springer, 1976. P. 439–448.

11. Еременко В.А., Рыжов О.С. О течении в местной сверхзвуковой зоне у профиля крыла бесконечного размаха // Докл. АН СССР. 1978. Т. 240. № 3. С. 560–563.
12. Гудерлей К.Г. Теория околосзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 421 с.
13. Крайко А.Н. О конфигурации скачков уплотнения, замыкающих местную сверхзвуковую зону // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 236–243.
14. Диесперов В.Н., Попов С.П. Структура течения при нестационарном трансзвуковом обтекании плоской пластины с поперечным щелевым вдувом // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2002. Т. 42. № 11. С. 1744–1755.
15. Бибик Ю.В., Диесперов В.Н., Жук В.И., Попов С.П., Шипилин А.В. Численное решение уравнения Линя–Рейснера–Цзяня для течений в плоском канале // Сообщ. по прикл. математике. М.: ВЦ РАН, 2002.
16. Бибик Ю.В., Диесперов В.Н., Жук В.И., Попов С.П., Шипилин А.В. Численное решение уравнения Линя–Рейснера–Цзяня из теории трансзвуковых течений // Сообщ. по прикл. математике. М.: ВЦ РАН, 2002.
17. Canic S., Keyfitz B.L., Kim E.H. Weak shock reflection modeled by the unsteady transonic small disturbance equation // Intern. Ser. Numer. Mathematics. 2001. V. 140. P. 217–226.
18. Васильев Е.И., Крайко А.Н. Численное моделирование дифракции слабых скачков на клине в условиях парадокса Неймана // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1999. Т. 39. № 8. С. 1393–1404.
19. Adamson T.C. Unsteady transonic flows in two-dimensional channels // J. Fluid Mech. 1972. V. 52. Pt 3. P. 437–449.
20. Tomotika S., Tamada K. Studies on two-dimensional transonic flows of compressible fluids. Pt 2. // Quart. Appl. Math. 1950. V. 7. P. 381–397.
21. Taylor G.I. The flow of air at high speeds past curved surfaces // Britain Aeronaut. Research Committee Reports and Memoranda. 1930. № 1381.
22. Meyer Th. Uber zweidimensionale Bewegungsvorgänge in einem Gas, das mit Überschallgeschwindigkeit strömt // Forschungshefte. 1908. № 62.
23. Богданов А.Н. Моделирование переходного режима работы трансзвукового сопла // Мат. моделирование. 1995. Т. 7. № 9. С. 117–126.
24. Adamson T.C., Richey G.K. A study of unsteady transonic flows with shock waves in two dimensional channels // Techn. Report Mich-10-Pu, University of Michigan. 1972. P. 1–69.