МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 2005

УДК 532.516:534.12

© 2005 г. А. А. ИВАНОВА, В. Г. КОЗЛОВ, А. К. КОЛЕСНИКОВ

ВЛИЯНИЕ ВРАЩЕНИЯ НА ВИБРОКОНВЕКТИВНУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ СЛОЯ ЖИДКОСТИ С ВНУТРЕННИМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ

Теоретически исследуется устойчивость равновесия горизонтального слоя жидкости с однородным внутренним тепловыделением в случае, когда слой одновременно совершает высокочастотные круговые вибрации в горизонтальной плоскости и вращается вокруг вертикальной оси. Частота вращения предполагается малой по сравнению с частотой вибраций. Обнаружено, что вращение оказывает стабилизирующее действие на вибрационно-гравитационную конвективную устойчивость. В пределе высоких частот получена зависимость критического значения управляющих параметров (гравитационного и вибрационного чисел Рэлея) и волнового числа от частоты вращения.

Ключевые слова: тепловая конвекция, вращение, вибрации, устойчивость.

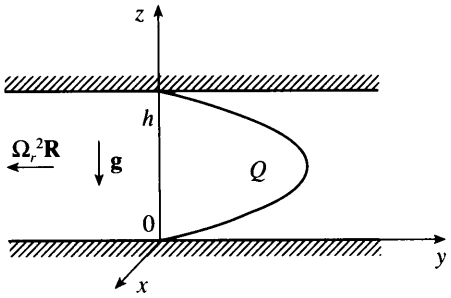
Свободная тепловая конвекция во вращающихся системах исследуется давно (обзор работ можно найти в [1, 2]), а вот вибрационная конвекция (см. [3]) при вращении до сих пор не изучалась. Теоретическое описание вибрационной тепловой конвекции во вращающейся полости дано в работе [4], где показано, что вращение вносит качественные изменения в конвекцию. Важную роль при этом играет сила Кориолиса, которая не только влияет на виброконвективные потоки, но существенно определяет пульсационное поле скорости, воздействуя на сам механизм осредненной конвекции. Из этого следует, что вращение может быть важным управляющим фактором в вибрационной тепловой конвекции.

Пример вибрационного подхода к конвекции при вращении – задача о тепловой конвекции в полости, вращающейся в поле силы тяжести вокруг горизонтальной оси [5, 6]. В этом случае осцилляции жидкости в системе отсчета полости вызываются статическим полем.

В настоящей работе теоретически исследуется виброконвективная устойчивость равновесия во вращающемся горизонтальном слое жидкости с внутренним тепловыделением.

1. Постановка задачи. Рассмотрим горизонтальный слой жидкости, ограниченный параллельными изотермическими плоскостями $z = 0$ и $z = h$, поддерживаемыми при одинаковой постоянной температуре (фиг. 1). В жидкости однородно по объему распределены внутренние источники тепла с удельной мощностью тепловыделения Q (на практике такой разогрев может происходить в результате химических или ядерных реакций, пропускания электрического тока, поглощения лучистой энергии и т.п.). В отсутствие конвекции распределение температуры в слое определяется молекулярным теплопереносом и имеет вид $T_0 = (Q/2\lambda)z(h - z)$, где λ – коэффициент теплопроводности жидкости.

Пусть помимо статического поля силы тяжести на жидкость действуют переменное силовое поле горизонтального направления, вращающееся в системе отсчета полости с высокой частотой Ω_v, и одновременно слой равномерно вращается вокруг оси z с постоянной угловой скоростью $\mathbf{\Omega}_r = \Omega_r\gamma$ ($\boldsymbol{\gamma}$ – единичный вектор, направленный вверх). Инерционное поле $\mathbf{g}_v = g_v(\cos\Omega_v t\mathbf{i} + \sin\Omega_v t\mathbf{j})$ создается вибрациями круговой поляриза-



Фиг. 1. Постановка задачи; Q – удельная мощность внутреннего тепловыделения, $\mathbf{g}$ – поле силы тяжести, $\Omega_r^2\mathbf{R}$ – центробежное силовое поле

ции. Частота вибраций предполагается высокой $\Omega_\upsilon h^2/\nu \gg 1$ (ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости).

В такой постановке тепловая конвекция неизотермической жидкости обусловлена действием статического поля силы тяжести (гравитационная конвекция), действием сил инерции, связанных с равномерным вращением (центробежное силовое поле и сила Кориолиса), и осредненным действием осциллирующего инерционного поля (вибрационная конвекция).

Отношение центробежного поля к гравитационному определяется параметром $\Omega_r^2 R/g$, где R – расстояние от оси вращения. Предполагая $h \ll R$, рассмотрим область слоя на таком расстоянии от оси, когда влиянием центробежной силы инерции можно пренебречь, т.е. при условии $\boldsymbol{\Omega}_r^2 R \ll g$. При этом вибрационная тепловая конвекция во вращающейся полости с внутренним разогревом жидкости описывается системой уравнений в безразмерном виде [4]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\frac{1}{\mathrm{Pr}}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p+\Delta\mathbf{v}+\mathrm{Ra}T\boldsymbol{\gamma}+2\omega(\mathbf{v}\times\mathbf{k})+ \\ &+R_\upsilon((\mathbf{w}_1\nabla)(T\mathbf{i}-\mathbf{w}_1)+(\mathbf{w}_2\nabla)(T\mathbf{j}-\mathbf{w}_2)) \\ &\mathrm{Pr}\frac{\partial T}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla T) = \Delta T+1 \\ &\mathrm{div}\mathbf{v} = 0,\quad \mathrm{div}\mathbf{w}_1 = 0,\quad \mathrm{div}\mathbf{w}_2 = 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

В систему (1.1) входят давление p, температура T, осредненная скорость $\mathbf{v}$ и дополнительные векторные переменные $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$, характеризующие осцилляционную компоненту скорости, появляющуюся под действием высокочастотного осциллирующего в системе отсчета полости силового поля. Переменные $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$ определяются распределением температуры и связаны друг с другом вследствие действия силы Кориолиса:

$$\mathrm{rot}\mathbf{w}_1 = \nabla T\times\mathbf{i}+2\frac{\Omega_r}{\Omega_\upsilon}\frac{\partial\mathbf{w}_2}{\partial y},\quad \mathrm{rot}\mathbf{w}_2 = \nabla T\times\mathbf{k}-2\frac{\Omega_r}{\Omega_\upsilon}\frac{\partial\mathbf{w}_1}{\partial y} \tag{1.2}$$

Единицами измерения длины, времени, скорости, давления и температуры служат толщина слоя h, h^2/ν, χ/h, $\rho\nu\chi/h^2$ и $Qh^2/\rho c_p$, где χ и c_p – коэффициенты температуропроводности и удельной теплоемкости.

Границы слоя предполагаются твердыми и изотермическими, на них выполняется условие прилипания, температура считается равной нулю, для переменных $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$ выполняется условие отсутствия нормальной к границе компоненты:

$$z = 0, z = 1: \mathbf{v} = 0, \quad T = 0, \quad w_{1z} = w_{2z} = 0 \tag{1.3}$$

Система уравнений (1.1), (1.2) содержит пять безразмерных параметров:

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\chi}, \quad \omega = \frac{\Omega_r h^2}{\nu}, \quad \frac{\Omega_\upsilon}{\Omega_r}, \quad \text{Ra} = \frac{g\beta Q h^5}{\rho c_p \nu \chi^2}, \quad \text{R}_\upsilon = \frac{(g_\upsilon \beta Q h^3)^2}{2\rho^2 c_p^2 \Omega_\upsilon^2 \nu \chi^3}$$

где Pr – число Прандтля, ω – безразмерная частота вращения слоя, Ω_υ/Ω_r – относительная частота вибраций, Ra – гравитационное число Рэлея, рассчитанное по мощности удельного внутреннего тепловыделения Q, R_υ – вибрационный параметр.

Остановимся на предельном случае медленного по сравнению с частотой вибраций вращения, $\Omega_\upsilon \gg \Omega_r$. При этом система уравнений упрощается, уравнения (1.2) принимают вид:

$$\text{rot}\mathbf{w}_1 = \nabla T \times \mathbf{i}, \quad \text{rot}\mathbf{w}_2 = \nabla T \times \mathbf{j} \tag{1.4}$$

Полученная в приближении медленного вращения система (1.1), (1.4), за исключением дополнительных членов, учитывающих действие силы Кориолиса на осредненные потоки, совпадает с системой уравнений вибрационной тепловой конвекции в полости, совершающей колебания сферического маятника [7]. (Совпадение с точностью до формы записи и после ряда упрощений, связанных с исключением слагаемых, учитывающих непоступательный характер колебаний.)

2. Устойчивость квазиравновесия. Условие механического квазиравновесия, когда среднее движение жидкости в слое отсутствует, вытекает из уравнений (1.1), (1.4):

$$\begin{gathered}
[\text{R}_\upsilon \nabla(\mathbf{w}_{01}\mathbf{i} + \mathbf{w}_{02}\mathbf{j}) - \text{Ra}\boldsymbol{\gamma}] \times \nabla T_0 = 0 \\
\text{rot}\mathbf{w}_{01} = \nabla T_0 \times \mathbf{i}, \quad \text{rot}\mathbf{w}_{02} = \nabla T_0 \times \mathbf{j} \\
\Delta T_0 = -1, \quad \text{div}\mathbf{w}_{01} = 0, \quad \text{div}\mathbf{w}_{02} = 0
\end{gathered} \tag{2.1}$$

На границах слоя обращается в нуль нормальная компонента пульсационной составляющей скорости, представленной векторами $\mathbf{w}_{01}$ и $\mathbf{w}_{02}$, и считается заданным температурное распределение.

В слое жидкости с внутренним тепловыделением с границами одинаковой температуры квазиравновесному состоянию соответствуют следующие распределения температуры и пульсационной компоненты скорости:

$$T_0 = \frac{1}{2}z(1-z), \quad \mathbf{w}_{01} = \frac{1}{12}(-1+6z-6z^2)\mathbf{i}, \quad \mathbf{w}_{02} = \frac{1}{12}(-1+6x-6z^2)\mathbf{j} \tag{2.2}$$

Векторы $\mathbf{w}_{01}$ и $\mathbf{w}_{02}$ равны по величине и взаимно перпендикулярны. Под действием поля круговой поляризации нормальные оси вращения слои жидкости совершают плоскопараллельные круговые колебания в направлении вращения силового поля. Амплитуда колебаний зависит от координаты z и определяется распределением температуры.

Рассмотрим задачу устойчивости квазиравновесия для условий (2.2). Введем малые возмущения температуры T, давления p', осредненной скорости $\mathbf{v}'$ и пульсационных компонент скорости $\mathbf{w}'_1$ и $\mathbf{w}'_2$. После подстановки возмущений в (1.1) и линеаризации получим систему:

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\nabla p' + \Delta \mathbf{v}' + \mathrm{Ra}T'\boldsymbol{\gamma} + 2\omega(\mathbf{v}' \times \mathbf{k}) +$$

$$+ \mathrm{R}_\upsilon((\mathbf{w}_{01}\nabla)(T'\mathbf{i} - \mathbf{w}'_1) + (\mathbf{w}'_1\nabla)(T_0\mathbf{i} - \mathbf{w}_{01})) +$$

$$+ \mathrm{R}_\upsilon((\mathbf{w}_{02}\nabla)(T'\mathbf{j} - \mathbf{w}'_2) + (\mathbf{w}'_2\nabla)(T_0\mathbf{j} - \mathbf{w}_{02}))$$

$$\mathrm{Pr}\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{v}'\nabla T_0 = \Delta T' \tag{2.3}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{w}'_1 = \nabla T' \times \mathbf{i}, \quad \mathrm{rot}\mathbf{w}'_2 = \nabla T' \times \mathbf{j}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{v}' = 0, \quad \mathrm{div}\mathbf{w}'_1 = 0, \quad \mathrm{div}\mathbf{w}'_2 = 0$$

Рассмотрим нормальные возмущения

$$(\mathbf{v}, T', \mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2) = (\mathbf{v}, T, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)\exp(ik_1x + ik_2y - \lambda t)$$

Ограничимся случаем монотонных возмущений, порог нарастания которых определяется условием $\lambda = 0$. После преобразований, связанных с понижением числа переменных, и замены $w = -(ik_1w_{1z} + ik_2w_{2z})/k^2$ получим краевую задачу:

$$\Delta\Delta\upsilon - \mathrm{Ra}k^2T + \mathrm{R}_\upsilon k^2 T'_0(T + w') - 2\omega F' = 0$$

$$\Delta T - T'_0\upsilon = 0; \quad \Delta F + 2\omega\upsilon' = 0; \quad T' + \Delta w = 0 \tag{2.4}$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2, \quad (\cdot)' \equiv \frac{\partial}{\partial z}$$

$$z = 0, \quad z = 1: \upsilon = \upsilon' = w = T = F = 0 \tag{2.5}$$

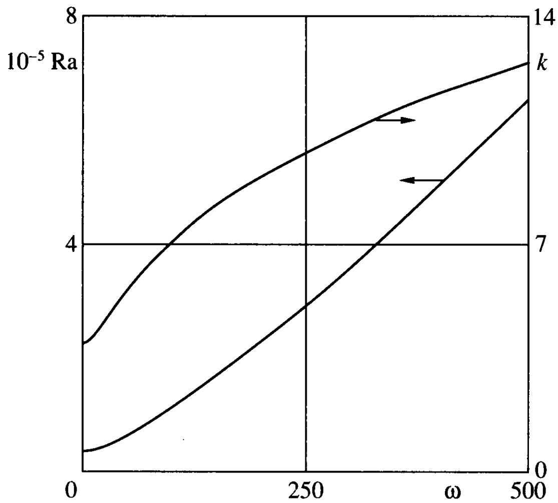
Здесь υ и F – z-компоненты вектора возмущения скорости и его ротора.

В отсутствие вращения полости, $\omega = 0$, когда сила Кориолиса не действует на осредненное течение, задача (2.4), (2.5) совпадает с задачей устойчивости равновесия при круговых вибрациях плоского слоя [7] (за исключением равновесного температурного распределения T_0, которое в рассматриваемом случае определяется внутренним тепловыделением). Здесь также наблюдается вырождение по форме возмущений: в краевую задачу входит только квадрат волнового вектора $k^2 = k_1^2 + k_2^2$, а соотношение между его компонентами k_1 и k_2 остается произвольным.

Краевая задача (2.4) с граничными условиями (2.5) решается методом Рунге–Кутты.

3. Результаты исследования. Рассмотрим устойчивость квазиравновесия во вращающемся слое, когда термоконвективные гравитационный и вибрационный механизмы проявляются независимо.

Гравитационная конвекция ($\mathrm{R}_\upsilon = 0$). В отсутствие вибраций вращение стабилизирует конвективную устойчивость слоя: граница устойчивости повышается с безразмерной частотой (фиг. 2). Волновое число, соответствующее минимуму нейтральной кривой устойчивости, также монотонно возрастает. Это качественно согласуется с ре-



Фиг. 2. Граница возбуждения гравитационной конвекции Ra и соответствующее минимуму устойчивости волновое число k в зависимости от безразмерной частоты вращения $\omega = \Omega_r h^2/\nu$ в отсутствие вибраций

зультатами [1], где рассматривается влияние вращения на конвективную устойчивость жидкости в горизонтальном слое с границами различной температуры.

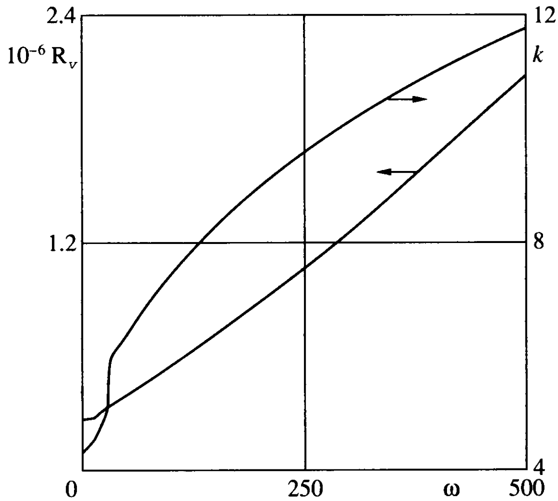
В отсутствие вращения ($\omega = 0$) пороговое значение числа Рэлея Ra* и волновое число опасных возмущений k^* составляют $\mathrm{Ra}^* = 3.76 \cdot 10^4$, $k^* = 4$, что также согласуется с [1].

Вибрационная конвекция (Ra = 0). В отсутствие статического поля действие равномерного вращения на границу возбуждения вибрационной тепловой конвекции аналогично гравитационному случаю. Вращение приводит к монотонному повышению критического значения вибрационного параметра R_υ^* и волнового числа k^*, соответствующего минимуму устойчивости (фиг. 3).

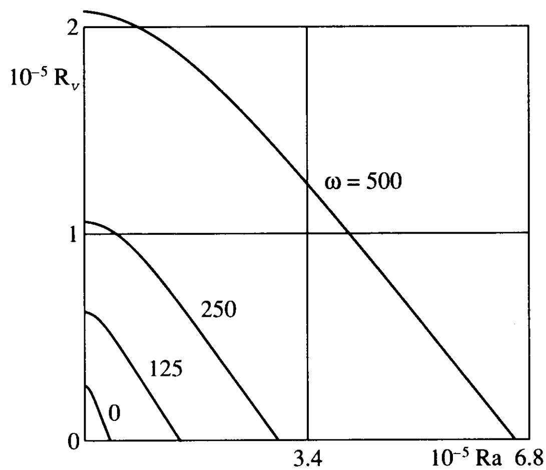
В отсутствие вращения критические значения $\mathrm{R}_\upsilon^* = 2.69 \cdot 10^5$ и $k^* = 4.3$ согласуются с результатами исследования осредненной конвекции в слое с внутренним тепловыделением при поступательных вибрациях линейной поляризации [8].

Обращает на себя внимание немонотонный характер изменения кривой $k^*(\omega)$ в области частот $\omega \approx 30$ (фиг. 3). Из сравнения нейтральных кривых устойчивости, построенных для различных значений частоты ω [9], следует, что скачкообразное возрастание критического волнового числа объясняется сменой мод, отвечающих за возбуждение вибрационной тепловой конвекции. В отсутствие вращения существуют два близких по величине уровня, причем нижнее положение занимает тот уровень, минимум которого соответствует меньшему значению k. С повышением ω обе нейтральные кривые поднимаются, но с различной скоростью, поэтому происходит их перезамыкание: при частоте $\omega \approx 30$ минимум нейтральной кривой скачком смещается в область более высоких значений k. Такое поведение нейтральных кривых с частотой объясняется стабилизирующим действием вращения, которое в первую очередь сказывается на длинноволновых возмущениях.

Вибрационно-гравитационная конвекция. При одновременном действии статического поля и вибраций (в нашем случае – горизонтальный слой, круговые вибрации в плоскости, перпендикулярной градиенту температуры) гравитационный и вибрационный механизмы независимо приводят к развитию конвекции, усиливая друг друга



Фиг. 3. Граница возбуждения вибрационной конвекции $R_v(\omega)$ и волновое число наиболее опасных возмущений $k(\omega)$ в отсутствие силы тяжести

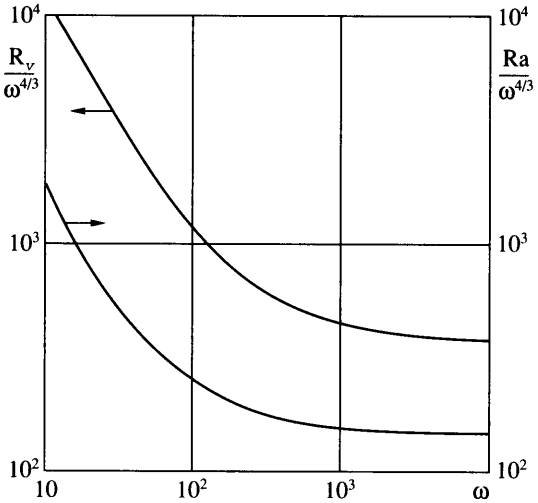


Фиг. 4. Семейство пороговых кривых устойчивости, соответствующих различным значениям безразмерной частоты вращения ω

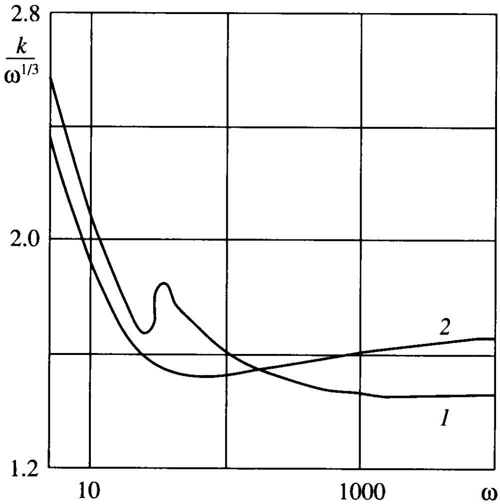
(фиг. 4). Вращение слоя приводит к стабилизации равновесия и монотонному смещению границы устойчивости с частотой в область более высоких значений параметров.

Задача о тепловой конвекции в слое при вибрациях круговой поляризации в отличие от вибраций одного направления обладает симметрией. В плоском слое [4, 7] осредненное действие вращающегося поля напоминает действие однородного гравитационного поля. В частности, наблюдается вырождение по форме возмущений: в краевую задачу входит только квадрат волнового вектора, а соотношение между его компонентами остается произвольным.

В отсутствие вращения краевые задачи виброконвективной устойчивости при поступательных вибрациях как круговой, так и линейной поляризации совпадают: сравне-



Фиг. 5. Зависимость пороговых значений комплексов $Ra/\omega^{4/3}$ и $R_\upsilon/\omega^{4/3}$ от безразмерной частоты вращения

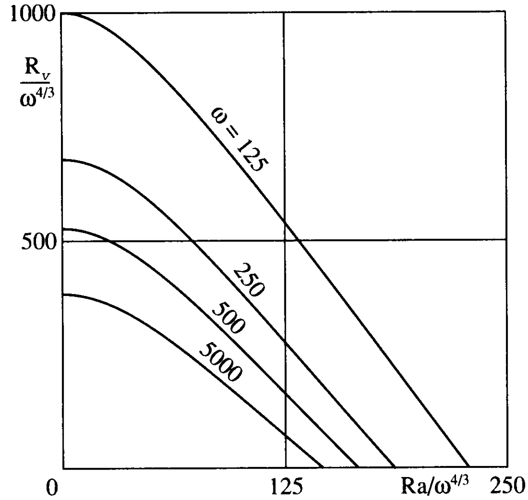


Фиг. 6. Зависимость порогового значения комплекса $k/\omega^{1/3}$ от безразмерной частоты вращения в случае гравитационной (*1*) и термовибрационной (*2*) конвекции

ние кривой устойчивости (фиг. 4, $\omega = 0$) с результатами [8] показывает их полное согласие.

Высокочастотный предел вращения. Расчеты показывают, что в пределе высоких частот повышение границы виброконвективной устойчивости с частотой вращения происходит по закону $R_\upsilon^* \sim \omega^{4/3}$, волнового числа – по закону $k^* \sim \omega^{1/3}$. Таким образом, влияние вращения на устойчивость в случае вибрационной конвекции аналогично гравитационному случаю [1].

Рассмотрим комбинации параметров $Ra/\omega^{4/3}$, $R_\upsilon/\omega^{4/3}$, $k/\omega^{1/3}$ в зависимости от частоты (фиг. 5, фиг. 6). С повышением частоты вращения кривые асимптотически прибли-



Фиг. 7. Семейство пороговых кривых для различных значений ω на плоскости $Ra/\omega^{4/3}$, $R_\upsilon/\omega^{4/3}$

жаются к высокочастотным значениям $Ra^*/\omega^{4/3} = 148$ ($k^*/\omega^{1/3} = 1.68$) и $R_\upsilon^*/\omega^{4/3} = 376$ ($k^*/\omega^{1/3} = 1.46$). Видно, что показатели степени в зависимостях R_υ^* и Ra^* от частоты в предельном случае $\omega \gg 1$ совпадают. То же можно сказать о зависимостях волновых чисел от частоты, $k^*(\omega)$.

При одновременном действии гравитационного и вибрационного механизмов можно построить асимптотическую границу устойчивости на плоскости параметров $Ra/\omega^{4/3}$, $R_\upsilon/\omega^{4/3}$ (фиг. 7). С частотой вращения пороговые кривые приближаются к предельному значению (кривая $\omega = 5000$ близка к предельной).

Таким образом, исследования выявили идентичное влияние вращения на вибрационную и гравитационную конвекцию – новую общую черту этих столь различных по своей природе термоконвективных механизмов.

Заключение. Теоретически изучено влияние вращения на конвективную устойчивость горизонтального плоского слоя жидкости с внутренним тепловыделением при одновременном действии гравитационного и вибрационного механизмов.

Обнаружена стабилизирующая роль вращения в виброконвективной устойчивости, аналогичная гравитационному случаю.

Для высокочастотного предела найдены зависимости критических значений управляющих параметров, гравитационного и вибрационного чисел Рэлея и волнового числа от частоты вращения: $Ra^* \sim \omega^{4/3}$, $R_\upsilon^* \sim \omega^{4/3}$ и $k^* \sim \omega^{1/3}$.

На плоскости параметров $Ra/\omega^{4/3}$, $R_\upsilon/\omega^{4/3}$ построена пороговая кривая устойчивости относительно монотонных возмущений, соответствующая пределу высоких частот вращения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 03-01-00552).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

2. *Яворская И.М., Беляев Ю.Н.* Конвективные течения во вращающихся слоях // Итоги науки и техники. Сер. МЖГ. М.: ВИНИТИ, 1984. Т. 17. С. 3–85.
3. *Gershuni G.Z., Lyubimov D.V.* Thermal vibrational convection. N.Y.: Wiley, et al., 1998. 358 p.
4. *Козлов В.Г.* Вибрационная тепловая конвекция во вращающихся полостях // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 1. С. 5–14.
5. *Иванова А.А., Козлов В.Г., Рылова В.В.* Тепловая конвекция в плоском слое, вращающемся вокруг горизонтальной оси // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 1. С. 12–21.
6. *Герценштейн С.Я., Рахманов А.И.* Конвекция в плоском слое жидкости, вращающемся вокруг горизонтальной оси // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269. № 3. С. 561–564.
7. *Козлов В.Г.* О вибрационной конвекции в полости, совершающей пространственные маятниковые качания // Конвективные течения. Пермь, 1989. С. 19–27 (Переведено: Heat Transfer – Soviet Research, 1991. V. 23. № 7. P. 999–1008).
8. *Gershuni G.Z., Zhukhovitsky E.M., Kolesnikov A.K., Yurkov Yu.S.* Vibrational convection in a horizontal layer with internal heat sources // Int. J. Heat and Mass Transfer. 1989. V. 32. № 12. P. 2319–2328.
9. *Иванова А.А., Колесников А.К.* Виброконвективная неустойчивость слоя жидкости с внутренним тепловыделением при вращении // Конвективные течения... Пермь, 2003. С. 50–61.

Пермь
E-mail: A.Ivanova@pspu.ac.ru

Поступила в редакцию
5.IV.2004