

УДК 532.5.031:533.697

© 2005 г. В. Б. КУРЗИН, А. С. ТОЛСТУХА

К РАСЧЕТУ НЕСТАЦИОНАРНЫХ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВРАЩАЮЩЕЙСЯ РЕШЕТКИ КОЛЕБЛЮЩИХСЯ ЛОПАСТЕЙ В ПОТОКЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Численно определены нестационарные аэродинамические характеристики пространственных решеток лопастей, колеблющихся в потоке несжимаемой жидкости, с учетом телесности лопастей и влияния стационарных гидродинамических нагрузок на них. В предположении о безотрывности обтекания и о гармоническом характере колебаний лопастей в линейной постановке соответствующая краевая задача относительно амплитудной функции нестационарной составляющей потенциала скорости течения решена методом конечных элементов. Представлены результаты тестовых расчетов и приведен пример определения нестационарных аэродинамических характеристик модели реальной гидротурбины.

Ключевые слова: решетка, лопасть, колебания, аэродинамика, несжимаемая жидкость.

Определение нестационарных аэродинамических характеристик решеток колеблющихся лопастей представляет собой актуальную задачу, решение которой необходимо для анализа возможности возникновения флаттера решеток турбомашин, а также для расчета уровня динамических напряжений в лопастях при их обтекании неравномерным потоком. В трехмерной постановке эта задача достаточно хорошо изучена лишь для случая колебаний слабонагруженных и тонких лопастей, моделируемых несущими поверхностями [1–5].

Данная работа посвящена созданию метода расчета нестационарных аэродинамических характеристик пространственной вращающейся решетки колеблющихся лопастей при безотрывном ее обтекании несжимаемой жидкостью с учетом телесности лопастей и стационарной аэродинамической их нагрузки.

1. Постановка задачи. Рассмотрим обтекание вращающейся решетки колеблющихся лопастей потоком идеальной несжимаемой жидкости. В инерциальной системе отсчета оно описывается уравнением движения и уравнением неразрывности

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla P = 0, \quad \rho = \text{const}$$

$$\text{div } \mathbf{V} = 0$$

где $\mathbf{V}(x, y, z, t)$ – вектор абсолютной скорости движения жидкости в некоторой неподвижной системе координат x, y, z , ось x которой направлена вдоль оси решетки; ρ и P – плотность и давление жидкости.

В предположении о безотрывном характере обтекания при равномерном набегающем потоке в неподвижной системе отсчета течение жидкости всюду, вне вихревых поверхностей, сбегających с кромок лопастей, будет потенциальным, т.е.

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\infty} + \nabla \Phi \tag{1.1}$$

где Φ – потенциал скорости возмущенной составляющей течения жидкости.

Введем цилиндрическую систему координат (r_1, θ, x) , жестко связанную с вращающейся решеткой. Относительная скорость жидкости \mathbf{W} в этой системе координат будет равна

$$\mathbf{W} = \mathbf{V} - \Omega \times \mathbf{r} \quad (1.2)$$

где Ω – вектор угловой скорости вращения решетки, \mathbf{r} – радиус-вектор положения движущейся частицы в подвижной системе отсчета, $r^2 = r_1^2 + x^2$.

Разложим вектор относительной скорости на стационарную и нестационарную составляющие

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_0(r_1, \theta, x) + \mathbf{w}(r_1, \theta, x, t) \quad (1.3)$$

Из (1.2) с учетом (1.1) и (1.3) найдем

$$\mathbf{W}_0 = \mathbf{V}_{-\infty} - \Omega \times \mathbf{r} + \nabla \Phi_0, \quad \mathbf{w} = \nabla \varphi \quad (1.4)$$

где Φ_0 и φ – стационарная и нестационарная составляющие потенциала скорости.

В введенной выше подвижной системе отсчета с учетом выражения для абсолютного ускорения в результате несложных преобразований получим аналог интеграла Коши – Лагранжа

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{W^2 - v_0^2}{2} + \frac{p}{\rho} = F(t)$$

$$v_0 = \Omega r_1$$

Для нестационарной составляющей давления p в линейном приближении это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{W}_0 \nabla \varphi + \frac{p}{\rho} = 0 \quad (1.5)$$

Рассматриваемое течение должно удовлетворять граничным условиям, формулирующимся ниже для подвижной системы отсчета, жестко связанной с вращающейся решеткой.

Условия непротекания. Представим условие непротекания жидкости через твердые поверхности проточной части турбомшины в виде

$$(\mathbf{W} - \mathbf{V}_s) \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{r} \in S^{(t)} \quad (1.6)$$

$$S^{(t)} = \sum_{n=0}^{N-1} S_n^{(t)} \cup \sum_{m=1}^2 S_m$$

где $S_n^{(t)}$ – мгновенное положение поверхностей колеблющихся лопастей решетки, S_m – поверхности канала проточной части, N – число лопастей решетки, \mathbf{V}_s, \mathbf{v} – скорость движения точек $S^{(t)}$ и орт нормали к ней в точке, положение которой определяется радиусом-вектором \mathbf{r} .

Представим радиус-вектор произвольной точки поверхности колеблющейся лопасти $S_n^{(t)}$ таким образом:

$$\mathbf{r}_n^{(t)} = \mathbf{r}_n^{(0)} + \varepsilon \mathbf{f}_n(\mathbf{r}_n^{(0)}, t), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.7)$$

где $\mathbf{r}_n^{(0)}$ – радиус-вектор соответствующей точки лопасти в среднем её положении $S_n^{(0)}$; \mathbf{f}_n – вектор, определяющий колебательное движение этой точки, нормированный как

$$\max\{|\mathbf{f}_n(\mathbf{r}_n^{(0)}, t)|/a\} = 1$$

где a – средняя хорда лопасти.

Введем предположения

$$\varepsilon \ll 1, \quad |\partial \mathbf{f}_n / \partial t| = O(1) \quad (1.8)$$

где $\partial/\partial t$ – производная по произвольному направлению.

Учитывая (1.3), (1.4) и (1.7), из (1.6) найдем

$$\begin{aligned} \nabla \varphi \cdot \mathbf{v}_m &= 0, \quad \mathbf{r} \in S_m, \quad m = 1, 2 \\ \left(\mathbf{W}_0 + \nabla \varphi - \varepsilon \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial t} \right) \mathbf{v}_n^{(t)} &= 0, \quad \mathbf{r}_n^{(t)} \in S_n^{(t)}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Для решения задачи об определении функции φ условие непротекания колеблющихся лопастей (1.9) удобно перенести с мгновенного их положения $S_n^{(t)}$ на среднее $S_n^{(0)}$, при котором происходит стационарное обтекание. С этой целью, согласно (1.8), возьмем величину ε в качестве малого параметра задачи и проведем линеаризацию условия (1.9), полагая

$$\mathbf{W}_0(\mathbf{r}_n^{(t)}) = \mathbf{W}_0(\mathbf{r}_n^{(0)}) + \varepsilon (\mathbf{f}_n \nabla) \mathbf{W}_0(\mathbf{r}_n^{(0)}) \quad (1.10)$$

$$\mathbf{v}_n^{(t)} = \mathbf{v}_n^{(0)}(\mathbf{r}_n^{(0)}) + \varepsilon \boldsymbol{\xi}_n(\mathbf{r}_n^{(0)}), \quad |\boldsymbol{\xi}| = O(1) \quad (1.11)$$

Здесь выражение (1.10) представляет собой первые два члена разложения функции \mathbf{W}_0 в ряд Тейлора, а (1.11) следует из (1.8).

Для определения $\boldsymbol{\xi}_n$ рассмотрим некоторую гладкую поверхность S_0 , смещенную в новое положение S так, что при выполнении условия типа (1.8), координаты соответствующих точек будут связаны между собой соотношением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r}_0 \in S_0, \quad \mathbf{r} \in S \quad (1.12)$$

Введем ортогональные криволинейные координаты (u_0, τ_0) поверхности S_0 и проведем через точку M_0 этой поверхности касательные к соответствующим координатным линиям $u_0 = c_{01}$, $\tau_0 = c_{02}$. Здесь единичные векторы \mathbf{i}_0 , \mathbf{j}_0 и \mathbf{v}_0 направлены по этим касательным и нормали к ним. Пусть указанные точка и координатные линии при перемещении поверхности S_0 положение S отображаются в точку M и линии $u(u_0) = c_1$, $\tau(\tau_0) = c_2$. Тогда орт нормали \mathbf{v} к S в точке M находится по формуле [6]

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_\tau}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_\tau|} \quad (1.13)$$

где \mathbf{r}'_u , \mathbf{r}'_τ – частные производные по координатам u , τ .

Воспользовавшись выражением (1.12), представим эти частные производные в виде

$$\mathbf{r}'_u = (\mathbf{r}'_{0,u_0} + \varepsilon \mathbf{f}'_{u_0}) u'_{0,u}, \quad \mathbf{r}'_\tau = (\mathbf{r}'_{0,\tau_0} + \varepsilon \mathbf{f}'_{\tau_0}) \tau'_{0,\tau}$$

Учитывая, что $\mathbf{r}'_{0,u_0} = \mathbf{i}_0$, $\mathbf{r}'_{0,\tau_0} = \mathbf{j}_0$, $\mathbf{i}_0 \perp \mathbf{j}_0 \perp \mathbf{v}_0$

найдем

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_\tau = [\mathbf{v}_0 + \varepsilon(\mathbf{i}_0 \times \mathbf{f}'_{\tau_0} - \mathbf{j}_0 \times \mathbf{f}'_{u_0})]u'_{0,u} \tau'_{0,\tau}$$

Подставляя это выражение в (1.13), из (1.11) получим

$$\xi = -\left(\mathbf{i}_0 \frac{\partial f_{v_0}}{\partial u_0} + \mathbf{j}_0 \frac{\partial f_{v_0}}{\partial \tau_0}\right) \quad (1.14)$$

Из (1.9) с учетом (1.10), (1.11) и (1.14) с точностью до величин первого порядка малости, найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial v_n^{(0)}} &= \varepsilon \left\{ \frac{\partial f_{nv_n^{(0)}}}{\partial t} + \mathbf{W}_0 \left[\mathbf{i}_n^{(0)} \frac{\partial f_{nv_n^{(0)}}}{\partial u_n^{(0)}} + \mathbf{j}_n^{(0)} \frac{\partial f_{nv_n^{(0)}}}{\partial \tau_n^{(0)}} \right] - \mathbf{v}_n^{(0)} (\mathbf{f}_n \nabla) \mathbf{W}_0 \right\} = \\ &= \varepsilon \left\{ \frac{\partial f_{nv_n^{(0)}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial u_n^{(0)}} (f_{nv_n^{(0)}} W_{0u_n^{(0)}}) + \frac{\partial}{\partial \tau_n^{(0)}} (f_{nv_n^{(0)}} W_{0\tau_n^{(0)}}) \right\} \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}_n^{(0)} \in S_n^{(0)}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Здесь учтено, что в идеальной несжимаемой жидкости $\text{div } \mathbf{W}_0 = 0$.

В предположении, что лопасти решетки совершают синхронные гармонические колебания с одинаковыми амплитудами и постоянным сдвигом фаз между колебаниями соседних лопастей $\mu_k = 2k\pi/N$ ($k = 0, 1 \dots N-1$), представим функции Φ и \mathbf{f}_n следующим образом

$$\Phi(\mathbf{r}^{(0)}, t) = \varepsilon \Phi(\mathbf{r}^{(0)}) e^{i\omega t}, \quad \mathbf{f}_n(\mathbf{r}_n^{(0)}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{r}_n^{(0)}) e^{i(\omega t + n\mu_k)} \quad (1.15)$$

где ω – круговая частота колебаний лопастей (в дальнейшем буквами Φ, p, v будем обозначать амплитудные функции нестационарных составляющих потенциала скорости, давления и скорости).

С учетом (1.15) полученные выше условия преобразуются к виду

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_n^{(0)}} = \left\{ i\omega f_{v_n^{(0)}} + \frac{\partial}{\partial u_n^{(0)}} (f_{v_n^{(0)}} W_{0u_n^{(0)}}) + \frac{\partial}{\partial \tau_n^{(0)}} (f_{v_n^{(0)}} W_{0\tau_n^{(0)}}) \right\} e^{in\mu_k} \quad (1.16)$$

$$\mathbf{r}_n^{(0)} \in S_n^{(0)}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Условия на вихревых поверхностях, сбегаящих с задних кромок лопастей. Вихревые частицы, сбегаящие с задних кромок лопастей, образуют вихревые поверхности, моделируемые поверхностями контактного разрыва $S_{nk}^{(t)}$. В линейной постановке задачи о нестационарном обтекании решетки эти поверхности располагаются на соответствующих поверхностях тока стационарного течения через решетку. На них должны выполняться условия

$$[p] = 0, \quad [(\nabla \Phi) \cdot \mathbf{v}_n] = 0, \quad \mathbf{r} \in S_{nk}^{(t)}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.17)$$

где \mathbf{v}_n – вектор нормали к $S_{nk}^{(t)}$, квадратными скобками обозначается скачок соответствующей функции при переходе через поверхность.

Условия на поверхностях канала проточной части и на бесконечности

$$(\nabla\varphi) \cdot \mathbf{v}_m = 0, \quad \mathbf{r} \in S_m, \quad m = 1, 2 \quad (1.18)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \nabla\varphi = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} p = 0 \quad (1.19)$$

Условия в окрестностях задних кромок лопастей. В предположении, что выходные кромки профилей лопастей являются точками возврата, согласно постулату Жуковского – Чаплыгина должно выполняться условие

$$\{\mathbf{W}(\mathbf{r}) - \mathbf{V}_s(\mathbf{r}_n)\} \cdot \mathbf{v}_n(\mathbf{r}_n) = 0, \quad \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_n, \quad \mathbf{r}_n \in S_n^{(t)}, \quad \mathbf{r}_n \rightarrow L_n^{(t)}, \quad x > \tilde{x}_n$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1$$

где \mathbf{v}_n – орт нормали к $S_n^{(t)}$, $L_n^{(t)}$ – контур задней кромки $S_n^{(t)}$, x, x'_n – проекции векторов \mathbf{r} и \mathbf{r}_n на ось абсцисс, неравенство для которых, указанное в условии, означает, что в отличие от условия непротекания (1.6) скорость течения $\mathbf{W}(\mathbf{r})$ берется в точках, расположенных за лопастью. При этом соответствующие радиусы-векторы должны удовлетворять дополнительным условиям $(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}) = \Delta\mathbf{r}_n \perp \mathbf{v}_n(\mathbf{r}_n)$, $\Delta\mathbf{r}_n \parallel \mathbf{V}_s(\mathbf{r}_n)$.

Учитывая непрерывность скорости течения вне вихревых поверхностей и проведя операцию переноса приведенных выше условий на среднее положение колеблющихся лопастей и вихревых пелен для условия непротекания, найдем

$$\frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial v_n^{(0)}(\mathbf{r}_n)} = v_{v_n^{(0)}}(\mathbf{r}_n) \quad (1.20)$$

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_n, \quad \mathbf{r}_n \in S_n^{(0)}, \quad \mathbf{r}_n \rightarrow L_n^{(0)}, \quad \mathbf{r} \in S_{nk}^{(0)}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

где $v_{v_n^{(0)}}$ – правая часть выражения (1.16) в точке \mathbf{r}_n .

С помощью решения сформулированной выше краевой задачи из интеграла Коши – Лагранжа (1.5), с учетом (1.7), (1.10) и (1.15), определим амплитудную функцию нестационарной составляющей гидродинамического давления, действующего на лопасти решеток

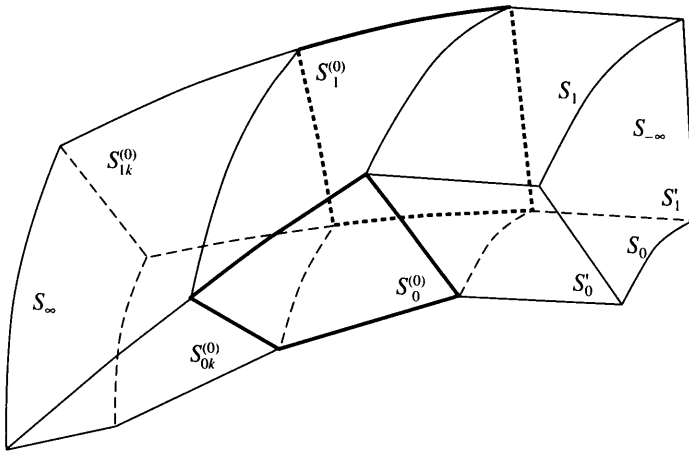
$$p(\mathbf{r}) = -\rho\{i\omega\varphi + \mathbf{W}_0 \nabla\varphi + \mathbf{W}_0(\mathbf{f}\nabla)\mathbf{W}_0 - \Omega^2 r_1 f_{r_1}\}, \quad \mathbf{r} \in S_0^{(t)} \quad (1.21)$$

Гидродинамические реакции лопастей, возникающие при их колебаниях в потоке, удобно представить в виде обобщенных гидродинамических сил [7]. В случае колебаний лопастей решетки по j -той собственной моде обобщенная гидродинамическая сила, действующая на n -ю лопасть, может быть представлена как

$$Q_{jk}^{(n)} = Q_{jk}^{(0)} e^{i(\omega t + n\mu_k)} \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (1.22)$$

$$Q_{jk}^{(0)} = \int_{S_0^{(0)}} p_{jk}(\mathbf{r}_0^{(0)}) f_{v_0^{(0)}}(\mathbf{r}_0^{(0)}) dS_0^{(0)}$$

где $f_{v_0^{(0)}}(\mathbf{r}_0^{(0)})$ – амплитудное значение проекций на нормаль к $S_0^{(0)}$ вектора-функции $\mathbf{f}_j(\mathbf{r}_0^{(0)})$, определяющей форму собственных колебаний лопастей по j -той моде.



Фиг. 1. Схема расчетной области проточной части турбомашин: $S_0^{(0)}, S_1^{(0)}$ – верхняя и нижняя части поверхности лопастей; $S_{0k}^{(0)}, S_{1k}^{(0)}$ – поверхности контактного разрыва; S'_0, S'_1 – конгруэнтные поверхности; S_0, S_1 – поверхности канала проточной части; S_{∞}, S'_{∞} – поверхности, перпендикулярные S'_0 и $S_{0k}^{(0)}$

Если же решетка обладает малой геометрической неоднородностью, которая, как правило, имеет место на практике вследствие технологической неточности изготовления и сборки лопастей, то закон их колебаний (1.15) не реализуется. В этом случае для описания линейных колебаний решетки лопастей целесообразно использовать гидродинамические коэффициенты влияния $q_{(m-n)}$, определяющие составляющую обобщенной силы, действующей на n -ю лопать при колебаниях m -ой лопасти. Согласно [1], они равны

$$q_{(m-n)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Q_{nk} e^{-im\mu_k} \tag{1.23}$$

2. Метод решения. Как показали исследования, решение задачи нестационарного обтекания пространственной решетки [2–5] по сравнению с плоской [1] методом интегральных уравнений существенно усложняется из-за учета условия непротекания поверхностей канала проточной части, поэтому в данной работе применен метод конечных элементов, для реализации которого, подобно [8], исходная задача сведена к сформулированной ниже краевой задаче в ограниченной области.

Область D (фиг. 1) заключена между верхней частью поверхности $S_0^{(0)}$ и нижней частью $S_1^{(0)}$ лопастей (на фиг. 1 их контуры – утолщенные кривые), конгруэнтными поверхностями S'_0 и S'_1 , проходящими через передние кромки этих лопастей перед решеткой, поверхностями контактного разрыва $S_{0k}^{(0)}$ и $S_{1k}^{(0)}$ за решеткой и стенок S_m канала проточной части, S_{∞} и S'_{∞} ($S_{\infty} \perp S'_0, S_{\infty} \perp S_{0k}^{(0)}$) располагающимися перед и за решеткой соответственно на расстоянии порядка хорды лопастей. В D требуется найти функцию ϕ , удовлетворяющую уравнению Лапласа при следующих граничных условиях.

1. Условия (1.16) для φ на верхней стороне $S_0^{(0)}$ и нижней $S_1^{(0)}$;
2. Условия обобщенной периодичности на S_0 и S_1

$$\varphi(\mathbf{r}_0) = \varphi(\mathbf{r}_1)e^{-i\mu}, \quad \frac{\partial\varphi(\mathbf{r}_0)}{\partial\theta} = \frac{\partial\varphi(\mathbf{r}_1)}{\partial\theta}e^{-i\mu} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{r}_0(x, r, \theta) \in S_0, \quad \mathbf{r}_1(x, r, \theta + \mu) \in S_1$$

3. Условия на поверхности контактного разрыва, согласно (1.17), будут иметь вид

$$\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}_0)}{\partial\mathbf{v}_0} = \frac{\partial\varphi(\mathbf{r}_1)}{\partial\mathbf{v}_1}e^{-i\mu}, \quad p(\mathbf{r}_0) = p(\mathbf{r}_1)e^{-i\mu} \quad (2.2)$$

где $p = i\omega\varphi + \mathbf{W}_0\nabla\varphi$, $\mathbf{r}_0(x, r_1, \theta) \in S_{0k}^{(0)}$, $\mathbf{r}_1(x, r_1, \theta + \mu) \in S_{1k}^{(0)}$;

4. Условия на стенках S_m канала проточной части вида (1.18);
 5. Условия на поверхностях $S_{-\infty}$ и S_{∞} вида (1.19);
 6. Дополнительные условия (1.20) в окрестностях задних кромок лопастей для $n = 0$.
- Расчетная область D разбивается на элементы – тетраэдры.

$$D = \bigcup_{e=1}^M T_e$$

Вершины тетраэдров образуют узлы разбиения \mathbf{r}_l , пронумерованные числами $l \in \{1, \dots, N\}$.

Следуя методу конечных элементов, свяжем с каждым узлом разбиения \mathbf{r}_l базисную кусочно-линейную функцию $V_l(\mathbf{r})$. На каждом тетраэдре $V_l(\mathbf{r})$ определяется как линейная функция, причем

$$V_l(\mathbf{r}_j) = \begin{cases} 1, & j = l \\ 0, & j \neq l \end{cases}$$

Эта функция финитна, носителем ее является объединение тетраэдров с вершиной \mathbf{r}_l . Приближение потенциала ищем в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^N \varphi_l V_l(\mathbf{r}) \quad (2.3)$$

где φ_l – узловые значения приближения на разбиении D' .

По формуле Гаусса – Остроградского получаем соотношение

$$\int_{D'} \nabla\varphi(\mathbf{r}) \cdot \nabla V_l(\mathbf{r}) dD = \int_{\partial D'} (\nabla\varphi(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}) V_l(\mathbf{r}) dS, \quad l = 1, \dots, N \quad (2.4)$$

Подставляя (2.3) в (2.4)

$$\int_{D'} \nabla \left(\sum_{j=1}^N \varphi_j V_j(\mathbf{r}) \right) \cdot \nabla V_l(\mathbf{r}) dD = \int_{\partial D'} \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{v}}(\mathbf{r}) V_l(\mathbf{r}) dS, \quad l = 1, \dots, N$$

получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов

$$\sum_{j=1}^N \varphi_j a_{lj} = b_l, \quad l = 1, \dots, N \quad (2.5)$$

$$a_{lj} = \int_{D'} \nabla V_j(\mathbf{r}) \cdot \nabla V_l(\mathbf{r}) dD, \quad b_l = \int_{\partial D'} \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{v}}(\mathbf{r}) V_l(\mathbf{r}) dS \quad (2.6)$$

Проведем редукцию системы (2.5), основываясь на граничных условиях (2.1), (2.2). Предположим, что узлы разбиения области занумерованы таким образом, что узлы с номерами $l = 1, \dots, N_0$ соответствуют узлам, в которых выполнено условие Дирихле и $\varphi_l = 0$; строки с этими номерами сразу исключаются из системы. Пусть узлы с номерами $l = N_0 + 1, \dots, N_1$ расположены на границах $L_0 \cap S'_0$, а на соответствующих им периодических границах $L_1 \cup S'_1$ – узлы с номерами $l = N_1 + 1, \dots, N_2$. Количество узлов на этих границах равно $p = N_1 - N_0 = N_2 - N_1$.

Рассмотрим строки системы (2.5) с номерами $l : N_0 < l \leq N_1$ и $l + p$

$$\sum_{j=N_0+1}^N \varphi_j a_{lj} = b_l, \quad \sum_{j=N_0+1}^N \varphi_j a_{l+p,j} = b_{l+p}$$

Носители функций $V_l(\mathbf{r})$ и $V_{l+p}(\mathbf{r})$ не пересекаются, поэтому можно записать

$$\sum_{j=N_0+1}^{N_1} \varphi_j a_{lj} + \sum_{j=N_2+1}^N \varphi_j a_{lj} = b_l$$

$$\sum_{j=N_1+1}^{N_2} \varphi_j a_{l+p,j} + \sum_{j=N_2+1}^N \varphi_j a_{l+p,j} = b_{l+p}$$

Преобразуем первое уравнение так, чтобы удовлетворить условию периодичности

$$\sum_{j=N_0+1}^{N_1} (\varphi_j + C_j) e^{i\mu} a_{lj} + \sum_{j=N_2+1}^N \varphi_j e^{i\mu} a_{lj} = b_l e^{i\mu} + \sum_{j=N_0+1}^{N_1} C_j e^{i\mu} a_{lj}$$

Так как, согласно условиям (2.2), при $N_0 < j \leq N_1$ имеет место соотношение $(\varphi_j + C_j) e^{i\mu} = \varphi_{j+p}$, где C_j – величина разрыва потенциала скорости в узле с номером j на вихревой пелене, сбегаяющей с задней кромки, а значения $V_l(\mathbf{r})$ и $V_{l+p}(\mathbf{r})$ совпадают в соответствующих точках периодических границ, эти уравнения запишутся так (в первой сумме индекс j сдвинут на величину p)

$$\sum_{j=N_1+1}^{N_2} \varphi_j a_{l,j-p} + \sum_{j=N_2+1}^N \varphi_j a_{lj} e^{i\mu} = - \int_{\partial D'} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{r}) e^{i\mu} V_{l+p}(\mathbf{r}) dS + \sum_{j=N_0+1}^{N_1} C_j e^{i\mu} a_{lj}$$

$$\sum_{j=N_1+1}^{N_2} \varphi_j a_{l+p,j} + \sum_{j=N_2+1}^N \varphi_j a_{l+p,j} = \int_{\partial D'} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{r}) V_{l+p}(\mathbf{r}) dS$$

Сложив эти уравнения и сдвинув индекс l на p , получим для $N_1 < l \leq N_2$

$$\sum_{j=N_1+1}^{N_2} \varphi_j (a_{l-p,j-p} + a_{l,j}) + \sum_{j=N_2+1}^N \varphi_j (a_{l-p,j} e^{i\mu} + a_{l,j}) = \sum_{j=N_0+1}^{N_1} C_j a_{l-p,j} e^{i\mu} \quad (2.7)$$

В результате этой операции по существу исключены уравнения с номерами $N_0 < l \leq N_1$. Рассмотрим строку с номером $l : N_2 < l \leq N$

$$\sum_{j=N_0+1}^{N_1} \varphi_j a_{lj} + \sum_{j=N_1+1}^N \varphi_j a_{lj} = b_l$$

Исключая неизвестные из первой суммы по формуле

$$\Phi_j = \Phi_{j+p} e^{-i\mu} - C_j$$

и сдвинув индекс j в первой сумме, найдем

$$\sum_{j=N_1+1}^{N_2} \Phi_j a_{l,j-p} e^{-i\mu} + \sum_{j=N_1+1}^N \Phi_j a_{lj} = b_l + \sum_{j=N_0+1}^{N_1} C_j a_{lj} \quad (2.8)$$

Следует отметить, что постоянные C_j в системе (2.7), (2.8), определяющие интенсивность разрыва потенциала скорости на вихревой пелене, рассматриваются как известные величины. В итерационной процедуре решения задачи в целом они находятся на предыдущем шаге итерации при некотором приближенном их задании на нулевом шаге. Для неизвестных величин Φ_j эта система замкнута, а ее матрица эрмитова. В самом деле, мнимая часть в коэффициенте системы ненулевая, когда один из номеров отвечает узлу, расположенному на периодической границе $L_0 \cup S_0'$, а другой – непериодическому узлу, такому, что носители их базисных функций пересекаются, т.е., если в (2.7) $a_{l-p,j} \neq 0$ ($N_0 < l-p \leq N_1, j > N_2$), то $a_{lj} = 0$ в силу $\text{supp} V_l(\mathbf{r}) \cap \text{supp} V_j(\mathbf{r}) = 0$ и коэффициент при Φ_j равен $a_{l-p,j} e^{i\mu}$. Симметричный относительно главной диагонали коэффициент системы в (2.8) равен $a_{j,l-p} e^{-i\mu}$. Так как $a_{i,j} = a_{j,i}$ для любых i, j в силу (2.6), соответственные коэффициенты взаимно сопряжены.

От эрмитовой системы перейдем к вещественной. От системы вида $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ порядка N – к блочной порядка $2N$

$$\begin{pmatrix} H & -G^T \\ G & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_R \\ \mathbf{r}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_R \\ \mathbf{b}_l \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R + i\mathbf{x}_l$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}_R + i\mathbf{b}_l$, $A = H + iG$. Матрица системы (2.9) симметричная, положительно определенная (при $\mu \neq 0$).

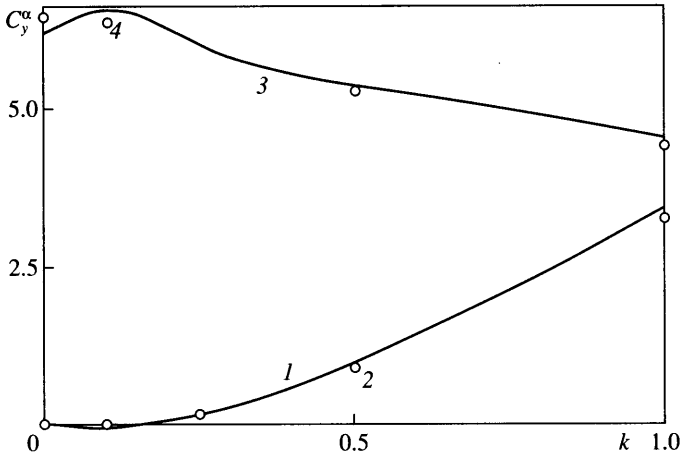
К определению интенсивности разрыва на вихревой пелене. Интенсивность разрыва потенциала скорости $C(\mathbf{r}_0)$ на вихревой пелене заранее неизвестно во всех точках поверхности $S_{0k}^{(0)}$. Для ее определения введем криволинейную систему координат (η, ξ) поверхности $S_{0k}^{(0)}$, в которой координата η направлена по задней кромке лопасти $S_0^{(0)}$, а координата ξ совпадает с линией тока стационарного течения, проходящей через точку η . Тогда из уравнения (1.5) найдем

$$C(\mathbf{r}_0) = C(\mathbf{r}_0(\eta, \xi)) = c(\eta) \exp(-iDI(\eta, \xi))$$

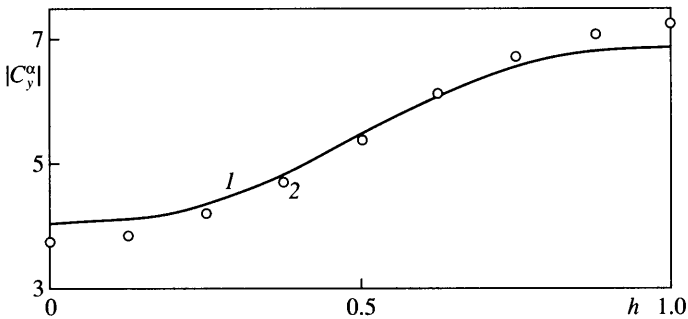
$$I(\eta, \xi) = \int_0^\xi \frac{ds}{|\mathbf{W}_{01}(\mathbf{r}_0(\eta, s))|} \quad (2.10)$$

Отсюда следует, что функция $C(\mathbf{r}_0)$ в любой точке вихревой пелены определяется ее значением $c(\eta)$ в окрестности задней кромки лопасти. Значение же $c(\eta)$ может быть установлено из условия Жуковского вида (1.20). Для нахождения этой функции используется итерационная процедура, на каждом шаге которой задано приближение $c(\eta)$. Затем решение проверяется на удовлетворении условия Жуковского с заданной точностью. В случае его невыполнения корректируются значения $c(\eta)$.

3. Результаты расчетов. На основе предложенного выше метода решения поставленной задачи разработан алгоритм нахождения нестационарных аэродинамических



Фиг. 2. Сравнение расчетной зависимости коэффициента сил C_y^α от числа Струхала k с данными [1]: 1 – $\text{Im } C_y^\alpha$, 2 – $\text{Im } C_y^\alpha$ [1], 3 – $\text{Re } C_y^\alpha$, 4 – $\text{Re } C_y^\alpha$ [1] ($\beta = 0$, $\tau = 1$, $\alpha = 0$, $\mu = \pi$)

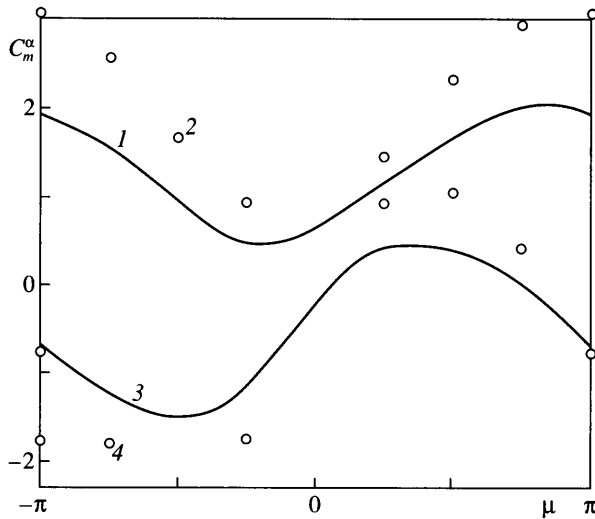


Фиг. 3. Сравнение зависимости модуля коэффициента сил $|C_y^\alpha|$ от координаты сечения по высоте пластины h : 1 – расчет, 2 – данные [1] ($\beta = 60^\circ$, $\tau = 1$, $\alpha = 0$, $\mu = \pi$, $k = 0.5$)

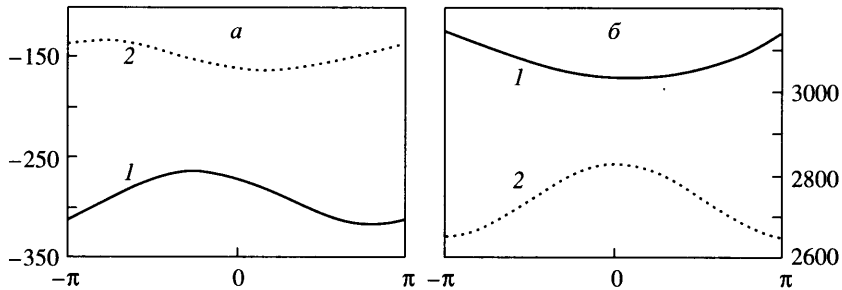
характеристик решеток. Оптимизация параметров численного алгоритма и его тестирование проведены на примерах расчета характеристик достаточно простых моделей решеток, результаты которых представлены в таблице и на фиг. 2–4. Апробация метода в отношении возможности его применения в более общем случае осуществлена вычислением нестационарных аэродинамических характеристик решетки гидротурбины реальной конструкции (фиг. 5).

Основная сложность численной реализации решения нестационарной задачи – удовлетворение условию на задней кромке. По существу это точечное условие. Попытки его задания в интегральном виде не дали правильного численного результата. Так как в условие входит градиент функции, точное его вычисление требует измельчения сетки. Это, в свою очередь, ухудшает обусловленность матрицы системы.

Выбор параметров соответствующей расчетной сетки проведен на примере определения пространственной прямой решетки пластин, совершающих крутильные колебания вокруг осей, проходящих через центры хорд, со сдвигом фаз между колебаниями соседних пластин $\mu = \pi$. На фиг. 2 представлены численные зависимости коэффициентов сил C_y^α , действующих на пластины, от числа Струхала k для решетки с углом вы-



Фиг. 4. Влияние относительной толщины T лопастей на величину коэффициента C_m^α для прямой решетки лопастей: 1 – $\text{Re } C_m^\alpha$, $T = 0$; 2 – $\text{Re } C_m^\alpha$, $T = 0.1$; 3 – $\text{Im } C_m^\alpha$, $T = 0$; 4 – $\text{Im } C_m^\alpha$, $T = 0.1$ ($\beta = 60^\circ$, $\tau = 2$, $\alpha = 0$, $k = 0.5$)



Фиг. 5. Зависимость коэффициента обобщенных сил C_{jk} , действующих на лопасти рабочего колеса модели гидротурбины ПЛ587А, от сдвига фаз μ : а – $\text{Im}(C_{jk})$ для первой (1) и второй (2) мод; б – $\text{Re}(C_{jk})$ для первой (1) и второй (2) мод ($k_1 = 148.5$, $k_2 = 225.25$)

носа $\beta = 0$, густотой $\tau = 1$, обтекаемой под нулевым углом атаки $\alpha = 0$ и дано сравнение с данными [1]. Отклонение величины $\text{Re } C_y^\alpha$ при малых значениях k от результатов [1] связано с разбиением на элементы около передних кромок, где распределенная нагрузка имеет особенность. Как показали расчеты для плоских решеток, минимальное количество узлов разбиения вдоль хорды равно 25–30 с измельчением сетки около кромок. Эта эмпирическая оценка годна и для пространственной решетки. В рассматриваемом случае величина шага (расстояния между узлами), отнесенного к хорде, около передней кромки равна 0.1 в отличие от его значения у задней кромки – 0.0125.

Существенно влияние измельчения сетки к кромкам не только вдоль хорды лопасти, но и в поперечном канале направлении (см. таблицу). В таблице представлены результаты расчета крутильных колебаний решетки пластин в противофазе ($\mu = \pi$) для случая $\beta = 60^\circ$, $\tau = 1$, $k = 0.5$. В ней приведены величины относительной ошибки вычис-

№	LX	LY	LS	%
1	7	21	29*	6.8
2	9	21	29*	6.4
3	9	25	29*	5.4
4	9	31	29*	4.4
5	9	31	31*	4.3
6	9	51	31*	2.6
7	9	51*	31*	0.9

ления $|C_y^\alpha|$ в сравнении с результатами, полученными в [1], в зависимости параметров разбиения. Здесь LX – количество узлов разбиения по высоте лопасти, LY – по ширине межлопаточного канала, LS – вдоль хорды лопасти. Величины, отмеченные звездочкой, указывают, что применялось сгущение сетки.

Тестовый расчет нестационарных аэродинамических характеристик проведен для прямой решетки пластин, совершающих крутильные колебания вокруг осей, проходящих через центры их хорд, но с переменной по высоте пластины амплитудой с заданной формой $\epsilon_v(x, h) = \alpha x(1 - \cos(\pi h))$, где x – координата профиля пластины, начало которой лежит на оси вращения, $h \in [0, 1]$, – координата сечения по высоте пластины. На фиг. 3 даются сравнения зависимостей модуля коэффициента сил $|C_y^\alpha|$ от h с данными [1].

Влияние толщины профилей решетки на ее нестационарные аэродинамические характеристики иллюстрируют результаты сравнения расчета зависимостей нестационарной составляющей коэффициента момента C_m^α от сдвига фаз μ (фиг. 4), полученных для прямой решетки лопастей с профилями чевицеобразной формы и относительной толщиной T , с соответствующими зависимостями для прямой решетки пластин ($T = 0$) [1]. Расчет проведен для случая крутильных колебаний лопастей вокруг осей, проходящих через середину их хорд. Качественно эти результаты о влиянии толщины профилей на нестационарные аэродинамические характеристики решетки согласуются с данными [9].

Пример расчета нестационарных аэродинамических характеристик вращающейся решетки рабочего колеса модели реальной гидротурбины ПЛ587А приведен на фиг. 5. Нанесены зависимости мнимых (фиг. 5, *a*) и действительных (*b*) частей коэффициентов обобщенных сил $C_{jk} = Q_{jk}^{(0)} / \rho V^2 S$ (V – относительная скорость набегающего потока в характерном сечении, S – площадь лопасти, j – номер моды колебаний), действующей на лопасти при их колебании по первой и второй моде, от сдвига фаз μ_k . Собственные частоты и формы колебаний лопастей определены ранее в [10]. Соответствующие числа Струхала для первой и второй мод – $k_1 = 148.56$, $k_2 = 225.25$. Программное обеспечение для описания геометрии проточной части рассматриваемой модели, основанное на [11], любезно предоставлено Скороспеловым В.А. Следует отметить, что величины полученных коэффициентов обобщенных сил удовлетворяют оценке

$$\operatorname{Re}(C_{jk}) = O(k_j^2), \quad \operatorname{Im}(C_{jk}) = O(k_j)$$

которая не противоречит имеющимся представлениям о поведении нестационарных аэродинамических характеристик решеток по плоской модели.

Заключение. Разработан метод расчета нестационарных аэродинамических характеристик вращающейся решетки колеблющихся лопастей в потоке несжимаемой жидкости. Для безотрывного обтекания решетки в линейной постановке сформулирована задача об определении нестационарной составляющей потенциала скорости течения. В предположении о гармоническом характере колебаний лопастей задача сведена к краевой в некоторой ограниченной односвязной области с нестандартными граничными условиями. Результаты тестовых расчетов показали эффективность предлагаемого метода, а также возможность его применения для расчета нестационарных аэродинамических характеристик реальных конструкций решеток.

Работа выполнена при поддержке Интеграционного проекта № 27 СО РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горелов Д.Н., Курзин В.Б., Сарен В.Э. Аэродинамика решеток в нестационарном потоке. Новосибирск: Наука, 1971. 272 с.
2. Намба М. Теория несущей поверхности для неустановившегося потока во вращающейся круговой решетке // Нестационарные течения в турбомашинах. М.: Мир, 1979. С. 35–52.
3. Рябченко В.П. Аэродинамические силы, действующие на лопасти пространственной кольцевой решетки при нестационарном обтекании // ПМТФ. 1979. № 4. С. 89–97.
4. Рябченко В.П. Расчет нестационарных аэродинамических характеристик кольцевой решетки лопастей произвольной формы // Аэроупругость лопаток турбомашин: Тр. ЦИАМ. 1987. № 1221. С. 4–14.
5. Реент К.С. Разработка методов расчета нестационарных аэродинамических сил, действующих на слабоагруженные лопатки венца и ступени турбомашин: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., ЦИАМ. 1997. 16 с.
6. Корн Г., Корн К. Справочник по математике. М.: Наука, 1968. 720 с.
7. Фершинг Г. Основы аэроупругости. М.: Машиностроение, 1984. 600 с.
8. Курзин В.Б. Постановка задачи о малых колебаниях решетки произвольных профилей в дозвуковом потенциальном потоке газа // Тр. ЦИАМ. 1984. № 1093. С. 43–50.
9. Рябченко В.П. Нестационарные аэродинамические характеристики решеток произвольных профилей, вибрирующих в потенциальном потоке несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 1. С. 15–20.
10. Курзин В.Б., Коробейников С.Н., Рябченко В.П., Ткачева Л.А. Собственные колебания лопастей однородной решетки гидротурбин в жидкости // ПМТФ. 1997. Т. 38. № 2. С. 80–90.
11. Скороспелов В.А., Турук П.А. Сплайны в задачах проектирования и изготовления рабочих колес гидротурбин // Вычислительные системы. Новосибирск. 1977. Вып. 2. С. 56–64.

Новосибирск

Поступила в редакцию
23.III.2004