

© 2005 г. Л. А. ТКАЧЕВА

ВОЗДЕЙСТВИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ НА ПЛАВАЮЩУЮ УПРУГУЮ ПЛАСТИНУ

Методом Винера – Хопфа решена задача о поведении плавающей упругой пластины в виде полосы под действием периодической поверхностной нагрузки. В явном виде получено коротковолновое приближение. Проведено численное исследование влияния частоты и характера действующей нагрузки на амплитуды колебаний жидкости и пластины. Обнаружено, что при некоторых видах нагрузки волны в жидкости не распространяются, а колебания пластины локализованы вблизи области действующей нагрузки. Найдены условия, при которых реализуются локализованные колебания.

Ключевые слова: поверхностные волны, изгибно-гравитационные волны, упругая пластина, метод Винера – Хопфа, частоты рассеяния, коротковолновое приближение, локализованные колебания.

Воздействие динамических нагрузок на плавающую упругую пластину изучалось ранее применительно к ледовому покрову. При этом предполагалось, что лед или полностью покрывает поверхность жидкости [1–3], или представляет собой полуплоскость [4, 5]. В связи с проектами создания искусственных сооружений больших размеров типа плавучих островов возникла необходимость исследовать динамические нагрузки на упругую пластину конечных размеров. Задача дифракции поверхностных волн на плавающей упругой пластине хорошо изучена, а вынужденные колебания конечной пластины под действием нагрузки – недостаточно. Число таких исследований невелико [4, 6], приведены лишь отдельные примеры расчетов, анализ поведения пластины отсутствует. Обзор существующих численных методов для решения задачи о поведении плавающих упругих пластин содержится в [7]. В настоящей работе проводится анализ вынужденных колебаний для модельной пластины, используемой в экспериментах [8].

1. Постановка задачи. В рамках линейной теории исследуется гидроупругое поведение плавающей пластины на волнах в жидкости конечной глубины H_0 . Пластина имеет постоянные толщину h и длину L_0 . Левый край пластины принимается за начало декартовой системы координат x, y . Концы пластины не закреплены. Жидкость – идеальная несжимаемая, ее течение – безвихревое. Предполагается, что толщина пластины значительно меньше длины волн, распространяющихся в пластине. На пластину действует периодическое по времени давление вида $q(x)e^{-i\omega t}$. Граничные условия сносятся на невозмущенную поверхность воды.

Потенциал скоростей жидкости ϕ удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям в виде

$$\Delta\phi = 0, \quad -H_0 < y < 0$$

$$\phi_y = 0, \quad y = -H_0, \quad \phi_y = w_t, \quad y = 0$$

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p + q(x)e^{-i\omega t}, \quad y = 0, \quad 0 < x < L_0 \quad (1.1)$$

$$p = -\rho(\phi_t + gw)$$

$$\phi_t + gw = 0, \quad y = 0, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (L_0, \infty)$$

Здесь w – вертикальное смещение верхней поверхности жидкости (пластины), p – гидродинамическое давление, g – ускорение свободного падения, D – цилиндрическая жесткость пластины, ρ, ρ_0 – плотности жидкости и пластины, t – время, ω – частота колебаний. На краях пластины должны обращаться в ноль момент и перерезывающая сила

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad L_0 \quad (1.2)$$

Рассмотрим сначала случай сосредоточенной нагрузки: $q(x, t) = q_0 \delta(x - x_0) e^{-i\omega t}$. Зависимость всех функций от времени выражается множителем $e^{-i\omega t}$. Введем характерную длину $l = g/\omega^2$ и безразмерные переменные

$$\varphi' = \frac{\varphi \omega \rho}{q_0}, \quad w' = \frac{w \rho g}{q_0}, \quad p' = q_0 p, \quad x' = \frac{x}{l}, \quad y' = \frac{y}{l}, \quad x_* = \frac{x_0}{l}, \quad t' = \omega t$$

Штрихи в дальнейшем опускаем. Представим потенциал в виде $\phi = \phi(x, y) e^{-it}$. Тогда из (1.1), (1.2) получим краевую задачу для ϕ :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad -H < y < 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad y = -H$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - \phi = 0, \quad y = 0, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (L, \infty) \quad (1.4)$$

$$\left(\beta \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 1 - d \right) \frac{\partial \phi}{\partial y} - \phi = -i \delta(x - x_*), \quad y = 0, \quad 0 < x < L \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad x = 0, L \quad (1.6)$$

$$L = \frac{L_0}{l}, \quad H = \frac{H_0}{l}, \quad x_* = \frac{x_0}{l}, \quad \beta = \frac{D}{\rho g l^4}, \quad d = \frac{\rho_0 h}{\rho l}$$

Здесь L, H, x_*, β и d – параметры задачи: безразмерные длина пластины, глубина жидкости и точка приложения внешней нагрузки, приведенная жесткость и осадка пластины в воду. Кроме этого, должны выполняться условия излучения при $|x| \rightarrow \infty$ и регулярности вблизи кромок (локальная ограниченность энергии).

Для поверхностных волн значения α должны удовлетворять дисперсионному соотношению

$$K_1(\alpha) \equiv \alpha \operatorname{th}(\alpha H) - 1 = 0$$

Это соотношение имеет два действительных корня $\pm \gamma$ и счетное множество чисто мнимых корней $\pm \gamma_n$ ($n = 1, 2, \dots$), расположенных симметрично относительно действительной оси [9], при $n \rightarrow \infty, \gamma_n \rightarrow i n \pi / H$.

Для изгибно-гравитационных волн, распространяющихся в пластине, получаем дисперсионное соотношение

$$K_2(\alpha) \equiv (\beta \alpha^4 + 1 - d) \alpha \operatorname{th}(\alpha H) - 1 = 0$$

Оно имеет два действительных корня $\pm \alpha_0$, счетное множество чисто мнимых корней $\pm \alpha_n$ ($n = 1, 2, \dots$), а также четыре комплексных корня, симметричных относительно

но действительной и мнимой осей [9]. Обозначим через α_{-1} корень, лежащий в первом квадранте, через α_{-2} – корень во втором квадранте. При $n \rightarrow \infty$, значение $\alpha_n \rightarrow i\pi n/H$. Действительные корни дисперсионных соотношений определяют распространяющиеся волны, а остальные корни – краевые волны, экспоненциально затухающие вдали от кромки пластины.

2. Система интегральных уравнений. Решение задачи строится методом Винера – Хопфа [10]. Введем в рассмотрение функции

$$\begin{aligned} \Phi_+(\alpha, y) &= \int_L^\infty e^{i\alpha(x-L)} \phi(x, y) dx, & \Phi_-(\alpha, y) &= \int_{-\infty}^0 e^{i\alpha x} \phi(x, y) dx \\ \Phi_1(\alpha, y) &= \int_0^L e^{i\alpha x} \phi(x, y) dx, & \Phi(\alpha, y) &= \Phi_-(\alpha, y) + \Phi_1(\alpha, y) + e^{i\alpha L} \Phi_+(\alpha, y) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Исследуем поведение функций $\Phi_{\pm}(\alpha, y)$. При $x \rightarrow -\infty$ потенциал представляет собой волну вида $Re^{-i\gamma x}$ и множество экспоненциально затухающих волн. Наименее затухающая волна соответствует корню γ_1 . Тогда $\Phi_-(\alpha, y)$ аналитична в полуплоскости $Im \alpha < |\gamma_1|$, за исключением полюса при $\alpha = \gamma$. При $x \rightarrow \infty$ потенциал ϕ представляет собой волну вида $Te^{i\gamma x}$ и множество экспоненциально затухающих мод, поэтому функция $\Phi_+(\alpha, y)$ аналитична в полуплоскости $\{Im \alpha > -|\gamma_1|\}$, за исключением полюса в точке $\alpha = -\gamma$.

Функция $\Phi(\alpha, y)$ удовлетворяет уравнению $\partial^2 \Phi / \partial y^2 - \alpha^2 \Phi = 0$. Общее решение этого уравнения с условием (1.3) на дне имеет вид

$$\Phi(\alpha, y) = C(\alpha)Z(\alpha, y), \quad Z(\alpha, y) = \text{ch}(\alpha(y+H))(\text{ch}(\alpha H))^{-1} \quad (2.2)$$

Обозначим через $D_{\pm}(\alpha)$, $D_1(\alpha)$ интегралы типа (2.1), где функция ϕ под интегралом заменяется левой частью краевого условия (1.4), а через $F_{\pm}(\alpha)$, $F_1(\alpha)$ – аналогичные выражения, в которых в качестве подынтегральной функции берется левая часть выражения (1.5). Введем функции $D(\alpha)$ и $F(\alpha)$:

$$D(\alpha) = D_-(\alpha) + D_1(\alpha) + e^{i\alpha L} D_+(\alpha), \quad F(\alpha) = F_-(\alpha) + F_1(\alpha) + e^{i\alpha L} F_+(\alpha)$$

$$D(\alpha) = C(\alpha)K_1(\alpha), \quad F(\alpha) = C(\alpha)K_2(\alpha)$$

Из краевых условий (1.4) и (1.5) имеем

$$D_-(\alpha) = D_+(\alpha) = 0, \quad D_1(\alpha) = D(\alpha) = C(\alpha)K_1(\alpha)$$

$$F_1(\alpha) = -ie^{i\alpha x_*}, \quad F_-(\alpha) + F_1(\alpha) + e^{i\alpha L} F_+(\alpha) = C(\alpha)K_2(\alpha) \quad (2.3)$$

Исключая $C(\alpha)$, получаем уравнение

$$F_-(\alpha) - ie^{i\alpha x_*} + e^{i\alpha L} F_+(\alpha) = D_1(\alpha)K(\alpha), \quad K(\alpha) = \frac{K_2(\alpha)}{K_1(\alpha)} \quad (2.4)$$

В соответствии с методом Винера – Хопфа необходимо факторизовать функцию $K(\alpha)$, т.е. представить ее в виде $K(\alpha) = K_+(\alpha)K_-(\alpha)$, где функции $K_{\pm}(\alpha)$ регулярны в тех же областях, что и $\Phi_{\pm}(\alpha, y)$. Функция $K(\alpha)$ имеет соответственно нули и полюса на действительной оси в точках $\pm\gamma$ и $\pm\alpha_0$, поэтому будем рассматривать области аналитичности Π_+ и Π_- , где Π_+ , Π_- – полуплоскости $Im \alpha > -|\gamma_1|$ и $Im \alpha < |\gamma_1|$ с разрезами, исключаящими точки $-\alpha_0$ и $-\gamma$, а также α_0 и γ .

Определим функции $K_{\pm}(\alpha)$ формулами

$$K_{\pm}(\alpha) = \frac{\sqrt{\beta}(\alpha \pm \alpha_0)(\alpha \pm \alpha_{-1})(\alpha \pm \alpha_{-2})g_{\pm}(\alpha)}{\alpha \pm \gamma}, \quad g_{\pm}(\alpha) = \exp \left[\pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty \mp i\sigma}^{\infty \mp i\sigma} \frac{\ln g(x) dx}{x - \alpha} \right]$$

$$g(\alpha) = \frac{K(\alpha)\beta(\alpha^2 - \gamma^2)}{\beta(\alpha^2 - \alpha_0^2)(\alpha^2 - \alpha_{-1}^2)(\alpha^2 - \alpha_{-2}^2)}, \quad \sigma < |\gamma_1|, \quad K_+(\alpha) = K_-(-\alpha)$$

Умножим уравнение (2.4) на $e^{-i\alpha L}[K_+(\alpha)]^{-1}$ и преобразуем его к виду

$$\frac{F_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} + U_+(\alpha) + M_+(\alpha) = D_1(\alpha)K_-(\alpha)e^{-i\alpha L} - M_-(\alpha) - U_-(\alpha)$$

$$U_+(\alpha) + U_-(\alpha) = \frac{e^{-i\alpha L}F_-(\alpha)}{K_+(\alpha)}, \quad M_+(\alpha) + M_-(\alpha) = -\frac{ie^{i\alpha(x_* - L)}}{K_+(\alpha)} \quad (2.5)$$

$$U_{\pm}(\alpha) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty \mp i\sigma}^{\infty \mp i\sigma} \frac{e^{-i\zeta L}F_-(\zeta)d\zeta}{K_+(\zeta)(\zeta - \alpha)}, \quad M_{\pm}(\alpha) = \mp \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty \mp i\sigma}^{\infty \mp i\sigma} \frac{e^{i\zeta(x_* - L)}d\zeta}{K_+(\zeta)(\zeta - \alpha)}$$

Теперь разделим уравнение (2.4) на $K_-(\alpha)$ и в результате получим

$$\frac{F_-(\alpha)}{K_-(\alpha)} + V_-(\alpha) + N_-(\alpha) = D_1(\alpha)K_+(\alpha) - V_+(\alpha) - N_+(\alpha) \quad (2.6)$$

$$V_+(\alpha) + V_-(\alpha) = \frac{e^{i\alpha L}F_+(\alpha)}{K_-(\alpha)}, \quad N_+(\alpha) + N_-(\alpha) = -\frac{ie^{i\alpha x_*}}{K_-(\alpha)}$$

$$V_{\pm}(\alpha) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty \mp i\sigma}^{\infty \mp i\sigma} \frac{e^{i\zeta L}F_+(\zeta)d\zeta}{K_-(\zeta)(\zeta - \alpha)}, \quad N_{\pm}(\alpha) = \mp \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty \mp i\sigma}^{\infty \mp i\sigma} \frac{e^{i\zeta x_*}d\zeta}{K_-(\zeta)(\zeta - \alpha)} \quad (2.7)$$

В левой и в правой частях уравнения (2.5) имеем функции, аналитические в областях P_+ и P_- . Аналитическим продолжением определим функцию, аналитическую во всей комплексной плоскости. Согласно теореме Лиувилля, эта функция является полиномом, степень которого определяется поведением функций при $|\alpha| \rightarrow \infty$ [11]. Из условия локальной ограниченности энергии следует, что степень полинома равна единице:

$$\frac{F_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} + U_+(\alpha) + M_+(\alpha) = a_1 + a_2\alpha \quad (2.8)$$

Аналогично из уравнения (2.6) имеем

$$\frac{F_-(\alpha)}{K_-(\alpha)} + V_-(\alpha) + N_-(\alpha) = b_1 + b_2\alpha \quad (2.9)$$

Константы $a_i, b_i, i = 1, 2$ находятся из условий в кромках (1.6). Из уравнений (2.8), (2.9) получаем систему

$$\frac{F_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + i\sigma}^{\infty + i\sigma} \frac{e^{-i\zeta L}F_-(\zeta)d\zeta}{(\zeta - \alpha)K_+(\zeta)} = a_1 + a_2\alpha - M_+(\alpha) \quad (2.10)$$

$$\frac{F_-(\alpha)}{K_-(\alpha)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - i\sigma}^{\infty - i\sigma} \frac{e^{i\zeta L}F_+(\zeta)d\zeta}{(\zeta - \alpha)K_-(\zeta)} = b_1 + b_2\alpha - N_-(\alpha)$$

Перейдем к определению констант a_1 и a_2 . Имеем

$$D_1(\alpha)K_-(\alpha)e^{-i\alpha L} - M_-(\alpha) - U_-(\alpha) = a_1 + a_2\alpha$$

$$D_1(\alpha) = \frac{e^{i\alpha L}}{K_-(\alpha)} \left[a_1 + a_2\alpha - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + i\sigma}^{\infty + i\sigma} \frac{e^{-i\zeta L}(F_-(\zeta) - ie^{i\zeta x_*})d\zeta}{K_+(\zeta)(\zeta - \alpha)} \right]$$

С помощью (2.2), (2.3) и обратного преобразования Фурье получаем

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha(x-L)} Z(\alpha, y)}{K_-(\alpha) K_1(\alpha)} \left[a_1 + a_2 \alpha - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{e^{-i\zeta L} (F_-(\zeta) - ie^{i\zeta x_*}) d\zeta}{K_+(\zeta)(\zeta - \alpha)} \right] d\alpha \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha(x-L)} \alpha \operatorname{th}(\alpha H) K_+(\alpha)}{K_2(\alpha)} \left[a_1 + a_2 \alpha - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{e^{-i\zeta L} (F_-(\zeta) - ie^{i\zeta x_*}) d\zeta}{K_+(\zeta)(\zeta - \alpha)} \right] d\alpha \quad (2.12)$$

Контур интегрирования во внешнем интеграле должен быть выбран таким образом, чтобы он полностью лежал в пересечении областей Π_+ и Π_- . Выберем контур интегрирования на действительной оси, обходя точки α_0 и γ снизу, а точки $-\alpha_0$ и $-\gamma$ сверху. Во внутреннем интеграле $\operatorname{Im} \alpha < \sigma$. Аналитическим продолжением этот интеграл может быть определен во всей комплексной плоскости. Вычислим его с помощью теории вычетов

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{(e^{-i\zeta L} F_-(\zeta) - ie^{-i\zeta(L-x_*)}) d\zeta}{K_+(\zeta)(\zeta - \alpha)} = -\frac{e^{-i\alpha L} (F_-(\alpha) - ie^{i\alpha x_*})}{K_+(\alpha)} + \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j L} (F_-(\alpha_j) - ie^{-i\alpha_j x_*})}{K_+'(-\alpha_j)(\alpha_j + \alpha)}$$

Из (2.12) при $x_* < x < L$ следует

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0) = i \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_m(L-x)} \alpha_m \operatorname{th}(\alpha_m H) K_+(\alpha_m) \Psi(\alpha_m)}{K_2'(\alpha_m)} - i \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_m x} \alpha_m \operatorname{th}(\alpha_m H) (F_-(\alpha_m) - ie^{-i\alpha_m x_*})}{K_2'(-\alpha_m)}$$

$$\Psi(\alpha_m) = a_1 + a_2 \alpha_m - \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j L} (F_-(\alpha_j) - ie^{-i\alpha_j x_*})}{K_+'(-\alpha_j)(\alpha_j + \alpha_m)}$$

Из краевых условий (1.6) при $x = L$ получаем два уравнения

$$\sum_{m=-2}^{\infty} \frac{\alpha_m^n \operatorname{th}(\alpha_m H) K_+(\alpha_m) \Psi(\alpha_m)}{K_2'(\alpha_m)} + (-1)^n \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_m L} \alpha_m^n \operatorname{th}(\alpha_m H) (F_-(\alpha_m) - ie^{-i\alpha_m x_*})}{K_2'(-\alpha_m)} = 0, \quad n = 3, 4 \quad (2.13)$$

Из дисперсионного соотношения под пластиной имеем

$$\alpha_m \operatorname{th}(\alpha_m H) = -\frac{K_1(\alpha_m)}{\beta \alpha_m^4 - d} \quad (2.14)$$

Подставляя это выражение в (2.13), находим

$$\sum_{m=-2}^{\infty} \frac{\alpha_m^{n-1} K_1(\alpha_m)}{K_2'(\alpha_m)(\beta \alpha_m^4 - d)} [K_+(\alpha_m) \Psi(\alpha_m) - (-1)^n e^{i\alpha_m L} (F_-(\alpha_m) - ie^{-i\alpha_m x_*})] = 0 \quad (2.15)$$

Первый член представляет собой сумму вычетов в точках α_m интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^{n-1} K_1(\alpha) K_+(\alpha) \Psi(\alpha) d\alpha}{K_2(\alpha)(\beta\alpha^4 - d)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^{n-1} \Psi(\alpha) d\alpha}{K_-(\alpha)(\beta\alpha^4 - d)}$$

Преобразуем его к сумме вычетов в корнях полинома $\beta\alpha^4 - d$. Аналогично поступив и с суммой по m во втором члене, выводим систему

$$\sum_{k=1}^4 \frac{z_k^{n-4} (a_1 + a_2 z_k)}{K_-(z_k)} - \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j L} (F_-(-\alpha_j) - ie^{-i\alpha_j x_*})}{K'_+(\alpha_j)} \sum_{k=1}^4 \frac{z_k^{n-4}}{K_-(z_k)(z_k + \alpha_j)} = 0 \quad (2.16)$$

где $n = 3, 4$, z_k – корни полинома $\beta\alpha^4 - d$.

Найдем теперь константы b_1 и b_2 . Из уравнений (2.6), (2.9) имеем

$$D_1(\alpha)K_+(\alpha) - V_+(\alpha) - N_+(\alpha) = b_1 + b_2\alpha$$

Обратным преобразованием Фурье с учетом (2.2), (2.3) и (2.7) находим

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x} Z(\alpha, y)}{K_+(\alpha)K_1(\alpha)} \left[b_1 + b_2\alpha + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - i\sigma}^{\infty - i\sigma} \frac{(e^{i\zeta L} F_+(\zeta) - ie^{i\zeta x_*}) d\zeta}{K_-(\zeta)(\zeta - \alpha)} \right] d\alpha \quad (2.17)$$

Для коэффициентов b_1, b_2 получаем систему

$$\sum_{k=1}^4 \frac{z_k^{n-4} (b_1 + b_2 z_k)}{K_+(z_k)} - \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j L} (F_+(\alpha_j) - ie^{i\alpha_j(x_* - L)})}{K'_-(\alpha_j)} \sum_{k=1}^4 \frac{z_k^{n-4}}{K_+(z_k)(z_k - \alpha_j)} = 0 \quad (2.18)$$

Таким образом, выведена система уравнений (2.10), (2.16), (2.18).

3. Решение системы. Интегралы в уравнениях (2.10) будем вычислять с помощью теории вычетов. Введем новые неизвестные

$$\xi_j = \frac{F_+(\alpha_j)}{\alpha_j^2 K_+(\alpha_j)}, \quad \eta_j = \frac{F_-(-\alpha_j)}{\alpha_j^2 K_-(-\alpha_j)} \quad (3.1)$$

Для них получим систему

$$\begin{cases} \xi - C\eta - Aa = F_1 \\ \eta - C\xi - A^-\mathbf{b} = F_2 \\ G\eta + Ba = F_3 \\ S\xi + Db = F_4 \end{cases} \quad (3.2)$$

где $\xi, \eta, F_n, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ – векторы $\{\xi_j\}, \{\eta_j\}, \{F_j^{(n)}\}, \{a_i\}, \{b_i\}$; C, G, S, B, D, A, A^- – матрицы $\{C_{jm}\}, \{G_{im}\}, \{S_{im}\}, \{B_{im}\}, \{D_{im}\}, \{A_{ji}\}, \{A_{ji}^-\}$

$$C_{jm} = \frac{K_m}{\alpha_j^2(\alpha_m + \alpha_j)}, \quad K_m = \frac{e^{i\alpha_m L} \alpha_m^2 K_+(\alpha_m) K_1(\alpha_m)}{K_2'(\alpha_m)}, \quad A_{ji}^- = (-1)^{i-1} \alpha_j^{i-3}$$

$$A_{ji} = \alpha_j^{i-3}, \quad G_{im} = K_m \sum_{k=1}^4 \frac{z_k^{i-2}}{K_-(z_k)(z_k + \alpha_m)}, \quad S_{im} = -K_m \sum_{k=1}^4 \frac{z_k^{i-2}}{K_+(z_k)(z_k - \alpha_m)}$$

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \sum_{k=1}^4 \frac{1}{K_-(z_k)z_k}, & B_{12} = B_{21} &= \sum_{k=1}^4 \frac{1}{K_-(z_k)}, & B_{22} &= \sum_{k=1}^4 \frac{z_k}{K_-(z_k)} \\
D_{11} &= \sum_{k=1}^4 \frac{1}{K_+(z_k)z_k}, & D_{12} = D_{21} &= \sum_{k=1}^4 \frac{1}{K_+(z_k)}, & D_{22} &= \sum_{k=1}^4 \frac{z_k}{K_+(z_k)} \\
F_j^{(1)} &= \frac{-i}{\alpha_j^2} \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_m(L-x_*)} Q_m}{(\alpha_m + \alpha_j)}, & F_j^{(2)} &= \frac{-i}{\alpha_j^2} \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_m x_*} Q_m}{(\alpha_m + \alpha_j)} \\
Q_m &= \frac{K_+(\alpha_m)K_1(\alpha_m)}{K_2'(\alpha_m)}, & F_i^{(3)} &= i \sum_{m=-2}^{\infty} e^{i\alpha_m(L-x_*)} Q_m \sum_{k=1}^4 \frac{z_k^{i-2}}{K_-(z_k)(z_k + \alpha_m)} \\
F_i^{(4)} &= -i \sum_{m=-2}^{\infty} e^{i\alpha_m x_*} Q_m \sum_{k=1}^4 \frac{z_k^{i-2}}{K_+(z_k)(z_k - \alpha_m)}
\end{aligned}$$

Прогиб пластины $w(x)$, давление $p(x)$ и безразмерные изгибающие моменты $M(x)$ определяются формулами

$$\begin{aligned}
w(x) &= - \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\alpha_j \operatorname{th}(\alpha_j H) W_j(x)}{K_2'(\alpha_j)}, & p(x) &= \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{K_1(\alpha_j) W_j(x)}{K_2'(\alpha_j)} \\
M(x) &= \frac{\beta l |w''(x)|}{Ld}, & w''(x) &= \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\alpha_j^3 \operatorname{th}(\alpha_j H) W_j(x)}{K_2'(\alpha_j)}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$W_j(x) = -ie^{i\alpha_j|x-x_*|} + \alpha_j^2 K_+(\alpha_j) [\eta_j e^{i\alpha_j x} + \xi_j e^{i\alpha_j(L-x)}]$$

Первый член в $W_j(x)$ – волна от точки приложения нагрузки, значения $F_+(\alpha_j)$ и ξ_j определяют комплексные амплитуды волн, бегущих с правой кромки пластины, а $F_-(\alpha_j)$ и η_j – с левой кромки. Из (2.10) и (2.16) находим амплитуды возвышения свободной границы $\zeta_{-\infty}$ и ζ_{∞} при $x \rightarrow \mp\infty$

$$\begin{aligned}
\zeta_{-\infty} &= -\frac{1}{K_1'(\gamma)K_+(\gamma)} \left[b_1 + b_2\gamma + \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{K_+(\alpha_j)K_1(\alpha_j)[e^{i\alpha_j L} \alpha_j^2 K_+(\alpha_j) \xi_j - ie^{i\alpha_j x_*}]}{K_2'(\alpha_j)(\alpha_j - \gamma)} \right] \\
\zeta_{\infty} &= -\frac{e^{-i\gamma L}}{K_1'(\gamma)K_+(\gamma)} \left[a_1 - a_2\gamma - \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j L} K_+(\alpha_j)K_1(\alpha_j)[\alpha_j^2 K_+(\alpha_j) \eta_j - ie^{-i\alpha_j x_*}]}{K_2'(\alpha_j)(\alpha_j - \gamma)} \right]
\end{aligned}$$

4. Решение без учета осадки, высокочастотное приближение. В силу сделанных предположений $d \ll 1$, поэтому в уравнении (1.5) параметром d можно пренебречь. В выражениях (2.15) полагаем $d = 0$. Тогда первый член сводится к интегралу

$$\frac{1}{2\pi i \beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^{n-5} \Psi(\alpha) d\alpha}{K_-(\alpha)}$$

Замыкая интеграл в нижней полуплоскости, находим

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} \frac{[e^{-i\zeta L} F_-(\zeta) - ie^{-i\zeta(L-x_*)}] d\zeta}{\zeta^n K_+(\zeta)}, \quad n = 1, 2$$

Аналогично из уравнений (2.18) следует

$$b_n = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \frac{[e^{i\zeta L} F_+(\zeta) - ie^{i\zeta x_*}] d\zeta}{\zeta^n K_-(\zeta)}, \quad n = 1, 2$$

Здесь C/C_+ – контуры интегрирования от $-\infty$ до ∞ , лежащие в пересечении областей Π_+ и Π_- с обходом начала координат снизу (сверху).

Подставляя выражения для коэффициентов в систему (2.10), получим

$$\frac{F_+(\alpha)}{\alpha^2 K_+(\alpha)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} \frac{e^{-i\zeta L} F_-(\zeta) d\zeta}{\zeta^2 K_+(\zeta)(\zeta - \alpha)} = \frac{1}{2\pi} \int_{C_-} \frac{e^{-i\zeta(L-x_*)} d\zeta}{\zeta^2 K_+(\zeta)(\zeta - \alpha)}$$

$$\frac{F_-(\alpha)}{\alpha^2 K_-(\alpha)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \frac{e^{i\zeta L} F_+(\zeta) d\zeta}{\zeta^2 K_-(\zeta)(\zeta - \alpha)} = -\frac{1}{2\pi} \int_{C_+} \frac{e^{i\zeta x_*} d\zeta}{\zeta^2 K_-(\zeta)(\zeta - \alpha)}$$

Введем новые искомые функции формулами (3.1). Интегралы вычислим с помощью теории вычетов. Тогда система интегральных уравнений сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$\xi_j - \sum_{m=-2}^{\infty} c_{jm} \eta_m = f_j^{(1)}, \quad \eta_j - \sum_{m=-2}^{\infty} c_{jm} \xi_m = f_j^{(2)}, \quad c_{jm} = \frac{e^{i\alpha_m L} K_+^2(\alpha_m) K_1(\alpha_m)}{(\alpha_m + \alpha_j) K_2'(\alpha_m)} \quad (4.1)$$

$$f_j^{(1)} = i \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_m(L-x_*)} K_+(\alpha_m) K_1(\alpha_m)}{\alpha_m^2 K_2'(\alpha_m)(\alpha_m + \alpha_j)}, \quad f_j^{(2)} = i \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_m x_*} K_+(\alpha_m) K_1(\alpha_m)}{\alpha_m^2 K_2'(\alpha_m)(\alpha_m + \alpha_j)}$$

Система (4.1) удовлетворяет условиям редукции [12], и решение конечной редуцированной системы сходится к решению исходной системы, если порядок конечной системы стремится к бесконечности. Прогиб пластины и давление вычисляются по формулам (3.3), комплексные амплитуды возвышения свободной границы вдали от пластины равны соответственно

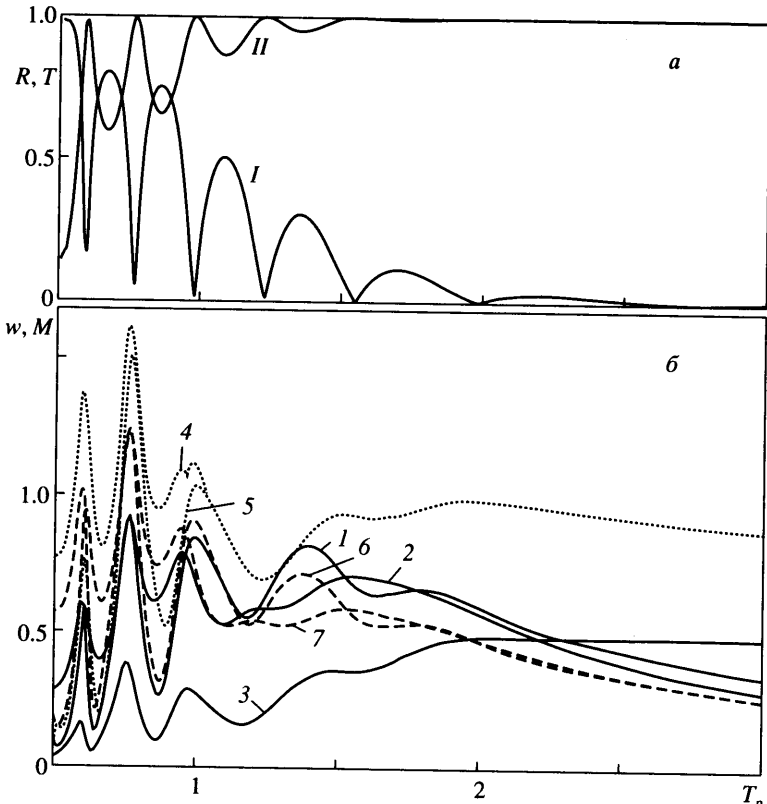
$$\zeta_{-\infty} = -\frac{\gamma^2}{K_1'(\gamma) K_+(\gamma)} \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{K_+(\alpha_j) K_1(\alpha_j) [e^{i\alpha_j L} \alpha_j^2 K_+(\alpha_j) \xi_j - ie^{i\alpha_j x_*}]}{\alpha_j^2 K_2'(\alpha_j)(\alpha_j - \gamma)}$$

$$\zeta_{\infty} = -\frac{\gamma^2 e^{-i\gamma L}}{K_1'(\gamma) K_+(\gamma)} \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j L} K_+(\alpha_j) K_1(\alpha_j) [\alpha_j^2 K_+(\alpha_j) \eta_j - ie^{-i\alpha_j x_*}]}{\alpha_j^2 K_2'(\alpha_j)(\alpha_j - \gamma)}$$

При высоких частотах внешнего воздействия $L \gg 1$. В этом случае все элементы матрицы C экспоненциально малы, за исключением столбца, соответствующего действительному корню α_0 . Положим все остальные элементы матрицы равными нулю. Тогда система легко обращается, имеем

$$\eta_j = c_{j0} \frac{f_0^{(1)} + c_{00} f_0^{(2)}}{1 - c_{00}^2} + f_j^{(2)}, \quad \xi_j = c_{j0} \frac{c_{00} f_0^{(1)} + f_0^{(2)}}{1 - c_{00}^2} + f_j^{(1)} \quad (4.2)$$

Так как $|c_{00}| = |\gamma - \alpha_0|/(\gamma + \alpha_0)$, амплитуды ξ_j и η_j максимальны, когда c_{00} действительно, т.е. $\alpha_0 L + \text{Arg}(K_+(\alpha_0)) = \pi k, k = 1, 2, \dots$. Отметим, что это же условие соответствует нулевым значениям коэффициента отражения и максимальным прогибам пластины в задаче дифракции поверхностных волн [13]. Соответствующие частоты являются



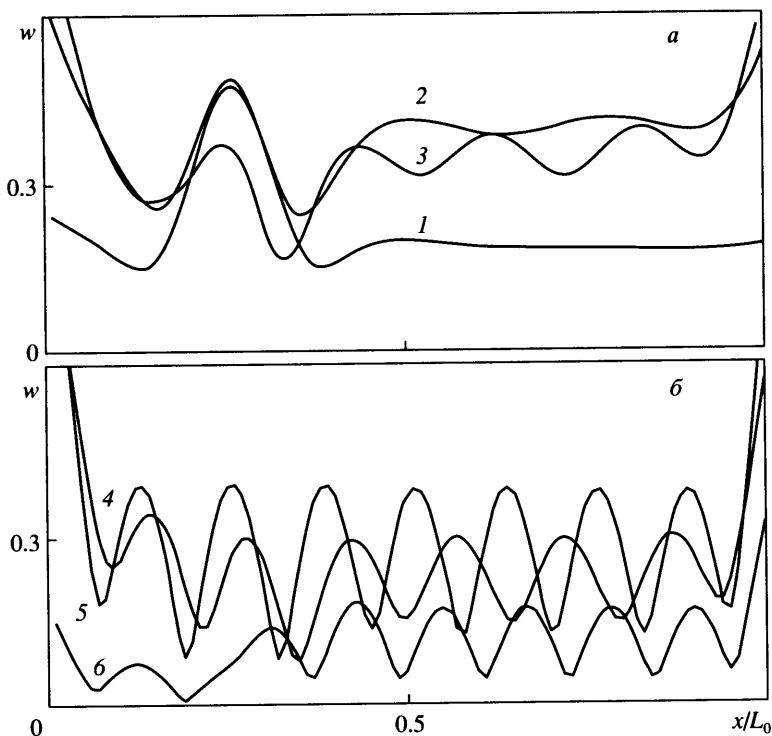
Фиг. 1. Зависимости от периода T_p коэффициентов отражения R и прохождения T в задаче о дифракции поверхностных волн (а): $I, II - R, T$; и амплитуд вынужденных колебаний (б): $1, 2$ – в левой и правой кромках пластины, 3 – в центре нагрузки; безразмерных моментов: 4 – максимальное значение, 5 – в центре нагрузки; возвышения свободной границы: $6, 7$ – слева и справа на бесконечности; $H_0 = 1.1$ м, $x_0 = L_0/4$, $s = 0.5$ м

частотами рассеяния [14, 15], на которых отмечено резонансное усиление амплитуд прогиба пластины в задаче дифракции. Из формул (4.2) следует, что на этих частотах следует ожидать повышенных амплитуд прогиба и напряжений пластины и при действии внешней нагрузки.

Для случая распределенной нагрузки на пластину действует внешнее периодическое по времени давление с интенсивностью $q(x)$, $x \in [x_1, x_2]$. Умножая полученное решение на $q(x_*)$ и интегрируя по x_* , находим решение для распределенной нагрузки. В [5] обнаружено существование локализованных колебаний для некоторых видов нагрузки в случае полубесконечной пластины. Для конечной пластины также существуют локализованные колебания, причем условия, при которых они реализуются, те же, что и в случае полубесконечной пластины, а именно $A_0 = 0$, где

$$A_j = \int_{x_1}^{x_2} e^{i\alpha_j x_*} q(x_*) dx_*$$

и область приложения нагрузки далека от кромок, чтобы кромки находились вне зоны влияния затухающих мод от области нагрузки. При этих условиях амплитуды рас-



Фиг. 2. Распределения амплитуд колебаний пластины при различных периодах внешней нагрузки для $H_0 = 1.1$ м, $x_0 = L_0/4$, $s = 0.5$ м: 1–б – $T_p = 4, 2, 1.5, 1, 0.75, 0.65$ с

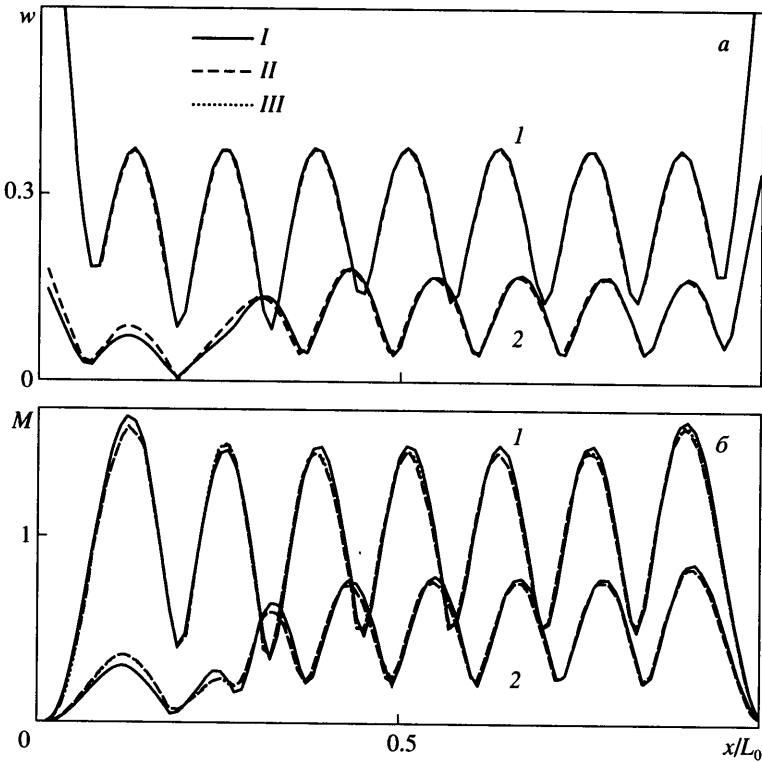
пространяющихся волн в пластине равны нулю, а затухающие волны не достигают кромки, поэтому жидкость остается невозмущенной. Колебания пластины такие же, как если бы она была бесконечной во всех направлениях, и локализованы вблизи области приложения нагрузки. Область колебаний ограничена зоной влияния затухающих мод.

5. Численные результаты. Получено хорошее согласование тестовых расчетов с результатами [4]. Проведено численное исследование зависимости амплитуд колебаний жидкости и пластины от частоты и характера динамической нагрузки для условий эксперимента [8]. Длина пластины $L_0 = 10$ м, толщина $h = 38$ мм, осадка $d_1 = 8.36$ мм, модуль упругости $E = 103$ МПа, глубина жидкости 1.1 м. Соответствующая задача дифракции исследована в [16]. Действующая нагрузка приложена в области $|x - x_0| < s$ и задается функцией

$$q(x) = q_0 \left[1 - \frac{(x - x_0)^2}{s^2} \right], \quad A_j = \frac{4}{\alpha_j^2 s} \left[\frac{\sin(\alpha_j s)}{\alpha_j s} - \cos(\alpha_j s) \right]$$

В расчетах глубина жидкости, а также период, центр и площадь приложения нагрузки менялись в диапазонах: 0.5–10 м, 0.5–3 с, 0.6–5 м, 0.5–5 м.

Зависимости амплитуд колебаний жидкости и пластины от периода T_p нагрузки не монотонны (фиг. 1). Максимальные амплитуды для высокочастотной нагрузки соответствуют частотам рассеяния, соответствующим нулевым значениям коэффициента отражения. Для низкочастотной нагрузки такой эффект не наблюдается. Это объясняется тем, что при низких частотах волны, отраженные от краев, малы, а главная часть смещений обусловлена воздействием нагрузки и сосредоточена вблизи области



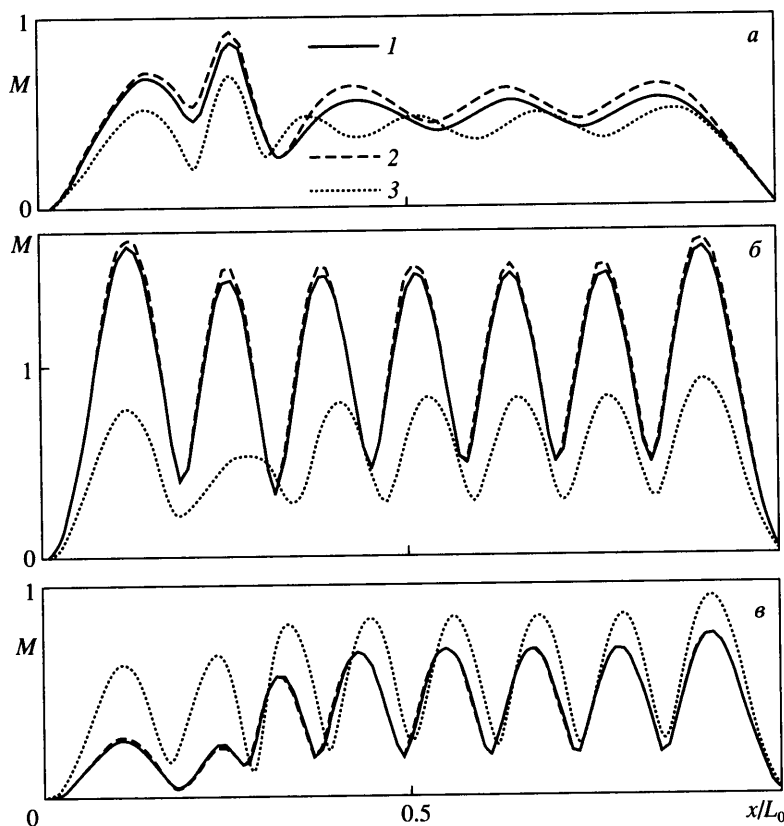
Фиг. 3. Распределения амплитуд прогиба пластины и момента для периодов: 1, 2 – $T_p = 0.75, 0.65$ с при тех же условиях, что на фиг. 2; I – с учетом осадки, II – без учета осадки, III – высокочастотное приближение

ее приложения. При высоких частотах отраженные волны велики, согласование фаз этих волн на частотах рассеяния и создает явление резонанса.

Распределение амплитуд колебаний пластины при различных периодах внешней нагрузки показано на фиг. 2. При больших периодах амплитуды вынужденных колебаний максимальны вблизи области приложения нагрузки, амплитуды краев малы. С уменьшением периода амплитуды краев растут и постепенно становятся значительно больше, чем амплитуды средней части пластины. При этом растет количество горбов и впадин в средней части пластины. Похожим образом ведут себя и амплитуды безразмерного момента на пластине.

Из графиков на фиг. 3 следует, что при малых периодах колебаний влияние осадки мало, а высокочастотное приближение можно успешно использовать для расчета амплитуд колебаний пластины. При частотах нагрузки, равных частотам рассеяния, для которых амплитуды колебаний максимальны, различие кривых меньше, чем на частотах, соответствующих минимальным прогибам. Отметим, что на частотах рассеяния наблюдаемая картина волн в пластине более регулярная, так как амплитуды волн, отраженных от краев, максимальны и фазы их согласованы.

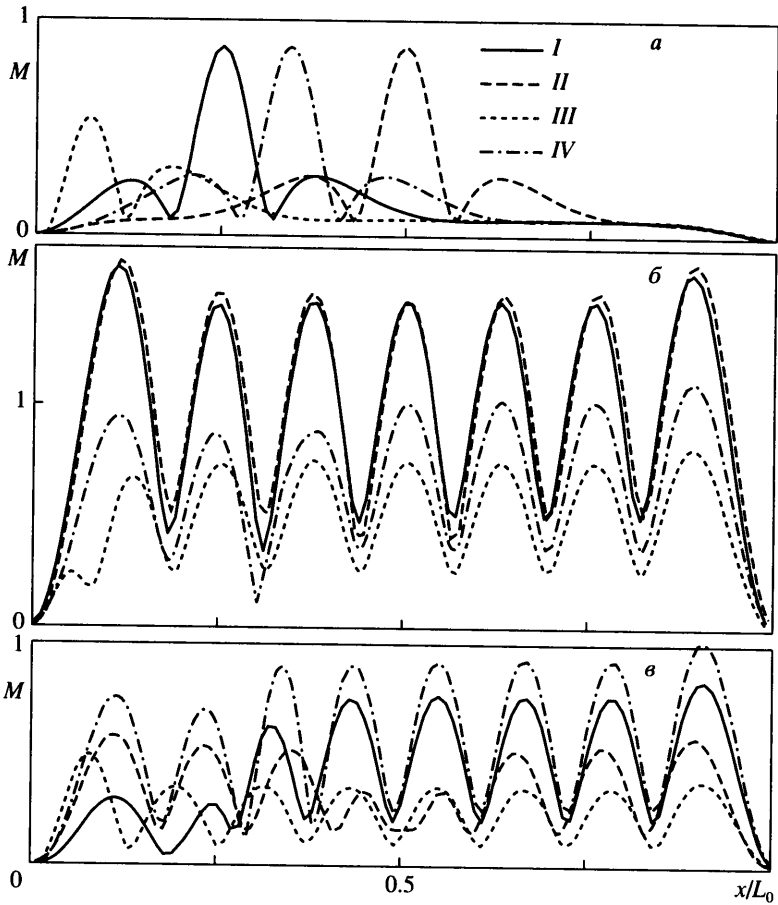
На фиг. 4 показано влияние глубины жидкости на амплитуды безразмерного изгибающего момента на пластине при различных периодах колебаний внешней нагрузки. Из графика видно, что влияние глубины существенно при больших периодах колебаний. При уменьшении периода ее воздействие снижается, амплитуды колебаний достаточно быстро достигают асимптотических значений, соответствующих бесконечно глубокой жидкости. Аналогично ведут себя и графики амплитуд прогиба пластины.



Фиг. 4. Влияние глубины жидкости на амплитуды момента M для $x_0 = L_0/4$, $s = 0.5$ м при периодах: а-в – $T_p = 1.4, 0.75, 0.5$ с; 1-3 – $H_0 = 0.5, 1.1, 10$ м

На фиг. 5 представлены амплитуды безразмерных моментов для различных положений действующей нагрузки при периодах колебаний $T_p = 3, 0.75, 0.65$ с. Зависимость распределения амплитуд колебаний пластины от положения центра нагрузки наиболее сильно проявляется при малых частотах, когда амплитуды волн, отраженных от краев, малы. При малых частотах амплитуды колебаний максимальны вблизи области приложения нагрузки. С ростом частоты отраженные от краев волны влияют все больше, особенно сильно они проявляют себя на резонансных частотах. На этих частотах положение центра нагрузки становится менее существенным параметром. Усиление колебаний зависит от того, попадает область приложения нагрузки в пучность или во впадину. При больших частотах, отличных от резонансных, вблизи области приложения нагрузки регулярность волновой картины нарушается. Аналогичным образом ведут себя и кривые амплитуд прогиба пластины.

Распределения амплитуд колебаний жидкости и пластины от ширины области приложения нагрузки достаточно сложны. В большой степени они зависят от значения A_0 . Именно эта величина определяет амплитуду мод, распространяющихся в пластине от области приложения нагрузки, и соответственно отраженных волн от краев. График функции $|A_0|$ от площади приложенной нагрузки s на фиг. 6, а при $\omega = 0.5$ с⁻¹, $H_0 = 1.1$ немонотонен. Первый корень соответствует значению $s = 1.482$ м, при котором колебания пластины носят локализованный характер. Амплитуды распространяющихся



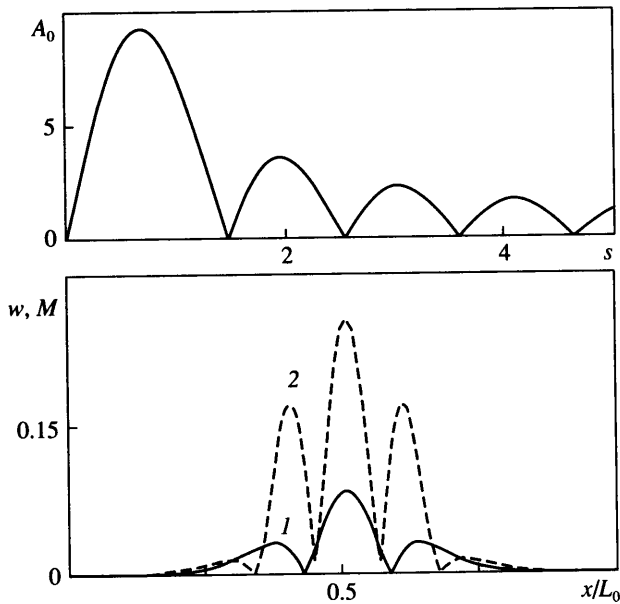
Фиг. 5. Амплитуды моментов M для различных положений действующей нагрузки при периодах колебаний: а-в - $T_p = 3, 0.75, 0.65$ с; I-IV - $x_0/L_0 = 0.06, 1/4, 1/3, 1/2$; $H_0 = 1.1$ м, $s = 0.5$ м

мод равны нулю, жидкость покоится, а колебания пластины представляют собой стоячие волны вблизи области приложения нагрузки.

Заключение. Метод Винера – Хопфа применен для задачи о вынужденных колебаниях плавающей упругой пластины под действием периодической нагрузки. Решение строится как без учета осадки, так и с учетом ее. Результаты расчетов хорошо согласуются с результатами других авторов. В явном виде получено высокочастотное приближение, дающее хорошее соответствие с расчетами по полной модели.

Проведено численное исследование влияния периода и характера действующей нагрузки, а также глубины жидкости на амплитуды колебаний для модельной пластины, используемой в экспериментах. Показано, что влияние осадки мало. При больших значениях частот рассеяния отмечается резонансное усиление колебаний пластины и жидкости. При малых значениях частот отраженные от краев волны невелики, колебания сосредоточены в основном вблизи области приложения нагрузки, поэтому резонансное усиление не наблюдается.

Влияние глубины существенно при малых частотах действующей нагрузки, а при больших значениях частоты решение достаточно быстро достигает асимптотических



Фиг. 6. Зависимость величины $|A_0|$ (а) от площади нагрузки s при $\omega = 0.5 \text{ с}^{-1}$, $H_0 = 1.1 \text{ м}$ и локализованные колебания пластины (б) при $s = 1.482 \text{ м}$, $x_0 = L_0/2$: 1, 2 – амплитуды прогиба пластины w и момента M

значений, соответствующих бесконечно глубокой жидкости, и уже практически не зависит от глубины.

Исследовано влияние положения центра нагрузки на амплитуды колебаний пластины. Наиболее сильно оно проявляется при малых частотах, когда амплитуды волн, отраженных от краев, незначительны. На этих частотах амплитуды колебаний максимальны вблизи области приложения нагрузки. С ростом частоты отраженные от краев волны влияют все больше, особенно сильно они проявляют себя на резонансных частотах. Усиление колебаний зависит от того, попадает область приложения нагрузки в пучность или во впадину.

Обнаружены условия, при которых волны в жидкости не распространяются, а колебания пластины локализованы вблизи области действующей нагрузки и представляют собой стоячие волны.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (№ 02-01-00739) и программы ведущих научных школ № НШ-902.2003.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967. 215 с.
2. Черкесов Л.В. Поверхностные и внутренние волны. Киев: Наук. думка, 1973. 247 с.
3. Squire V.A., Hosking R.J., Kerr A.D., Langhorne P.J. Moving Loads on Ice Plates. Dordrecht: Kluwer, 1996. 244 p.
4. Стурова И.В. Воздействие периодических поверхностных давлений на плавающую упругую платформу // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 1. С. 75–86.
5. Ткачева Л.А. Плоская задача о колебаниях плавающей упругой пластины под действием периодической внешней нагрузки // ПМТФ. 2004. Т. 45. № 3. С. 136–145.
6. Meylan M. The forced vibrations of a thin plate floating on an infinite liquid // J. Sound Vibrat. 1997. V. 205. № 5. P. 581–591.

7. *Kashivagi M.* Research on hydroelastic responses of VLFS: Recent progress and future work // *J. Offshore and Polar Engng.* 2000. V. 10. № 2. P. 81–90.
8. *Wu C., Watanabe E., Utsunomiya T.* An eigenfunction expansion-matching method for analyzing the wave-induced responses of an elastic floating plate // *Appl. Ocean Res.* 1995. V. 17. № 5. P. 301–310.
9. *Fox C., Squire V.A.* Reflection and transmission characteristics at the edge of shore fast sea ice // *J. Geophys. Res.* 1990. V. 95. № C7. P. 11.629–11.639.
10. *Нобл Б.* Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
11. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. 470 с.
12. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
13. *Ткачева Л.А.* Плоская задача о дифракции поверхностных волн на упругой плавающей пластине // *Изв. РАН. МЖГ.* 2003. № 3. С. 131–149.
14. *Meylan M.* An application of scattering frequencies to hydroelasticity // *Proc. 11th Intern. Offshore and Polar Engng. Conf.* 2001. Cupertino (Calif.) V. 3. P. 385–391.
15. *Meylan M.* Computation of resonances for a floating one dimensional thin plate on shallow water // *Proc. 3rd Intern. Conf. on Hydroelasticity in Marine Technology.* Oxford: Univ. Oxford, 2003. P. 251–258.
16. *Хабхнашева Т.И.* Дифракция поверхностных волн на плавающей упругой пластине // Совместный выпуск по материалам междунар. конф. “Вычислительные технологии и математическое моделирование в науке, технике и образовании”. Алма-Ата. 2002. Вычислительные технологии. Т. 7. Вестн. КазНУ № 4 (32). 2002. С. 232–239.

Новосибирск
E-mail: tkacheva@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию
10.XII.2003