

УДК 532.526.3.013.4

© 2004 г. М. В. УСТИНОВ

ВОСПРИИМЧИВОСТЬ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ЛИНИИ РАСТЕКАНИЯ НАКЛОННО ОБТЕКАЕМОГО ЦИЛИНДРА К ВИХРЕВЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ

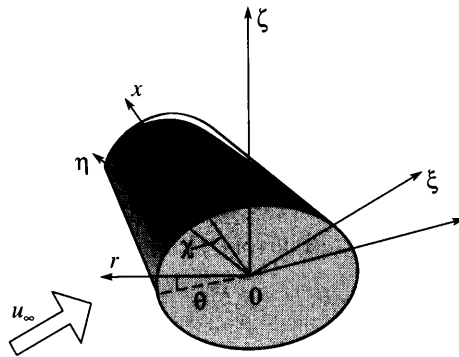
Исследована восприимчивость пограничного слоя в окрестности линии растекания на наклонно обтекаемом цилиндре к периодическим вихревым возмущениям, вмороженным в поток. Рассмотренная задача моделирует взаимодействие внешней турбулентности с пограничным слоем на передней кромке скользящего крыла. Показано, что если направление волнового вектора внешних возмущений близко к параллельному к передней кромке, то на внешней границе пограничного слоя происходит значительное их усиление. Этот эффект может быть причиной ламинарно-турбулентного перехода на линии растекания при докритических числах Рейнольдса.

Ключевые слова: ламинарно-турбулентный переход, турбулентность, восприимчивость, пограничный слой, скользящее крыло.

Состояние пограничного слоя на линии растекания скользящего крыла определяющим образом влияет на режим течения в пограничном слое на всей его поверхности. Общеизвестно, что возмущения, возникшие на линии растекания, распространяются на весь пограничный слой, являясь первопричиной всех известных видов распространяющихся в нем возмущений: волн Толлмина – Шлихтинга, вихрей неустойчивости поперечного течения и нарастающих по алгебраическому закону полосчатых структур. Устойчивость пограничного слоя на линии растекания изучалась экспериментально в [1–3] и теоретически в [2, 4, 5]. Эти исследования установили верхний предел числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода в этом течении и определили его зависимость от высоты неровности (турбулизатора), скорости отсоса жидкости, температуры поверхности и числа Маха. Однако проблема восприимчивости пограничного слоя на линии растекания к возмущениям, приходящим из внешнего потока, практически не рассматривалась, несмотря на ее очевидную актуальность. Даже если внешние возмущения и не приводят к турбулизации пограничного слоя на передней кромке, порождаемые ими пульсации на линии растекания могут быть снесены вдоль хорды и инициировать более ранний переход на поверхности крыла. На возможность такого развития событий указывают результаты исследования преобразования устойчивых собственных возмущений на линии растекания в вихри неустойчивости поперечного течения [6]. Такой механизм турбулизации пограничного слоя может служить объяснением сильного воздействия малой турбулентности потока на положение перехода на стреловидном крыле, наблюдавшегося в [7].

В настоящей работе исследуется восприимчивость течения на линии растекания к периодическим вдоль размаха возмущениям потока, имеющим, в основном, нормальную к передней кромке компоненту завихренности. Из всех возможных вихрей, имеющих в турбулентном потоке, эти возмущения создают наибольшие пульсации скорости вблизи передней кромки затупленных тел [8, 9]. Для простоты, в качестве модели течения в окрестности передней кромки рассматривается безотрывное обтекание цилиндра наклонным к его оси потоком вязкой несжимаемой жидкости.

1. Постановка задачи. Рассмотрим обтекание кругового цилиндра бесконечной длины потоком вязкой несжимаемой жидкости, направленным под углом $\pi/2 - \chi$ к его



Фиг. 1. Схема течения и используемые обозначения

оси. В качестве масштабов для координат и скорости выберем радиус цилиндра r_0 и скорость набегающего потока u_∞ . Декартову систему координат ξ, η, ζ зададим так, чтобы ось ζ была направлена по потоку, начало координат соответствовало некоторой точке на оси цилиндра, а его ось лежала в плоскости $\xi\eta$ (фиг. 1). Предположим, что в набегающем потоке имеются малые, периодические по времени и почти периодические по ξ, η возмущения продольной и трансверсальной составляющих скорости. Такое течение представим в виде

$$u_\xi = 1 + \varepsilon_0 e^{i(\alpha'\xi + \beta'\eta - \omega t)}; \quad u_\eta = -\varepsilon_0 \frac{\alpha'}{\beta'} e^{i(\alpha'\xi + \beta'\eta - \omega t)}; \quad u_\zeta = 0 \quad (1.1)$$

где u_ξ, u_η, u_ζ – составляющие скорости вдоль соответствующих координат, ε_0 – малый параметр, определяющий амплитуду возмущений. В этих выражениях частота ω предполагается действительной, а продольное и трансверсальное волновые числа α' и β' – комплексными. Подстановка (1.1) в уравнения Навье – Стокса приводит к дисперсионному соотношению

$$iR(\alpha' - \omega) = \alpha'^2 + \beta'^2; \quad R = \frac{u_\infty r_0}{\nu}$$

Вихревые возмущения с любыми α', β' , удовлетворяющими ему, могут быть выбраны для моделирования завихренности в набегающем потоке. Обычно рассматривают возмущения с действительными β' , которые затухают вниз по потоку и однородны в поперечном направлении. Физически они соответствуют, например, турбулентности, порождаемой сеткой, установленной поперек потока. Однако в данной работе удобнее считать характеристики течения постоянными вдоль любой линии, параллельной оси цилиндра, и требовать затухания возмущений в поперечном к ней направлении. Такие возмущения могут порождаться сеткой, расположенной наклонно к потоку и параллельно оси цилиндра. Мнимые части волновых чисел α'_i, β'_i таких возмущений выражаются через их действительные части α'_r, β'_r и частоту соотношением

$$\alpha'_i = \sigma; \quad \beta'_i = -\sigma \operatorname{tg} \chi; \quad \alpha'_r = \omega; \quad \sigma = \frac{\alpha'^2 + \beta'^2}{R} \quad (1.2)$$

Последние два равенства здесь справедливы при $\alpha'_r, \beta'_r \ll R$. В дальнейшем будем считать период возмущений величиной порядка или много большей толщины пограничного слоя на линии растекания и малой, по сравнению с радиусом цилиндра. Иначе

говоря будем полагать $1 \ll \alpha'_r, \beta'_r \leq \sqrt{R}$, что безусловно, удовлетворяет предыдущему неравенству.

Зададимся целью найти линейное по ε_0 решение задачи об обтекании цилиндра возмущенным потоком (1.1). Для этого удобнее использовать цилиндрическую систему координат r, θ, x (фиг. 1), связанную с декартовыми координатами ξ, η, ζ соотношениями

$$\xi = -r \cos \theta \cos \chi + x \sin \chi; \quad \eta = r \cos \theta \sin \chi + x \cos \chi; \quad \zeta = r \sin \theta$$

Граничные условия в набегающем потоке (1.1) в цилиндрических координатах принимают вид

$$u_\theta = \cos \chi \sin \theta + \varepsilon_0 \frac{\alpha}{\beta} e^{i\Psi_\infty} \sin \theta$$

$$u_x = \sin \chi - \varepsilon_0 \frac{\beta}{\alpha} e^{i\Psi_\infty} \cos \theta, \quad r \rightarrow \infty, \quad |\theta| < \frac{\pi}{2}$$

$$u_r = -\cos \chi - \varepsilon_0 \frac{\alpha}{\beta} e^{i\Psi_\infty} \cos \theta$$

$$\Psi_\infty = \alpha x - \beta r \cos \theta - \omega t, \quad \beta = \alpha' \cos \chi - \beta' \sin \chi, \quad \alpha = \alpha' \sin \chi + \beta' \cos \chi$$

где индексами θ, x, r обозначены составляющие скорости по соответствующим координатам. Введенные здесь величины α, β являются проекциями волнового вектора возмущений внешнего потока на ось цилиндра и нормальное к ней направление. Поэтому их будем называть продольными и поперечными волновыми числами. Заметим, что α является вещественным в силу (1.2).

Для простоты ограничимся нахождением течения при $\theta \ll 1$. Учитывая (1.3), будем искать его в виде

$$u_x = U_0(r) + \varepsilon_0 u(r) e^{i\Psi} \cos \theta; \quad u_\theta = V_0(r) \sin \theta + \varepsilon_0 v(r) e^{i\Psi} \sin \theta$$

$$u_r = W_0(r) \cos \theta + \varepsilon_0 w(r) e^{i\Psi} \cos \theta$$

$$p = P_{01}(r) \cos^2 \theta + P_{02}(r) \sin^2 \theta + \varepsilon_0 p(r) e^{i\Psi} \cos^2 \theta$$

$$\Psi = \alpha x - \beta r (1 - \cos \theta) - \omega t$$

Здесь первое слагаемое описывает основное течение, соответствующее обтеканию цилиндра равномерным потоком, а второе – возмущения, создаваемые неравномерностью набегающего потока. Вне пограничного слоя толщиной порядка $1/\sqrt{R}$ основное течение соответствует обтеканию цилиндра идеальной жидкостью

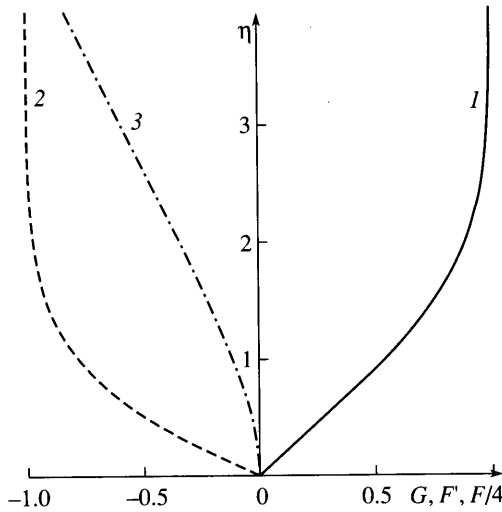
$$U_0 = \sin \chi, \quad V_0 = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cos \chi, \quad W_0 = \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cos \chi$$

В пограничном слое, при $r-1 \sim 1/\sqrt{R}$ нахождение основного течения сводится к задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений [4]

$$U_0 = G(\eta) \sin \chi, \quad V_0 = -2F'(\eta) \cos \chi, \quad W_0 = \sqrt{\frac{2 \cos \chi}{R}} F(\eta), \quad \eta = \sqrt{2 \cos \chi R} (r-1)$$

$$F''' - FF'' + F'^2 = 1, \quad F(0) = F'(0) = 0, \quad F'(\infty) = -1$$

$$G'' - FG' = 0, \quad G(0) = 0, \quad G(\infty) = 1$$



Фиг. 2. Профили продольной (вдоль оси) (1), трансверсальной (2) и вертикальной (3) составляющих скорости в пограничном слое на линии растекания

Ее решение в виде графиков G, F', F , определяющих профили продольной, трансверсальной и вертикальной составляющих скорости в пограничном слое на линии растекания, показано на фиг. 2.

Подстановка (1.4) в уравнения Навье – Стокса, линеаризация по ϵ_0 и учет только наибольших по θ членов приводят к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $u, v, w, p(r)$, описывающих возмущенное движение

$$\begin{aligned}
 Lu + \frac{dV_0}{dr}w &= -i\alpha p + \frac{1}{R}Hu \\
 \left[L + \frac{1}{r}(2U_0 + W_0) \right] v + \left(\frac{dU_0}{dr} + \frac{1}{r}U_0 \right) w &= \left(\frac{2}{r} - i\beta \right) p + \frac{1}{R} \left[\left(H - \frac{1}{r^2} \right) v + \frac{2i\beta}{r} w \right] \\
 Lw + \frac{dW_0}{dr}w &= -\frac{dp}{dr} + \frac{1}{R} \left(Hw - \frac{2}{r^2}v \right)
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\frac{dw}{dr} + i\alpha u + \frac{1}{r}(v + w) = 0$$

$$L \equiv i(\alpha U_0 - \omega) + W_0 \frac{d}{dr}, \quad H \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - i \frac{\beta}{r} - \alpha^2$$

Граничные условия для возмущений следуют из (1.3) и условий прилипания на стенке

$$u \rightarrow \frac{\beta}{\beta'} e^{-i\beta r}, \quad v \rightarrow \frac{\alpha}{\beta'} e^{-i\beta r}, \quad w \rightarrow -\frac{\alpha}{\beta'} e^{-i\beta r}; \quad r \rightarrow \infty \quad u, v, w(1) = 0 \tag{1.8}$$

Полученные уравнения в принципе описывают возмущения при малых θ во всей области течения. Однако нахождение их решения численным методом при большом числе Рейнольдса и $\alpha, \beta \gg 1$ представляет весьма сложную задачу, из-за быстрых осцилля-

ций решения и малого параметра при старших производных. Поэтому решение будем искать методом сращиваемых асимптотических разложений отдельно в двух областях: невязкой части, где $r - 1 \sim 1$ и пограничном слое, где $r - 1 \sim 1/\sqrt{R}$.

2. Решение в невязкой области: Из (1.3) и оценок $1 \ll \alpha', \beta' < \sqrt{R}$ следует, что продольное волновое число α также удовлетворяет этим оценкам для $\chi \sim 1$. Для определенности представим его в виде $\alpha = \varepsilon \sqrt{R}$, где малый параметр ε удовлетворяет неравенству $1/\sqrt{R} \ll \varepsilon \ll 1$. В отличие от α , поперечное волновое число β может и не быть большим при сколь угодно больших α', β' , если угол стреловидности χ близок к $\arctg(\beta'/\alpha')$. Как будет видно из дальнейшего рассмотрения, поведение возмущений скорости при приближении к стенке существенно зависит от порядка величины β . Предположим сначала, что $\beta \sim \alpha$ и может быть записано в виде $\beta = \varepsilon \sqrt{R} \beta_1, \beta_1 \sim 1$. Тогда решение при $r \sim 1$ представляет собой быстро осциллирующие функции r . Используя метод многих масштабов будем искать его в виде

$$\{u, v, w, p\} = [\{u_0, v_0, w_0, p_0\}(r) + \delta\{u_1, v_1, w_1, p_1\}(r)]e^{1/\delta\Phi(r)}, \quad \delta = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{R}} \ll 1$$

Подставляя эти выражения в (1.6), учитывая решение для основного течения (1.5) и группируя члены порядка $1/\delta$ и 1, получим две системы уравнений для функций нулевого и первого приближений

$$Mu_0 = -ip_0, \quad Mv_0 = -i\beta_1 p_0, \quad Mw_0 = -\lambda p_0, \quad iu_0 + \lambda w_0 = 0 \quad (2.1)$$

$$Mu_1 + ip_1 = -W_0 u_0'$$

$$Mv_1 + i\beta_1 p_1 = \frac{2}{r} p_0 - \frac{1}{r} (2U_0 + W_0)v_0 - W_0 v_0' - \left(U_0' + \frac{1}{r} U_0\right) w_0 \quad (2.2)$$

$$Mw_1 + \lambda p_1 = p_0' - (W_0 w_0)', \quad iu_1 + \lambda w_1 = -w_0' - \frac{1}{r} (v_0 - w_0)$$

$$\lambda = \Phi', \quad M = \lambda W_0 - i\beta_1 \cos \chi$$

где штрих обозначает производную по r .

Исключение давления из (2.1) приводит к кубическому уравнению для λ , корни которого λ_i и соответствующие им фазовые функции Φ_i легко находятся

$$\lambda_1 = -\frac{i\beta_1}{1 - 1/r^2}, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 1$$

$$\Phi_1 = i\beta_1 \left(-r + \frac{1}{2} \ln \frac{r+1}{r-1}\right), \quad \Phi_2 = -r, \quad \Phi_3 = r$$

Общее решение для возмущений есть линейная комбинация трех частных решений уравнений (2.1), (2.2), соответствующих корням λ_i

$$\{u, v, w, p\} = \sum_{i=1}^3 c_i \{u_{0i}, v_{0i}, w_{0i}, p_{0i}\}(r) e^{1/\delta\Phi_i(r)} + O(\delta) \quad (2.3)$$

Частное решение для λ_3 экспоненциально возрастает при $r \rightarrow \infty$, что противоречит граничным условиям в набегающем потоке. Поэтому необходимо положить $c_3 = 0$. Чтобы найти остальные два частных решения, исключим p_1 из второго и третьего

уравнений (2.2) и выразим в полученном равенстве p_0 через w_0 с помощью третьего уравнения (2.1). В результате получим

$$-\lambda M \left[w_0' + \frac{v_0 + w_0}{r} \right] = \left(\frac{M}{\lambda} w_0 \right)' - (W_0 w_0)' + \lambda W_0 (\lambda w_0)' \quad (2.4)$$

При $\lambda = \lambda_2 = -1$ справедливо соотношение $v_{02} = -i\beta_1 w_{02}$, следующее из второго и третьего уравнений (2.1), и (2.4) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению для w_{02} , которое легко интегрируется, давая частное решение $w_{02} = r^{i/2(\beta_1 - 1)}$. Амплитуды остальных компонент скорости и давления для этого решения находятся из (2.1) и имеют вид

$$u_{02} = -w_{02}; \quad v_{02} = -i\beta_1 w_{02}; \quad p_{02} = -(W_0 + i\beta_1 \cos \chi) w_{02}$$

При $\lambda = \lambda_1$ в (2.4) $M = 0$, и это равенство также сводится к дифференциальному уравнению для w_0 , которое интегрируется с помощью перехода к независимой переменной W_* , и дает второе частное решение

$$w_{01} = \frac{W_*}{W_*^2 + \beta_1^2}, \quad W_* = \frac{W_0}{\cos \chi}$$

Амплитуда продольной компоненты скорости для этого решения также находится из (2.1)

$$u_{01} = i\lambda w_{01} = -\frac{\beta_1}{W_*^2 + \beta_1^2}$$

а амплитуда давления обращается в нуль. Из-за этого, v_{01} не может быть выражена из уравнений для первого приближения (2.1) и должна непосредственно находиться из второго уравнения (2.2). Подстановка в него давления второго приближения p_1 , найденного из первого уравнения (2.2), приводит к дифференциальному уравнению, решение которого имеет вид

$$v_{01} = -\frac{e^{3/2 W_*}}{\sqrt{W_* + 1}} \int_{-1}^{W_*} \frac{W \sqrt{W + 1}}{W^2 + \beta_1^2} \left[\frac{1}{2(W + 1)} - \frac{2\beta_1}{W^2 + \beta_1^2} \right] e^{-3/2 W} dW$$

Константа c_1 в общем решении (2.3) находится из граничных условий в набегающем потоке $c_1 = (\alpha/\beta')(1 + \beta_1^2)$. Коэффициент c_2 при втором частном решении, экспоненциально затухающем при $r \rightarrow \infty$, остается неопределенным и должен находиться из сращивания с решением в пограничном слое. Физически это решение представляет собой возмущения, порожденные изменением толщины вытеснения пограничного слоя. Первопричиной его деформации является первое частное решение, которое описывает вихревые возмущения, приходящие из набегающего потока. Об этом свидетельствуют два факта. Во-первых, исключительно первое решение обеспечивает выполнение граничных условий на бесконечности. Во-вторых, в этом частном решении отсутствуют возмущения давления, что является характерной особенностью вихревых возмущений. Следовательно, константа c_2 определяется исключительно возмущениями, вносимыми в пограничный слой первым решением. Его асимптотика при $r \rightarrow 1$

$$|u_{01}| \rightarrow \frac{1}{|\beta_1|}, \quad |v_{01}| \rightarrow \frac{1}{|\beta_1|^2} \left| 1 + \frac{4}{\beta_1} \right| y^2, \quad |w_{01}| \rightarrow \frac{2}{|\beta_1|^2} y, \quad y = r - 1 \quad (2.5)$$

показывает, что вихревые возмущения сохраняют свой порядок при приближении к стенке. Значит, вызванная ими деформация пограничного слоя и, следовательно, константа c_2 при втором частном решении, должны быть величинами порядка единицы.

Таким образом, при $\beta \sim \varepsilon\sqrt{R}$, в течении на линии растекания не происходит заметного роста вихревых возмущений.

Этот вывод становится неверным при $\beta_1 \rightarrow 0$, когда возмущения продольной составляющей скорости у стенки становятся бесконечными. С другой стороны, найденное решение становится непригодным для малых $\beta_1 \sim \varepsilon$ или при $\beta \sim 1$. Решение, справедливое при этих значениях β , будем искать, считая, что продольное волновое число удовлетворяет несколько другой оценке $\alpha = \alpha_2\sqrt{R}$, где $\alpha_2 \sim 1$. На самом деле, это предположение является более общим, так как полученные результаты остаются верными и для $\alpha \ll \sqrt{R}$, если выполняется условие $\alpha \gg \beta$. Возмущения скорости и давления в этом случае ищем в виде

$$u = \frac{1}{\sqrt{R}}u_*, \quad v = v_*, \quad w = w_*, \quad p = \frac{1}{R}p_*$$

Их подстановка в линеаризованные уравнения Навье – Стокса (1.6) с граничными условиями (1.7) и пренебрежение членами порядка R^{-1} приводят к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$W_0 u_*' + idu_* = -i\beta p_*$$

$$W_0 v_*' + \left[\frac{1}{r}(2U_0 + W_0) + id \right] v_* + \left(U_0' + \frac{1}{r}U_0 \right) w_* = 0$$

$$W_0 w_*' + [W_0' + id]w_* = 0; \quad w_*' + i\alpha_2 u_* + \frac{1}{r}(v_* + w_*) = 0$$

$$d = -i[\alpha_2^2 - i\beta \cos \chi]$$

$$u_* \rightarrow 0, \quad v_* \rightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta'} \right) e^{-i\beta r}, \quad w_* \rightarrow -\left(\frac{\alpha}{\beta'} \right) e^{-i\beta r}$$

Ее решение находится последовательным интегрированием третьего, затем второго уравнений и имеет достаточно громоздкий вид. Поэтому, не приводя точного выражения для возмущений, ограничимся их асимптотикой при $r \rightarrow 1$, которая потребуется для нахождения решения в пограничном слое

$$u_* \sim -\frac{1+i\chi}{i\alpha_2} C y^{-(i\kappa+2)}, \quad v_* \sim -\frac{1}{2} C y^{-i\kappa}, \quad w_* \sim -C y^{-(i\kappa+1)}$$

$$C = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\beta'} \right) 2^{i\kappa} e^{-i\alpha_2}, \quad \kappa = \frac{\beta}{2}, \quad y = r-1 \quad (2.6)$$

В отличие от случая $\beta \sim \varepsilon/\sqrt{R}$, найденное здесь решение при $\beta \sim 1$ предсказывает усиление возмущений при приближении к стенке, причем наиболее сильно растут пульсации продольной компоненты скорости. Поэтому при исследовании возмущений в пограничном слое ограничимся случаем $\beta \sim 1$.

3. Решение в пограничном слое. В пограничном слое толщиной $1/\sqrt{R}$ будем использовать независимую переменную η , которая применялась для описания основного

течения в этой области. Решение для возмущений скорости и давления представим в виде

$$u = AR_*U(\eta), \quad v = 2AR_*^2 \operatorname{ctg}\chi V(\eta), \quad w = AR_*W(\eta), \quad p = AR_* \sin\chi P(\eta) \quad (3.1)$$

$$A = \frac{e^{-i\alpha_2}}{\sin\chi} (4R_* \operatorname{ctg}\chi)^{i\kappa}, \quad R_* = \sqrt{\frac{R}{2\cos\chi}} \sin\chi$$

Выбранная нормировка позволяет сделать задачу для универсальных функций U, V, W, P независимой от угла стреловидности χ . Подстановка (3.1) в (1.6) и отбрасывание членов порядка R_*^2 приводит к системе уравнений

$$i(\alpha_* G + \omega_*)U + G'W + \frac{1}{R_*}FU' = -i\alpha_*P + \frac{1}{R_*}NU$$

$$i(\alpha_* G - \omega_*)V + \frac{1}{R_*}[-2F'V + FV' - F''W] = \frac{1}{R_*}NV$$

$$i(\alpha_* G - \omega_*)W + \frac{1}{R_*}[F'W + FW'] = -P' + \frac{1}{R_*}NW \quad (3.2)$$

$$i\alpha_*U + V + W' = 0$$

$$N \equiv \frac{d^2}{d\eta^2} - \alpha_*^2, \quad \alpha_* = \frac{\alpha_2}{\sqrt{2\cos\chi}}, \quad \omega_* = \alpha_* + \frac{\beta_r}{2R_*}$$

Аналогичные уравнения использовались в [4] для анализа устойчивости пограничного слоя на линии растекания. В этой работе показано, что из них путем исключения давления может быть получено уравнение для W и V , соответствующее уравнению Орра – Зоммерфельда для пограничного слоя

$$i(\alpha_* G - \omega_*)NW - i\alpha_*G''W + \frac{1}{R_*}(2F'V + F''W + FNW)' = \frac{1}{R_*}N^2W \quad (3.3)$$

Это уравнение вместе со вторым уравнением (3.2), и соответствующими граничными условиями для V и W , получающимися из условий прилипания и срачивания с (2.6)

$$V, W, W'(0) = 0; \quad V \rightarrow 0, \quad W \rightarrow \eta^{-(i\kappa+1)}, \quad \eta \rightarrow \infty \quad (3.4)$$

образуют законченную формулировку задачи для возмущенного течения в пограничном слое. Возмущения продольной компоненты скорости могут быть найдены после ее решения из уравнения неразрывности.

Рассматриваемая система уравнений для V, W является линейной системой шестого порядка, поэтому ее решение есть линейная комбинация шести независимых решений V_i, W_i

$$\{V, W\} = \sum_{i=1}^6 a_i \{V_i, W_i\}(\eta) \quad (3.5)$$

В [4] показано, что вдали от стенки эти решения имеют вид

$$V_1 = 0, \quad W_1 = \eta^{-2+i\kappa} e^{-\eta^2/2}; \quad V_2 = 0, \quad W_2 = e^{-\alpha_*\eta}$$

$$V_3 = \eta^{-3+i\kappa} e^{-\eta^2/2}, \quad W_3 = \eta^{-4+i\kappa} e^{-\eta^2/2}; \quad V_4 = 0, \quad W_4 = \eta^{-(1+i\kappa)}$$

$$V_5 = \frac{\alpha_*}{2(2-i\kappa)} \eta^{2-i\kappa}, \quad W_5 = \eta^{1-i\kappa}; \quad V_6 = 0, \quad W_6 = e^{\alpha_*\eta}$$

При анализе устойчивости пограничного слоя на линии растекания в [4, 5] решение искалось в классе экспоненциально затухающих при $\eta \rightarrow \infty$ функций, являющихся линейной комбинацией первых трех решений. Физический смысл четвертого и пятого решений, названных в [4] непрерывным спектром, оставался невыясненным. Сравнение с условиями во внешнем потоке (3.4) показывает, что четвертое решение им соответствует, а пятое – нет. Поэтому решение будем искать в виде линейной комбинации первых четырех независимых решений. Отметим, однако, что внешние возмущения соответствуют в точности четвертому решению только в рассмотренном здесь частном случае $\beta \sim 1$. В другом исследованном ранее случае $|\beta| \sim \alpha \sim \varepsilon \sqrt{R}$, внешнее решение при $r \rightarrow 1$ (2.5) соответствует пятому решению, которое при $\alpha_* \ll 1$ дает $|v| \sim \eta^2$ и $|w| \sim \eta$. Можно допустить, что при некоторых других предположениях граничные условия даются комбинацией четвертого и пятого решений. Следовательно, оба эти алгебраических решения соответствуют вихревым возмущениям, приходящим из набегающего потока и, в этом смысле, могут называться непрерывным спектром.

Для численного решения системы, состоящей из (3.3) и второго уравнения (3.2), она сводилась к системе шести уравнений первого порядка

$$\Phi' = \mathbf{R}(\Phi); \quad \Phi = \{W, W', W'', V, V'\}$$

которая интегрировалась, начиная от некоторого большого значения $\eta = \eta_m$ до стенки, методом Рунге – Кутты четвертого порядка с использованием процедуры ортогонализации [10]. Начальные условия для нахождения первых четырех линейно независимых решений задавались в виде

$$\Phi_1(\eta_m) = \{1, -\eta_m, \eta_m^2, -\eta_m^3, 0, 0\}; \quad \Phi_2(\eta_m) = \{1, -\alpha_*, \alpha_*^2, -\alpha_*^3, 0, 0\}$$

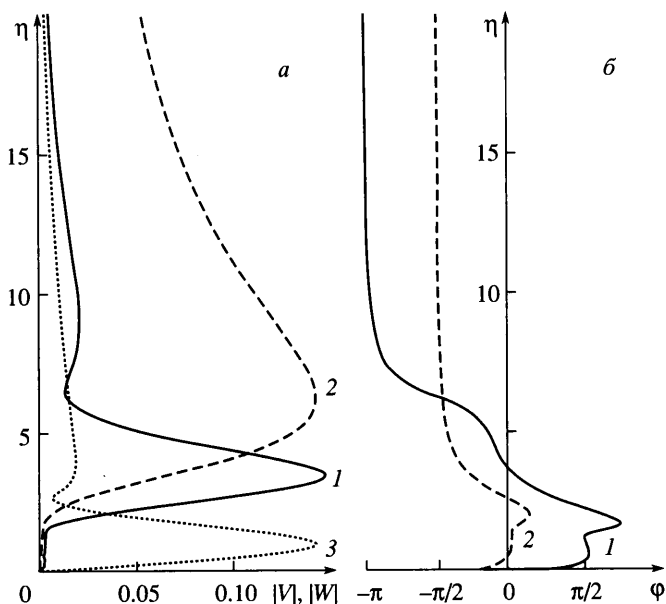
$$\Phi_3(\eta_m) = \{1, -\eta_m, \eta_m^2, -\eta_m^3, \eta_m^{-1}, 1\}$$

$$\Phi_4(\eta_m) = \{\eta_m^{-\gamma}, -\gamma \eta_m^{-(\gamma+1)}, \gamma(\gamma+1) \eta_m^{-(\gamma+2)}, -\gamma(\gamma+1)(\gamma+2) \eta_m^{-(\gamma+3)}, 0, 0\}; \quad \gamma = ik + 1$$

т.е. для первого и третьего решений использовались асимптотические выражения для производных, найденные в предположении постоянства преэкспоненциальных множителей. Константа a_4 полагалась равной единице для удовлетворения граничным условиям при $\eta \rightarrow \infty$, остальные три постоянных a_1, a_2, a_3 находились из трех граничных условий на стенке.

Описанный численный метод можно применить и для нахождения собственных значений и собственных функций задачи об устойчивости пограничного слоя на линии растекания. Для этого нужно положить $a_4 = 0$ и искать значение α_* , при котором детерминант матрицы однородной линейной системы уравнений для нахождения a_1, a_2, a_3 из условий прилипания обращается в нуль. Точность определения собственного значения α_* служила критерием правильности численного алгоритма нахождения решения. Проведенные методические расчеты показали, что собственное значение совпало с результатам [4] до шестого знака после запятой при $\eta_m = 100$ и шаге интегрирования $\Delta\eta = 0.01$. Такое совпадение позволяет считать численный метод практически абсолютно точным. Также было установлено, что шага $\Delta\eta = 0.03$ достаточно для получения собственного значения с точностью до 10^{-5} . Собственные функции при этом, с точностью до толщины линии на рисунке, совпали с найденными в [4]. Поэтому выбранный для проведения основных расчетов шаг $\Delta\eta = 0.025$ представляется достаточным для получения решения неоднородной задачи с необходимой точностью. Приводимые ниже результаты получены при $\eta_m = 200$. Независимость результатов от положения границы расчетной области контролировалась путем повторения части расчетов при $\eta_m = 300$. Незначительные расхождения в зависимостях $U(\eta)$ (до 3%) имели место только при малых $\alpha_* < 0.04$.

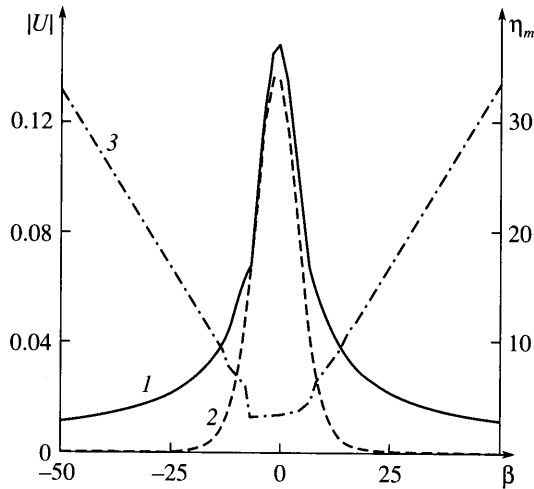
Типичное решение для безразмерных продольной U и вертикальной W составляющих скорости, найденное при $\alpha_* = 0.1, R_* = 300, \beta_r = 0$, показано на фиг. 3. Из дальней-



Фиг. 3. Профили амплитуды (а) и фазы (б) возмущений скорости в пограничном слое $U(1)$, $W(2)$ при $\alpha_* = 0.1$, $R_* = 300$, $\beta = 0$. Кривая 3 — $|U|$ для собственных возмущений при $\omega_* = 0.033$, $R_* = 300$

шего станет ясно, что выбранные значения волновых чисел примерно соответствуют максимуму возмущений. Решение для трансверсальной составляющей скорости V на фиг. 3 не показано, так как оно настолько мало ($V \sim 10^{-6}$), что даже учитывая множитель R_*^2 в выражении для v , возмущениями этой компоненты скорости можно пренебречь на фоне u и w . Из фиг. 3 видно, что возмущения продольной скорости максимальны на внешней границе пограничного слоя. Вдали от стенки имеется еще один побочный максимум, в котором пульсации находятся в противофазе с главным максимумом. В этом полученное решение похоже на волну неустойчивости в пограничном слое на линии растекания, профиль $|U|(\eta)$, для которой при $R_* = 300$ и $\omega_* = 0.033$ построен пунктирной линией на фиг. 3а. Собственное значение $\alpha_* = 0.10217 + i0.0250$ при выбранных параметрах почти совпадает с продольным волновым числом для вынужденного решения. Сравнение собственного и вынужденного решений показывает, что пульсации, порождаемые внешней завихренностью, практически не проникают во внутреннюю часть пограничного слоя, в то время как собственное решение именно там максимально. Это различие вызвано разными фазовыми скоростями собственных и вынужденных возмущений.

Зависимость решения при тех же α_* и R_* от действительной части поперечного волнового числа β_r иллюстрируют фиг. 4 и 5. Заметим, что мнимая часть β , при сделанных предположениях, полностью определяется продольным волновым числом $\beta_i = 2\alpha_*^2 + O(R_*^{-1})$. В дальнейшем, говоря о поперечном волновом числе, будем иметь в виду только его действительную часть. Из фиг. 4 видно, что возмущения в пограничном слое максимальны при $\beta = 0$ и ослабевают при возрастании $|\beta|$ независимо от зна-



Фиг. 4. Зависимость амплитуды возмущений продольной составляющей скорости от β при $\alpha_* = 0.1$, $R_* = 300$. Максимальная амплитуда $\max |U| - (1)$, $|U|$ при $\eta = 3 - (2)$. Кривая 3 – положение максимума η

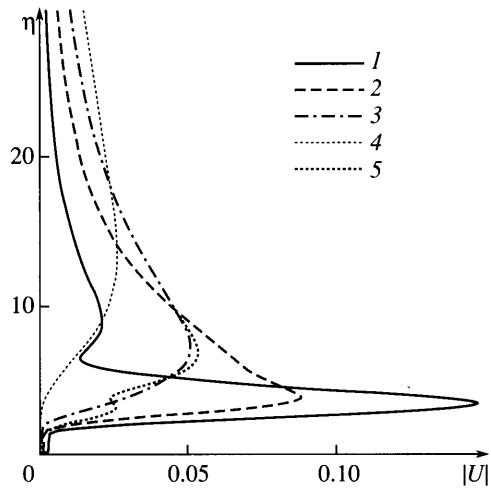
ка поперечного волнового числа. Наиболее быстро убывают возмущения при фиксированном расстоянии от стенки $\eta = 3$, а максимальные по вертикальной координате пульсации затухают значительно слабее. Это вызвано смещением максимума $|U|(\eta)$ от стенки при увеличении $|\beta|$, что иллюстрирует соответствующая зависимость на фиг. 4.

Вертикальные профили пульсаций скорости в пограничном слое для нескольких характерных значений поперечного волнового числа показаны на фиг. 5. Из них видно, что уже при небольшом положительном $\beta = 5$ пропадает верхний максимум пульсаций и происходит небольшое смещение основного максимума вверх. При дальнейшем увеличении β максимум быстро смещается от стенки и возмущения вытесняются из пограничного слоя. Это происходит из-за того, что при $\beta \neq 0$ внешнее решение осциллирует по r , причем при $r \rightarrow 1$ период осцилляций стремится к нулю. В результате еще над пограничным слоем, из-за больших вертикальных градиентов u , действие вязкости приводит к прекращению роста решения при приближении к стенке и его затуханию. Особенностью профилей пульсаций при отрицательных β является наличие двух максимумов. Верхний примерно соответствует максимуму при равном по модулю положительном β , а нижний – максимуму при $\beta = 0$. Поведение решения вдали от стенки при равных по модулю положительных и отрицательных β одинаково, что соответствует свойству независимости модуля внешнего решения от знака β .

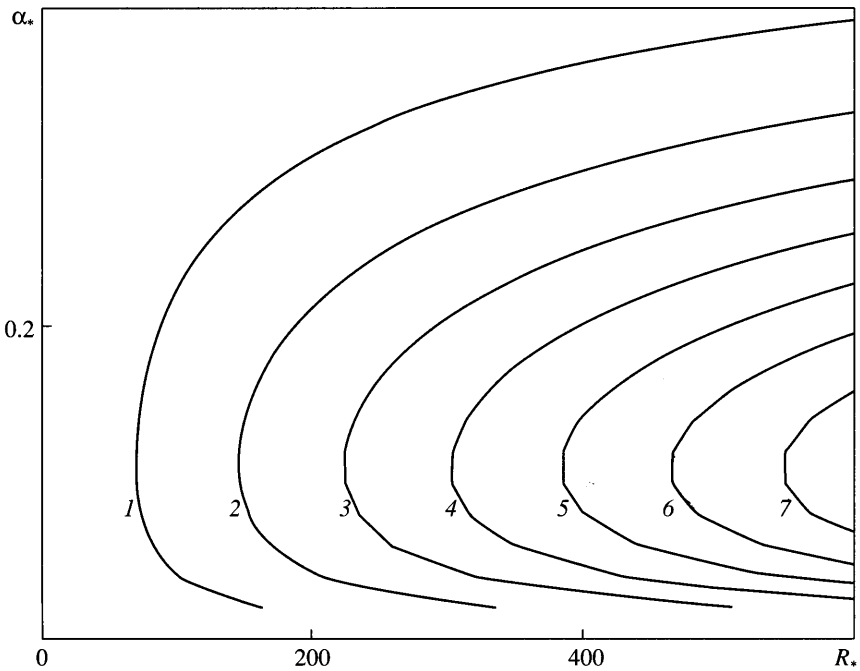
В качестве меры усиления возмущений рассмотрим отношение амплитуд максимальных пульсаций продольной составляющей скорости в пограничном слое и в набегающем потоке. Для определенности, за пульсации в потоке примем амплитуду возмущений в месте расположения линии растекания, т.е. при $\xi = -1$ в (1.1). Из (3.1) и (1.1) следует, что введенный коэффициент усиления k дается соотношением

$$k = \frac{(2R_* \operatorname{ctg} \chi)^{1-\alpha_*^2}}{2 \cos \chi} U_m(\alpha_*, R_*)$$

где U_m – максимум модуля $U(\eta)$. На фиг. 6 изолиниями показана зависимость коэффициента усиления от α_* и R_* , полученная при $\chi = \pi/4$. Эти данные соответствуют $\beta = 0$,



Фиг. 5. Профили амплитуды возмущений продольной составляющей скорости $|U|$ для $\beta = 0, 5, 10, 20, -10$ (кривые 1–5)



Фиг. 6. Зависимости коэффициента усиления возмущений k от R_* и α_* . Изолинии 1–7 соответствуют значениям k от 10 до 70 с шагом 10

при котором достигается максимум возмущений по поперечному волновому числу. Максимальное усиление возмущений при всех числах Рейнольдса наблюдается при $\alpha_* \approx 0.1$. Максимум по α_* обусловлен действием двух противоположных факторов: увеличением нормированной амплитуды пульсаций U_m и резким уменьшением множителя $R_*^{1-\alpha_*^2}$ при возрастании продольного волнового числа. Максимальный по α_* коэффициент усиления зависит почти линейно от числа Рейнольдса R_* , вычисленного по характерной толщине пограничного слоя. Такая же зависимость коэффициента усиления вихревых возмущений от числа Рейнольдса имеет место и для пограничного слоя на плоской пластине [11, 12]. Поэтому можно предположить, что, как и для плоской пластины, должна наблюдаться обратно пропорциональная зависимость числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода на линии растекания от степени турбулентности набегающего потока.

Заключение. Решена задача о восприимчивости пограничного слоя на линии растекания наклонно обтекаемого цилиндра к периодическим вихревым возмущениям набегающего потока. Она моделирует порождение турбулентностью потока возмущений в пограничном слое на передней кромке скользящего крыла. Такое течение наиболее восприимчиво к возмущениям, продольный и поперечный периоды которых порядка толщины пограничного слоя, а волновой вектор направлен параллельно оси цилиндра. В пограничном слое они порождают пульсации продольной (вдоль оси цилиндра) и нормальной к поверхности составляющих скорости, которые сосредоточены на его верхней границе. Фазовая скорость этих возмущений близка к скорости внешнего течения вдоль линии растекания. Порождаемые внешней завихренностью возмущения описываются алгебраически затухающим на бесконечности решением уравнений, описывающих неустойчивость течения на линии растекания. Коэффициент усиления пульсаций скорости вблизи линии растекания пропорционален числу Рейнольдса, вычисленному по толщине пограничного слоя, и может достигать ≈ 50 для докритических чисел Рейнольдса. Рассмотренный механизм усиления вихревых возмущений аналогичен алгебраическому росту полосчатой структуры в пограничном слое на плоской пластине и может быть причиной ламинарно-турбулентного перехода на линии растекания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 04-01-00632) и Государственной программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1984.2003.1)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Poll D.I.A.* Transition in the infinite swept attachment line boundary layer // *Aeronaut. Quart.* 1979. V. 30. № 4. P. 607–629.
2. *Poll D.I.A.* Development of intermittent turbulence on a swept attachment line including the effects of compressibility // *Aeronaut. Quart.* 1983. V. 34. № 1. P. 1–23.
3. *Poll D.I.A., Poisley D.J.* On the effect of wing taper and sweep direction on leading edge transition // *Aeronaut. J.* 1985. V. 89. № 889. P. 109–117.
4. *Hall P., Malik M.R., Poll D.I.A.* On the stability of an infinite swept attachment line boundary layer // *Proc. Roy. Soc. London. ser. A.* 1984. V. 395. № 1809. P. 229–245.
5. *Казаков А.В.* Влияние температуры поверхности на устойчивость пограничного слоя на линии присоединения скользящего крыла // *Изв. АН СССР МЖГ.* 1990. № 6. С. 78–82.
6. *Bertolotti F.P.* On the connection between cross-flow vortices and attachment-line instabilities // *IUTAM Symp. on Laminar-Turbulent Transition.* Sedona, USA, 1999. Berlin etc.: Springer, 1999. P. 625–630.
7. *Deyhle H., Bippes H.* Disturbances growth in an unstable three-dimensional boundary layer and its dependence on environmental conditions // *J. Fluid Mech.* 1996. V. 316. P. 73–113.

8. *Golstein M.E., Leib S.J., Cowley S.J.* Distortion of a flat plate boundary layer by free-stream vorticity normal to the plate // *J. Fluid Mech.* 1992. V. 237. P. 231–260.
9. *Устинов М.В.* Восприимчивость пограничного слоя на скользящем крыле к стационарной неоднородности потока // *Изв. РАН. МЖГ.* 2001. № 3. С. 111–121.
10. *Годунов С.К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // *Успехи мат. наук.* 1961. Т. 16. Вып. 3. С. 171–174.
11. *Andersson P., Berggren M., Henningson D.S.* Optimal disturbances and bypass transition in boundary layers // *Phys. Fluids.* 1999. V. 11. № 1. P. 134–150.
12. *Luchini P.* Reynolds-number-independent instability of the boundary layer over a flat surface: optimal perturbations // *J. Fluid Mech.* 2000. V. 404. P. 289–309.

Москва
E-mail: ustinov@stb.aerocentr.msk.su

Поступила в редакцию
26.I.2004