

УДК 532.546

© 2005 г. В. М. ЕНТОВ, С. С. КОЛГАНОВ, Н. В. КОЛГАНОВА

## О ДВИЖЕНИИ ЯЗЫКОВ И ПУЗЫРЕЙ НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЯЧЕЙКЕ ХЕЛЕ–ШОУ, ЗАПОЛНЕННОЙ УПРУГО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Рассматриваются задачи об установившемся движении языка и пузыря невязкой жидкости в ячейке Хеле–Шоу, заполненной упруго-вязкой жидкостью, обобщающие известные задачи Саффмана и Тейлора [1, 2] в приближении, когда скачок давления на границе двух жидкостей зависит от нормальной скорости движения границы [4]. Результаты получены итерационными методами и в нулевом приближении хорошо согласуются с аналитическими решениями Саффмана–Тейлора [1, 2].

*Ключевые слова:* неустойчивое вытеснение, пузырь Саффмана–Тейлора, ячейка Хеле–Шоу, язык Саффмана–Тейлора.

**1. Установившееся движение языка.** Задача Саффмана–Тейлора об установившемся движении языка вытесняющей жидкости в пористой среде или ячейке Хеле–Шоу является центральной для понимания развитой стадии неустойчивого вытеснения (см., например, [3]). Ниже рассматривается обобщение этой задачи на случай движения языка невязкой жидкости вдоль оси ячейки Хеле–Шоу, заполненной упруго-вязкой жидкостью. Уравнения движения остаются в первом приближении теми же, что и для ньютоновской вязкой жидкости, и приводятся к уравнению Лапласа для потенциала скорости в занятой жидкостью области [4]:

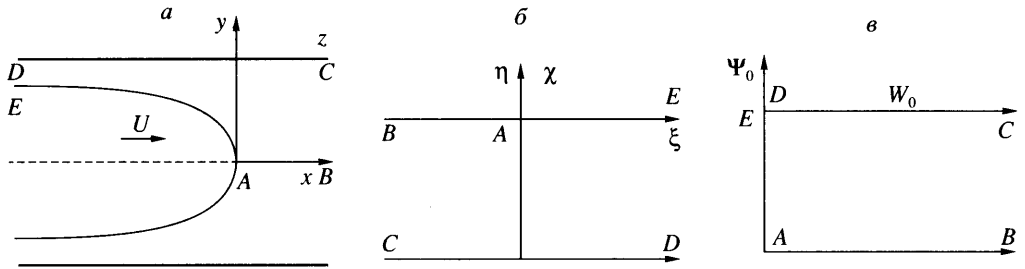
$$\Delta\varphi = 0, \quad \varphi = -\frac{b^2}{12\mu}p$$

где  $\varphi$  – потенциал скорости,  $b$  – толщина зазора между пластинами ячейки,  $p$  – давление,  $\mu$  – вязкость. Влияние упругости жидкости на поведение свободных границ в течении Хеле–Шоу в первом приближении сводится к изменению граничного условия для давления на свободной границе, принимающего (в отсутствие капиллярных сил) вид

$$-p + c\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)^2 = 0, \quad c = \frac{b^2(\theta_1 - \theta_2)}{6\mu}$$

где  $n$  – направление нормали к границе,  $\theta_1$  – время релаксации,  $\theta_2$  – время ретардации. Это условие является частным случаем предположения о том, что скачок давления на границе двух жидкостей в ячейке Хеле–Шоу зависит от скорости движения границы. В рамках принятого приближения задача сводится к отысканию во внешней области языка (фиг. 1,а) пары сопряженных гармонических функций  $\varphi$  и  $\psi$ , удовлетворяющих условиям:

$$\begin{aligned} \psi &= 0, \quad (x, y) \in AB; \quad \psi = \lambda UH; \quad (x, y) \in CD \\ \varphi &= -\beta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)^2, \quad (x, y) \in EA; \quad \beta = \frac{12\mu c}{b^2} = 2(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (1.1)$$



Фиг. 1. Постановка задачи о движении языка: физическая плоскость (а), вспомогательная плоскость  $\chi$  (б), плоскость нулевого потенциала (в)

где  $\lambda$  – относительная ширина языка,  $U$  – скорость языка,  $H$  – половина ширины ячейки. Для комплексного потенциала  $W = \varphi + i\psi$  в области  $ABCDEA$  (фиг. 1,а) имеем задачу

$$\Delta\varphi = 0; \quad \Delta\psi = 0$$

с граничными условиями (1.1). Ищется решение, отвечающее установившемуся движению со скоростью  $U$ , поэтому  $\psi = Uy$  вдоль  $EA$ .

Следуя [4], введем вспомогательную аналитическую функцию  $\chi$

$$\chi = \xi + i\eta = W - Uz, \quad W = \varphi + i\psi, \quad z = x + iy$$

которая отображает неизвестную область течения в полосу  $\Pi_\chi$  (фиг. 1,б). Комплексная координата  $z$  и комплексный потенциал  $W$  представляют собой аналитические функции от  $\chi$  в  $\Pi_\chi$ , удовлетворяющие краевым условиям

$$\psi = \text{Im}W = 0, \quad y = \text{Im}z = 0, \quad \eta = 0, \quad \xi < 0; \quad \varphi + \beta \left( \frac{\partial \psi}{\partial s} \right)^2 = 0, \quad \eta = 0, \quad \xi > 0$$

$$\psi = \text{Im}W = \lambda UH, \quad y = \text{Im}z = H, \quad \eta = -(1 - \lambda)UH, \quad -\infty < \xi < \infty$$

$$\frac{ds}{d\xi} = \left| \frac{dz}{d\xi} \right|$$

При малых  $\beta$  можно построить приближенное решение задачи итерационными методами [4]. Полагая  $\beta = 0$ , получим задачу нулевого приближения

$$\psi_0 = 0, \quad \eta = 0, \quad \xi < 0; \quad \varphi_0 = 0, \quad \eta = 0, \quad \xi > 0$$

$$\psi_0 = \lambda UH, \quad \eta = -(1 - \lambda)UH, \quad -\infty < \xi < \infty; \quad z_0 = (W_0 - \chi)/U$$

Задачи отыскания  $W_0(\chi)$  и  $z(\chi)$  могут быть решены последовательно. Решение задачи нулевого приближения получено Саффманом и Тейлором [2] в виде

$$\frac{z}{H} = \frac{W_0}{\lambda UH} + \frac{2}{\pi} \ln \left( \frac{1}{2} (1 + \exp(-\gamma W_0)) \right), \quad \gamma = \frac{\pi}{\lambda UH}$$

$$\chi = -(1 - \lambda)UH \left( \frac{W_0}{\lambda UH} + \frac{2}{\pi} \ln \left( \frac{1}{2} \exp - \gamma W_0 \right) \right)$$

где  $W_0 = \varphi_0 + i\psi_0$  – комплексный потенциал нулевого приближения, изменяющийся в полуполосе  $0 < \varphi_0 < \infty$ ,  $0 < \psi_0 < \lambda UH$ . В дальнейшем будем использовать  $W_0$  в качестве

аргумента при построении последующих приближений, для которых получаем последовательность задач в плоскости  $\chi$

$$\psi_k = 0, \quad \eta = 0, \quad \xi < 0; \quad z_k = \frac{W_k - \chi}{U}$$

$$\psi_k = \lambda UH, \quad \eta = -(1 - \lambda)UH, \quad -\infty < \chi < \infty$$

$$\varphi_k = -\beta \left[ \frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \xi} \left| \frac{\partial z_{k-1}}{\partial \xi} \right|^{-1} \right]^2 \equiv \varphi_k(\xi), \quad \eta = 0, \quad \xi > 0$$

В данной работе рассматривается случай квадратичной зависимости для  $\varphi_k$ . Выразив все функции через  $\varphi_0$  и  $\psi_0$ , перепишем задачу и граничные условия в плоскости  $W_0$  (фиг. 1,б):

$$\Delta \varphi_k = 0; \quad \Delta \psi_k = 0; \quad \psi_k = 0, \quad 0 \leq \varphi_0 \leq \infty, \quad \psi_0 = 0$$

$$\psi_k = \lambda UH, \quad 0 \leq \varphi_0 \leq \infty, \quad \psi_0 = \lambda UH \tag{1.2}$$

$$\varphi_k = -\beta \left[ \frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \psi_0} \left| \frac{\partial z_{k-1}}{\partial \psi_0} \right|^{-1} \right]^2 \equiv \varphi_k(\psi_0), \quad \varphi_0 = 0, \quad 0 < \psi_0 < \lambda UH$$

Таким образом, задача сводится к отысканию в полуполосе  $P_0$  пары гармонических функций, причем краевые значения  $\varphi_k$  при  $\psi_0 = 0$  берутся с предыдущих итераций. Условия (1.2) означают, что

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial \psi_0} = 0, \quad \psi_0 = 0 \quad \psi_0 = \lambda UH \quad \varphi_0 \geq 0; \quad \varphi_k \sim \varphi_0, \quad \varphi_0 \rightarrow \infty$$

Итак, получена задача для функции  $\varphi_k$  в плоскости  $W_0$

$$\Delta \varphi_k = 0; \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial \psi_0} = 0, \quad \psi_0 = 0 \quad 0 \leq \varphi_0 < \infty$$

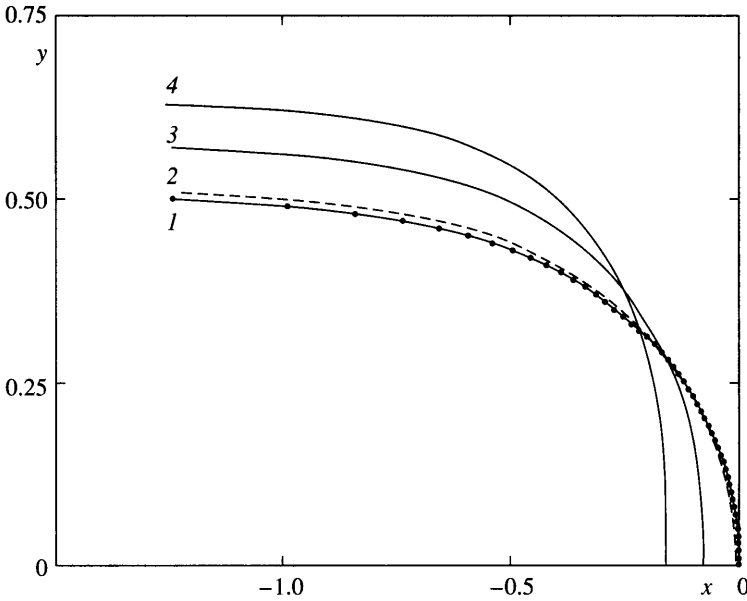
$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial \psi_0} = 0, \quad \psi_0 = \lambda UH \quad 0 \leq \varphi_0 < \infty$$

$$\varphi_k = -\beta \left[ \frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \psi_0} \left| \frac{\partial z_{k-1}}{\partial \psi_0} \right|^{-1} \right]^2 \equiv \varphi_k(\psi_0), \quad \varphi_0 = 0, \quad 0 < \psi_0 < \lambda UH$$

Для численного решения задач нулевого и последующих приближений воспользуемся конечно-разностной аппроксимацией уравнения Лапласа с последующим применением метода установления при соответствующих граничных условиях. Для оценки точности подхода используется сравнение со стационарной формой языка в отсутствие упругости – решением задачи нулевого приближения. Результаты хорошо согласуются с решением Саффмана–Тейлора (см. фиг. 2). Для поиска последующих приближений граничное условие на отрезке  $EA$  в плоскости  $W_0$  преобразуется следующим образом:

$$\varphi_k(0, j) = -\beta (\psi_{k-1}(0, j+1) - \psi_{k-1}(0, j))^2 |z_{k-1}(j+1) - z_{k-1}(j)| = \varphi_k(j)$$

$$|z_{k-1}(j+1) - z_{k-1}(j)|^2 = (x_{k-1}(j+1) - x_{k-1}(j))^2 + (y_{k-1}(j+1) - y_{k-1}(j))^2$$



Фиг. 2. Невозмущенная (кривая 1) и возмущенная формы языка: кривые 2–4 соответствуют  $\lambda = 0.3$ ;  $\beta = 0.01, 0.1, 0.25$

При этом форма языка находится из соотношений

$$x_k(j) = (\varphi_k(0, j) - \xi(0, j))/U, \quad y_k(j) = \psi_k(0, j)/U, \quad j = 0 \dots N$$

С увеличением параметра упругости  $\beta$  профиль языка становится более крутым.

**2. Установившееся движение пузыря.** Рассмотрим обобщение задачи Саффмана–Тейлора об установившемся движении пузыря жидкости нулевой вязкости вдоль оси ячейки Хеле–Шоу, считая ячейку заполненной упруго-вязкой жидкостью. Предположим, что стенки канала расположены на расстоянии  $y = 1$  и скорость вязкой жидкости равна единице на бесконечности впереди и позади пузыря (фиг. 3,а). Повторяя те же рассуждения, что и при анализе движения языка, сведем задачу к отысканию пары сопряженных гармонических функций  $\varphi, \psi$  в области  $ABCDEFGHA$  (фиг. 3,а), удовлетворяющих условиям

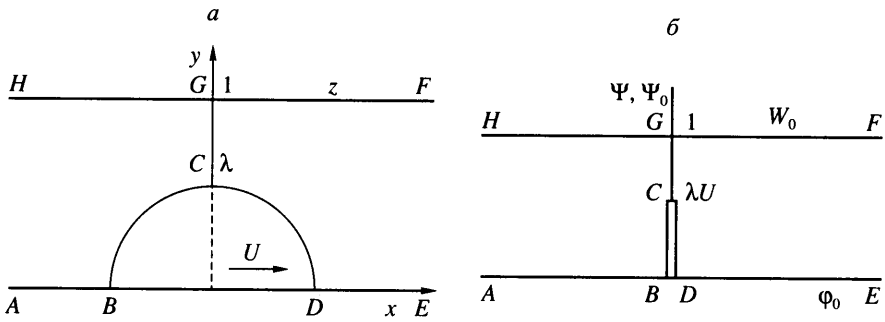
$$\psi = 1, \quad (x, y) \in HF; \quad \psi = 0, \quad (x, y) \in AB, DE; \quad \varphi = -\beta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2, \quad (x, y) \in D$$

$$\beta = 12\mu c/b^2 = 2(\theta_1 - \theta_2); \quad \varphi = -\beta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2 \operatorname{sign} \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \quad (x, y) \in BCD$$

Здесь  $\varphi \rightarrow x$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ , где  $\lambda$  – относительная ширина пузыря,  $\psi = Uy$ . При определении граничного условия на поверхности пузыря учитывается различие между наступающим (продвигающимся в область, занятую жидкостью) и отступающим мениском. Из вывода граничного условия (1.1) следует, что при переходе к отступающему мениску скачок давления должен изменить знак [4]. Итак, необходимо найти аналитическую в области течения функцию  $W(z) = x + iy$ , удовлетворяющую условиям

$$\psi = 1, \quad (x, y) \in HF; \quad \psi = 0, \quad (x, y) \in AB, DE$$

$$\varphi = -\beta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2 \operatorname{sign} \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \quad (x, y) \in BCD$$



Фиг. 3. Постановка задачи о движении пузыря в физической плоскости (а) и плоскости комплексного потенциала  $W_0, W$  (б)

Введем вспомогательную аналитическую функцию

$$\chi = \xi + i\eta = W - Uz, \quad W = \varphi + i\psi, \quad z = x + iy$$

На границах полосы  $\Pi_\chi$  должны выполняться краевые условия

$$\psi = \text{Im} W = 0, \quad y = \text{Im} z = 0, \quad \eta = 0, \quad \xi < D; \quad \eta = 0, \quad \xi > B$$

$$\psi = \text{Im} W = 1, \quad y = \text{Im} z = 1, \quad \eta = 1 - U, \quad -\infty < \xi < \infty$$

$$\varphi + \beta \left( \frac{\partial \psi}{\partial s} \right)^2 \text{sign} \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad \eta = 0, \quad D < \xi < B; \quad \frac{ds}{d\xi} = \left| \frac{dz}{d\xi} \right|$$

Полагая  $\beta = 0$ , получим задачу нулевого приближения (фиг. 3,б).

$$\psi_0 = 0; \quad \eta = 0; \quad \xi < D; \quad \eta = 0, \quad \xi > B$$

$$\psi_0 = 1; \quad \eta = 1 - U, \quad -\infty < \xi < \infty$$

$$\varphi_0 = 0, \quad \eta_0 = 0, \quad D < \xi < B; \quad z_0 = (W_0 - \xi)/U$$

Для нее можно воспользоваться аналитическим решением, полученным Саффманом-Тейлором:

$$z = W_0 + \frac{4U-1}{\pi U} \text{arth} \left[ \frac{\text{tg}(\pi U \lambda / 4)}{\text{tg}(\pi U \lambda / 2)} \left( \left( \text{th}^2 \frac{\pi W_0}{2} \right) + \text{tg}^2 \frac{\pi U \lambda}{2} \right)^{1/2} - \text{th} \frac{\pi W_0}{2} \right]$$

где  $W_0 = \varphi_0 + i\psi_0$  – комплексный потенциал нулевого приближения, изменяющийся в полосе  $-\infty < \varphi_0 < \infty, 0 < \psi_0 < 1$  с разрезом  $\varphi_0 = 0, 0 < \psi_0 < \lambda U$ . Последующие приближения в плоскости  $\chi$  находятся из последовательности задач

$$\Delta \varphi_k = 0; \quad \psi_k = 0; \quad \eta = 0, \quad \xi < D; \quad \eta = 0, \quad \xi > B$$

$$\psi_k = 1; \quad \eta = 1 - U, \quad -\infty < \xi < \infty; \quad z_k = \frac{W_k - \chi}{U}$$

$$\varphi_k = -\beta \left[ \frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \xi} \left| \frac{\partial z_{k-1}}{\partial \xi} \right|^{-1} \right]^2 \text{sign} \frac{\partial \psi_k - 1}{\partial \xi} = \varphi_k(\xi), \quad \eta = 0, \quad D < \xi < B$$

Выразив все неизвестные функции от  $\varphi_0$  и  $\psi_0$ , получим последовательность задач в плоскости  $W_0$

$$\Delta\varphi_k = 0; \quad \Delta\psi_k = 0$$

$$\psi_k = 0, \quad \frac{\partial\varphi_k}{\partial\psi_0} = 0, \quad -\infty < \varphi_0 < \infty, \quad \psi_0 = 0 \quad (2.1)$$

$$\psi_k = 1, \quad \frac{\partial\varphi_k}{\partial\psi_0} = 0, \quad -\infty < \varphi_0 < \infty, \quad \psi_0 = 1$$

$$\varphi_k = -\beta \left[ \frac{\partial\psi_{k-1}}{\partial\psi_0} \left| \frac{\partial z_{k-1}}{\partial\psi_0} \right|^{-1} \right]^2 \equiv \varphi_k(\psi_0), \quad \varphi_0 = 0, \quad 0 < \psi_0 < \lambda U$$

На разных сторонах разреза ( $\varphi_0 = \pm 0$ ,  $0 < \psi_0 < U$ ) значения  $\varphi_k$  различны; они определяются знаком производной  $\partial\varphi_{k-1}/\partial\psi_0$  ( $\varphi_0 = \pm 0$ ). Задача решается для функции  $\varphi_k$ . Последнее из соотношений (2.1) задает значение искомой функции на границе разреза  $BCD$ ; кроме того  $\varphi_k$  должна удовлетворять условиям

$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial\psi_0} = 0, \quad \psi_0 = 0; \quad \varphi_k \sim \varphi_0, \quad \varphi_0 \rightarrow \pm\infty$$

$$\psi_0 = 1, \quad -\infty < \varphi_0 < 0, \quad 0 < \varphi_0 < \infty$$

Алгоритм численного решения аналогичен использованному при решении задачи о языке. В области  $ABCDEFGHA$  с разрезом вдоль оси  $\psi_0$  (фиг. 3,б) решается задача

$$\Delta\eta = 0, \quad \Delta\xi = 0$$

$$\eta = 0, \quad -\infty < \varphi_0 < \infty, \quad \psi_0 = 0$$

$$\eta = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad 0 < \psi_0 < \lambda U \quad (2.2)$$

$$\eta = 1 - U, \quad -\infty < \varphi_0 < \infty, \quad \psi_0 = 1$$

Функция  $\eta$  равна нулю на обеих сторонах разреза, который можно считать отрезком с заданным значением функции  $\eta$ . Задача решается методом конечных разностей с использованием метода установления. При отыскании высших приближений граничное условие на  $BCD$  в плоскости  $W_0$  преобразуется к виду

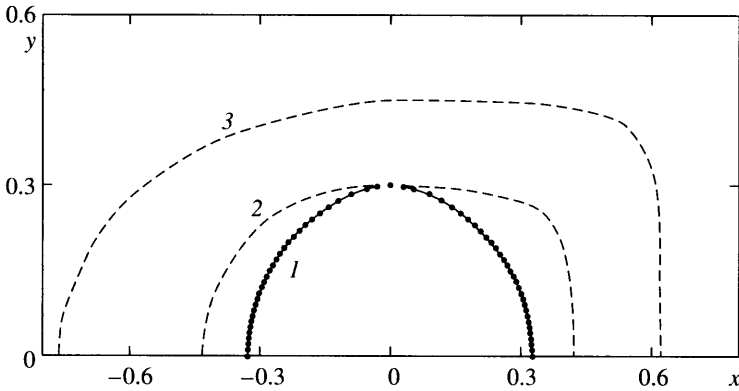
$$\varphi_k|_{\varphi_0=0} = -\beta \left[ \frac{\partial\psi_{k-1}}{\partial\xi} \left| \frac{\partial z_{k-1}}{\partial\xi} \right|^{-1} \right]^2 \text{sign} \frac{\partial\psi_{k-1}}{\partial\xi} = -\beta \left[ \frac{\partial\psi_{k-1}}{\partial\xi} \left| \frac{\partial z_{k-1}}{\partial\xi} \right|^{-1} \right]^2 \text{sign} \frac{\partial\psi_{k-1}}{\partial\psi_0}$$

В данном случае учитывается, что функция  $\varphi_k$  принимает неодинаковые значения на разных сторонах разреза  $\varphi_0 = \pm 0$ ,  $0 < \psi_0 < \lambda U$ . Форма пузыря с возмущенной границей определяется из соотношений:

$$x_k(j) = \frac{\varphi_k(j) - \xi_k(j)}{U}; \quad y_k(j) = \frac{\psi_k(j)}{U}$$

в которых используются значения  $\varphi_k$  на границах разреза  $BC$  и  $CD$  соответственно. Результаты решения приведены на фиг. 4.

**Заключение.** Представлены численно-аналитические решения задач определения формы границы раздела двух жидкостей, возникающих в теории неустойчивого вы-



Фиг. 4. Невозмущенная и возмущенная формы пузыря. Кривая 1 – аналитическое решение Саффмана–Тейлора, точки – численное решение задачи о пузыре в нулевом приближении, кривая 2 –  $\lambda = 0.3$ ,  $\beta = 0.06$ , кривая 3 –  $\lambda = 0.42$ ,  $\beta = 0.35$

теснения в пористой среде. Отыскиваются стационарные формы языков и пузырей вытесняющей жидкости. Полученные результаты подтвердили предположение [4] о том, что язык должен становиться более крутым. Граница пузыря принимает яйцевидную форму, при этом тупой конец направлен в сторону движения, пузырь становится более обтекаемым. Саффман и Тейлор наблюдали такую картину экспериментально, причем подтвердилось их предположение о том, что форма фронта пузыря служит хорошим приближением для формы языка.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Saffman P.G., Taylor G.I.* The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // London, 1958, Proc. R. Soc. A 245, p. 312–329.
2. *Taylor G.I., Saffman P.G.* A note on the motion of bubbles in a Hele-Shaw cell and porous medium // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1959. V. 12. № 3. P. 265–279.
3. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984, 208 с.
4. *Городцов В.А., Ентов В.М.* Неустойчивость фронтов вытеснения неньютоновских жидкостей в ячейке Хеле–Шоу // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 1. С. 115–131.

Москва

Поступила в редакцию  
20.11.2004