

УДК 532.517:536.24

© 2004 г. А. А. БАРМИН, Е. А. ВЕДЕНЕЕВА, О. Э. МЕЛЬНИК

## НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ СИЛЬНОВЯЗКОЙ МАГМЫ В КАНАЛЕ ВУЛКАНА С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ВЯЗКОЙ ДИССИПАЦИИ

Построена двумерная неизотермическая модель течения магмы в канале вулкана, позволяющая исследовать влияние процессов вязкой диссипации и теплопроводности на течение магмы. Установлено, что влияние этих процессов существенно, особенно в случае больших расходов. Показано, что сопротивление канала вулкана, вычисленное по формуле Пуазейля, которое широко применяется в одномерных моделях, в случае больших расходов сильно завышено. Это связано с образованием сильно разогретого слоя жидкости с пониженной вязкостью в пристеночной области канала. В рамках приведенной модели возможны извержения с расходами, в несколько раз превышающими расходы, полученные в рамках аналогичных одномерных моделей.

*Ключевые слова:* вязкая диссипация, переменный коэффициент вязкости, сопротивление канала, эксплозивные вулканические извержения, расход магмы.

Вулканические извержения представляют собой подъем магмы, находящейся в недрах Земли, на ее поверхность. Магмой называют расплавленные горные породы (расплав), содержащие растворенный газ. Считают, что магма накапливается в очаге извержения, расположенном на глубине нескольких километров, а затем выбрасывается на поверхность по каналу вулкана. Различают экструзивные (лавовые) и эксплозивные (взрывные) извержения. Во время экструзивных извержений из жерла вулкана вытекают потоки жидкой магмы – лавы. Намного более разрушительными являются эксплозивные извержения, характерные для сильновязких магм, когда на поверхность вырывается поток газа, несущий частицы раздробленного расплава.

При подъеме магмы из очага извержения, за счет выделения из расплава растворенного в нем газа, в магме происходит образование и рост пузырьков – магма превращается в пузырьковую жидкость. Во время эксплозивных извержений при достижении некоторых критических условий происходит фрагментация пузырьковой жидкости с образованием газовзвеси, во время экструзивных извержений фрагментации не происходит. При эксплозивном извержении, считая, что переходная зона от течения пузырьковой жидкости к течению газовзвеси узкая [1], течение магмы в канале полагают состоящим из двух зон – зоны течения пузырьковой жидкости и зоны течения газовзвеси, разделенных фронтом фрагментации. Течение в обеих зонах обычно считают одномерным и изотермическим, течение в зоне пузырьковой жидкости предполагают ламинарным, в зоне газовзвеси – турбулентным [1–3]. При этом сопротивление стенок канала вулкана в зоне течения пузырьковой жидкости вычисляют по формуле Пуазейля. Данное приближение справедливо для ламинарного течения несжимаемой жидкости с постоянной вязкостью.

В настоящей работе предлагается двумерная неизотермическая (в зоне течения пузырьковой жидкости) модель стационарного течения магмы в круглом цилиндрическом канале, позволяющая учесть процессы вязкой диссипации и теплопроводности. Вязкость магмы считается зависящей от температуры и концентрации растворенного в ней газа.

Задачи о перестройке течений вязких жидкостей в каналах с коэффициентом вязкости, зависящим от температуры, решались в [4–7]. В [4, с. 364–375] рассмотрено стационарное течение жидкости в круглой цилиндрической трубе в предположениях, что скорость имеет единственную компоненту, направленную по оси трубы, и температура не зависит от радиальной переменной. Найдены три специфические зависимости вязкости от температуры, позволяющие получить аналитические решения. В [5–7] использована экспоненциальная зависимость вязкости от температуры.

В [5] рассмотрено нестационарное течение вязкой жидкости в круглой трубе с заданной постоянной температурой на стенках. Конвективными членами пренебрегается, считается, что градиент давления равен заданной постоянной величине, а скорость имеет единственную продольную компоненту. Все величины зависят только от радиальной переменной и времени. Для фиксированного сечения трубы получены эффекты перестройки профиля скорости из параболического в прямоугольный и разогрева жидкости у стенок трубы с течением времени.

В [6, 7] рассмотрены стационарные течения жидкости в плоской щели, на стенках которой поддерживается постоянная температура, а на входе заданы температура и профиль скорости. В [7], как и в [4, 5], предполагалось, что скорость имеет только продольную компоненту. Задача решалась применительно к течению магмы в лавовых трубах. В [6] решение строилось асимптотическими методами, в [7] – численно. В [6, 7] показано, что течение жидкости в щели эволюционирует вниз по потоку от течения с параболическим профилем скорости, заданным на входе, к течению с плоским профилем скорости, характерным для течения идеальной жидкости. При этом на стенках образуются горячие пограничные слои с большим градиентом скорости. Таким образом происходит перестройка течения, аналогичная полученной в [5].

Наиболее важным, с точки зрения безопасности, является вопрос предсказания интенсивности вулканического извержения. Поэтому, в настоящей работе, в отличие от [4–7], решается краевая задача определения расхода магмы по заданному перепаду давления на входе и выходе из канала заданной длины. Предполагается, что вязкость зависит не только от температуры, но и от концентрации растворенного в магме газа. При этом берется реальная зависимость вязкости от температуры и концентрации, полученная на основе современных экспериментальных данных [8]. В отличие от [6, 7], канал считается круглым цилиндрическим, а не плоской щелью.

Ниже изучается влияние процессов вязкой диссипации и теплопроводности на динамику извержения. В случае больших расходов сопротивление канала качественно отличается от используемого в одномерных изотермических моделях: при подъеме по каналу сопротивление падает, тогда как в одномерных моделях – растет. Получен эффект значительного увеличения интенсивности извержения по сравнению с аналогичной одномерной изотермической моделью.

**1. Математическая модель.** Рассматривается стационарное течение магмы в круглом цилиндрическом канале, которое в случае эксплозивных извержений моделируется состоящим из двух зон: зоны течения пузырьковой жидкости и зоны течения газозвеси, разделенных плоским фронтом фрагментации, перпендикулярным оси канала. В случае экструзивных извержений весь канал заполнен пузырьковой жидкостью. В зоне течения пузырьковой жидкости магма представляет собой несжимаемую вязкую теплопроводную многокомпонентную жидкость, состоящую из расплава, газа, растворенного в этом расплаве, и пузырьков газа, влиянием которых на сжимаемость магмы пренебрегается. Вязкость магмы зависит от температуры и концентрации растворенного в ней газа. Температура изменяется за счет процессов вязкой диссипации и теплопроводности. Течение магмы в зоне пузырьковой жидкости считается ламинарным, двумерным, осесимметричным. Такое течение осуществляется до тех пор, пока в магме не достигается критерий фрагментации – критическое условие, по достижении которого магма превращается из пузырьковой жидкости в газозвесь. В зоне те-

чения газовой магии представляет собой совершенный газ, несущий частицы расплава, содержащие растворенный газ. Скорости несущего газа и частиц полагаются одинаковыми. Так как в зоне газовой магии течение турбулентное [1–3], рассматриваются только средние по сечению характеристики течения, течение считается одномерным. Изменением средней температуры магии и сопротивлением стенок канала вулкана в зоне течения газовой магии пренебрегается [2].

Система безразмерных уравнений, описывающая течение магии в зоне пузырьковой жидкости, получена из уравнений Навье – Стокса для случая узких каналов длины  $L$ , много большей их радиуса  $R$ , когда течение достаточно медленное, т.е. при числах Рейнольдса:  $Re \approx L/R$ . В цилиндрической системе координат она имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rw) + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \alpha \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu \frac{\partial v}{\partial r} \right) - k \quad (1.2)$$

$$w \frac{\partial T}{\partial r} + v \frac{\partial T}{\partial z} = \beta \mu \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \gamma \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (1.3)$$

$$\mu(c_g, T) = \frac{1}{\mu_0} 10^{A(c_g, T)} \quad (1.4)$$

$$A(c_g, T) = 0.291 + 0.833 \ln(c_g) - \frac{1304 + 2368 \ln(c_g)}{(T + 1)T_0 - (344.2 + 32.25 \ln(c_g))} \quad (1.5)$$

$$c_g = c_{g0} \sqrt{p} \quad (c_{g0} \sqrt{p} < c_{gm}), \quad c_g = c_{gm} \quad (c_{g0} \sqrt{p} \geq c_{gm})$$

$$c_{g0} = C_f \sqrt{p_0}$$

$$\alpha = \frac{\mu_0}{\rho_m v_0 R} \frac{\rho_m v_0^2}{p_0} = \frac{2}{ReEu}, \quad k = \frac{\rho_m v_0^2 g R}{p_0 v_0^2} = \frac{2}{EuFr^2} \quad (1.6)$$

$$\beta = \frac{\mu_0}{\rho_m v_0 R c T_0} \frac{v_0^2}{Re c T_0}, \quad \gamma = \frac{\kappa}{\rho_m c v_0 R} = \frac{1}{Pe}$$

Здесь (1.1) – уравнение неразрывности, (1.2) – уравнение импульсов, (1.3) – уравнение притока тепла, (1.4) – эмпирическая формула для вязкости магии [8], (1.5) – закон растворимости, (1.6) – безразмерные параметры задачи. Оси  $z$  и  $r$  направлены соответственно вдоль канала и по радиусу,  $z \in [0; L/R]$ ,  $r \in [0; 1]$ ;  $v$  и  $w$  в зоне течения пузырьковой жидкости – продольная и радиальная составляющие скорости;  $p$ ,  $\mu$ ,  $T$  и  $c_g$  – давление, вязкость, приращение температуры магии относительно заданной на входе в канал и массовая концентрация растворенного в магии газа соответственно;  $v_0$ ,  $p_0$ ,  $T_0$ ,  $\mu_0$  – характерные размерные значения скорости, давления, температуры и вязкости, при помощи которых были получены безразмерные уравнения (1.1)–(1.3);  $p_0$ ,  $T_0$  – литостатическое давление и температура на входе в канал,  $\mu_0$  – вязкость, определяемая из формулы (1.4) по заданным  $p_0$  и  $T_0$  (при  $p = 1$ ,  $T = 0$ ,  $\mu = 1$ );  $c_{gm}$  – максимальная концентрация растворенного газа в расплаве, при которой происходит нуклеация пузырьков;  $\rho_m$  – размерная истинная плотность расплава;  $c$ ,  $\kappa$ ,  $C_f$  – размерные теплоемкость, коэффициенты теплопроводности магии и растворимости газа в магии, счита-

ющиеся постоянными;  $g$  – ускорение силы тяжести. При переходе к безразмерным переменным за характерную длину принимается радиус канала  $R$ . Так как плотность газа в пузырьках много меньше плотности расплава и концентрация пузырьков в зоне течения пузырьковой жидкости относительно небольшая, полагается, что плотность магмы равна плотности расплава  $\rho_m$ .

На входе в канал задаются параболический профиль скорости и постоянные давление и температура

$$z = 0: v(r, 0) = 2v_a(1 - r^2), \quad w(r, 0) = 0, \quad p(0) = p_{in}, \quad T(r, 0) = 0$$

где  $v_a$  – средняя по сечению безразмерная скорость течения магмы, которая в силу несжимаемости постоянна в зоне течения пузырьковой жидкости. Она определяет безразмерный массовый расход магмы  $Q = \pi v_a$  и является искомой величиной.

На оси канала ставятся условия симметрии течения

$$r = 0: \frac{\partial v}{\partial r}(0, z) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r}(0, z) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r}(0, z) = 0$$

на стенке – условия прилипания для скорости и адиабатичности (или изотермичности) для температуры

$$r = 1: v(1, z) = 0, \quad w(1, z) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r}(1, z) = 0 \quad (T(1, z) = \text{const} = 0)$$

В случае изотермических граничных условий температура стенки канала считается равной температуре магмы на входе в канал.

Переход от течения пузырьковой жидкости к течению газозвеси осуществляется при достижении критической концентрации пузырьков в магме, принятой за критерий фрагментации:  $\alpha_g = \alpha_{gf}$ , [9].

Следует отметить, что в приведенной модели течения магмы в зоне пузырьковой жидкости не учитывается ряд эффектов, которые могут оказать влияние на динамику извержения. Не учтена сжимаемость магмы за счет наличия в ней пузырьков. Типичная концентрация пузырьков в магме при фрагментации составляет 50–70%, из-за этого реальная скорость перед фрагментацией может увеличиваться в 2–3 раза по сравнению со скоростью гомогенной жидкости. Поэтому предположение о несжимаемости магмы является очень сильным и будет преодолено в дальнейших исследованиях. Концентрация растворенного в магме газа вычисляется из равновесного закона растворимости, который не применим в случае больших скоростей течения магмы, когда диффузионная задержка роста пузырьков оказывает существенное влияние [10]. Использованы идеализированные граничные условия для температуры на стенках канала. Так, во время некоторых извержений магма внедряется в холодный канал, и тепловые потери в окружающие породы могут быть существенными.

Система безразмерных уравнений для осредненных по сечению величин, описывающая течение магмы в зоне газозвеси, имеет вид

$$(\rho_g \alpha_g + (1 - \alpha_g) c_g) v = c_{gm} v_a \quad (1.7)$$

$$(1 - \alpha_g)(1 - c_g) v = (1 - c_{gm}) v_a \quad (1.8)$$

$$\delta \rho v \frac{dv}{dz} = - \frac{dp}{dz} - k\rho, \quad \delta = \frac{\rho_m v_0^2}{p_0} = \frac{2}{Eu}, \quad \rho = \rho_g \alpha_g + (1 - \alpha_g) \quad (1.9)$$

$$\rho_g = \rho_{g0} P, \quad \rho_{g0} = \frac{P_0}{\rho_m R_g T_0} \quad (1.10)$$

Здесь  $c_g$  определяется формулой (1.5); (1.7), (1.8) – уравнения неразрывности для газа и расплава соответственно, (1.9) – уравнение импульсов для смеси в целом, (1.10) – уравнение состояния для газа.  $\rho_g$  – истинная плотность газа,  $\alpha_g$  – объемная концентрация свободного газа,  $v$  в зоне течения газозвеси – средняя по сечению скорость течения,  $\rho$  – плотность смеси;  $R_g$  – газовая постоянная. При переходе к безразмерным переменным за характерную плотность принимается истинная плотность расплава  $\rho_m$ , считающаяся постоянной в обеих зонах течения магмы. В зоне газозвеси можно пренебречь изменением средней температуры магмы и считать ее равной средней температуре после фрагментации [2]. Так как при численном моделировании течения в зоне пузырьковой жидкости для реальных значений параметров оказалось, что магма разогревается только в очень узкой пристеночной зоне и не более чем в 3 раза, среднюю температуру газозвеси можно считать равной температуре  $T_0$ , заданной на входе в канал.

Если зависимость  $p(z)$  является взаимно однозначной, систему уравнений (1.7)–(1.10) можно привести к виду

$$\frac{dp}{dz} = \frac{1}{f(p)}, \quad f(p) = -\frac{v(p)}{k} \left( \frac{1}{v_a} + \delta \frac{dv}{dp} \right) \quad (1.11)$$

$$v(p) = \frac{v_a}{\rho_g(p)\alpha_g(p) + (1 - \alpha_g(p))}, \quad \rho_g(p) = \rho_{g0}p \quad (1.12)$$

$$\alpha_g(p) = \frac{C(p)}{\rho_g(p) + C(p)}, \quad C(p) = \frac{c_{gm} - c_g(p)}{1 - c_{gm}} \quad (1.13)$$

где зависимость  $c_g(p)$  определяется формулой (1.5).

Для того чтобы зависимость  $p(z)$  была взаимно однозначной достаточно, чтобы  $f(p) \neq 0$  для всего рассматриваемого интервала давлений. Из закона сохранения массы для всей смеси:  $\rho v = v_a$ , имеем

$$\frac{dv}{dp} = \frac{d}{dp} \left( \frac{v_a}{\rho} \right) = -\frac{1}{\delta v_a} M^2, \quad M = \frac{v}{a}, \quad a = \sqrt{\frac{1}{\delta} \frac{dp}{\rho}} \quad (1.14)$$

где  $M$  – число Маха,  $a$  – безразмерная скорость звука. Согласно (1.11) и (1.14),  $f(p) = 0$ , если  $M^2 = 1$ . Таким образом, зависимость  $p(z)$  взаимно однозначна, пока скорость течения не достигла местной скорости звука.

Из уравнения (1.11) можно найти положение фронта фрагментации  $z_f$

$$z_f = \frac{L}{R} - \int_{p_f}^{p_{out}} f(p) dp, \quad p_{out} = p(L/R) \quad (1.15)$$

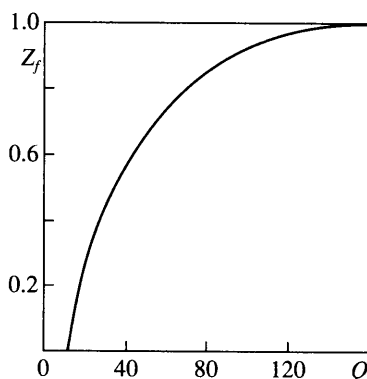
где  $p_f$  – давление, при котором достигается критическая концентрация пузырьков:  $\alpha_g = \alpha_{gf}$ . Давление фрагментации  $p_f$  находится из условия  $\alpha_g = \alpha_{gf}$  и уравнения (1.13), с учетом (1.5)

$$p_f = \left( \frac{-c_{g0}(1 - \alpha_{gf}) + \sqrt{c_{g0}^2(1 - \alpha_{gf})^2 + 4\alpha_{gf}\rho_{g0}(1 - c_{gm})c_{gm}(1 - \alpha_{gf})}}{2\alpha_{gf}\rho_{g0}(1 - c_{gm})} \right)^2$$

Давление  $p_f$  не зависит от скорости течения магмы.

Давление на выходе из канала  $p_{out}$  задается формулой

$$p_{out} = p_a \quad (p' \leq p_a), \quad p_{out} = p' \quad (p' > p_a)$$



Фиг. 1. Зависимость относительного положения фронта фрагментации  $Z_f = z_f(L/R)$  от расхода магмы  $Q$

где  $p_a$  – безразмерное атмосферное давление;  $p'$  – корень уравнения  $f(p) = 0$ , значение которого зависит от расхода магмы  $Q = \pi r v = \text{const} = \pi v_a$  как от параметра. Для значений параметров, отвечающих течению магмы в канале вулкана, функция  $f(p)$ , согласно проведенным численным экспериментам, имеет единственный корень, лежащий в интервале возможного изменения давления.

На фиг. 1 приведено положение фронта фрагментации  $z_f$  в зависимости от расхода магмы  $Q$  для характерных при течении магмы в канале вулкана значений параметров, приведенных ниже.

Таким образом, поставлена задача определения зависимости расхода магмы  $Q$  от давления, задаваемого на входе в канал  $p_{in}$ . Зависимость  $Q(p_{in})$  может быть неоднозначной, поэтому находилась обратная однозначная зависимость  $p_{in}(Q)$  [2].

Задача решалась численно. По заданному расходу  $Q$  давление на входе в канал  $p_{in}$  находилось методом пристрелки. Метод состоит в подборе неизвестного давления  $p_{in}$  на входе в канал из условия равенства суммы длин зон течения пузырьковой жидкости и газозвеси заданной длине канала. На каждом этапе пристрелки длина зоны течения пузырьковой жидкости определялась из решения системы уравнений в частных производных (1.1)–(1.3), а длина зоны течения газозвеси – по формуле (1.15).

Система уравнений (1.1)–(1.3) относительно давления, двух компонент скорости и температуры решалась методом конечных разностей отдельно в каждом поперечном расчетном сечении канала последовательно вниз по потоку, пока не достигалось давление фрагментации  $p_f$ . В каждом расчетном сечении неизвестное давление в этом сечении находилось методом пристрелки из условия прилипания на стенке для радиальной компоненты скорости. При фиксированном значении давления в расчетном сечении скорость и температура находились методом матричной прогонки [11].

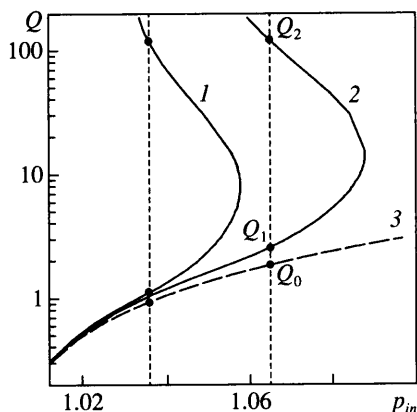
**2. Результаты расчетов.** Ниже приведены численные расчеты для характерных для течения магмы в канале вулкана значений параметров

$$R = 25 \text{ м}, \quad L = 5000 \text{ м}, \quad v_0 = 1.0 \text{ м/с}$$

$$p_0 = \rho_m g L + p_{atm} = 122.6 \text{ МПа}, \quad g = 9.8 \text{ м/с}^2, \quad \rho_m = 2500 \text{ кг/м}^3$$

$$\mu_0 = 3.7 \times 10^4 \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad T_0 = 1123 \text{ К}, \quad C_f = 4.1 \times 10^{-6} \text{ Па}^{1/2}, \quad c_{gm} = 0.05$$

$$c = 1200 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \quad \kappa = 0.8 \text{ Дж/(м} \cdot \text{с} \cdot \text{К)}, \quad \alpha_{gf} = 0.7$$



Фиг. 2. Зависимость расхода магмы  $Q$  от давления  $p_{in}$  на входе в канал для адиабатического и изотермического условий на стенке канала при экструзивном извержении (кривые 1, 2). Кривая 3 – та же зависимость, полученная в рамках одномерной изотермической модели;  $Q_0 = 1.9$ ,  $Q_1 = 2.6$ ,  $Q_2 = 125.6$

Это соответствует значению безразмерных величин

$$Re = 1.7, \quad Eu = 9.8 \times 10^4, \quad Fr = 6.4 \times 10^{-2}$$

$$Pr = 9.4 \times 10^7, \quad \frac{v_0^2}{cT_0} = 7.4 \times 10^{-7}$$

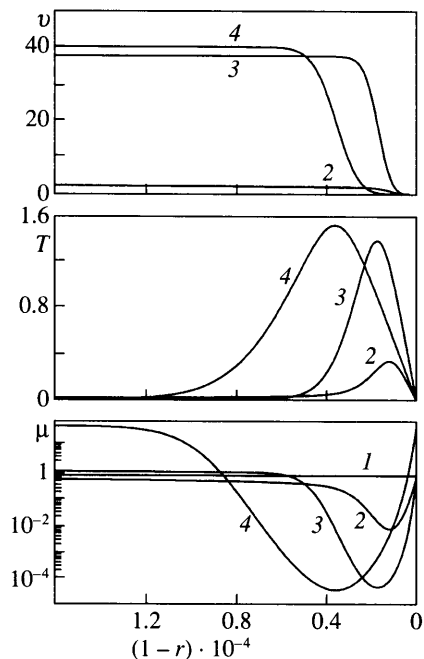
Сначала рассмотрим задачу в случае фиксированной длины зоны течения пузырьковой жидкости, равной  $L/R$ . Такое течение соответствует течению магмы в канале без фрагментации, т.е. экструзивному типу извержения.

На фиг. 2 представлены зависимости расхода  $Q$  магмы от давления  $p_{in}$  на входе в канал для адиабатического и изотермического условий на стенке (кривые 1–2). Штриховой линией (3) представлена та же зависимость для случая изотермического течения, когда профиль скорости является параболическим, а вязкость зависит только от концентрации растворенного газа в магме.

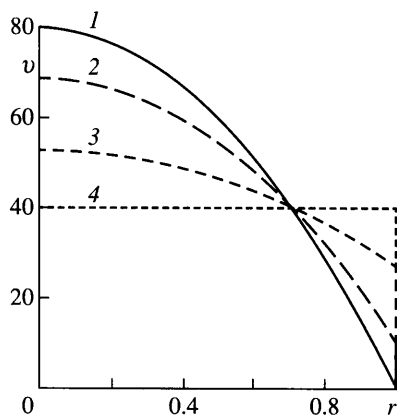
Для малых избыточных давлений на входе в канал (относительно литостатического) все три кривые практически совпадают. При увеличении давления  $p_{in}$  в случае неизотермической модели реализуются течения с большими расходами, чем в рамках изотермической модели. Причем для адиабатического условия на стенке расходы больше, чем для изотермического условия. В неизотермической модели зависимость  $Q(p_{in})$  неоднозначна: существуют давления  $p_{in}$ , которым отвечают два значения расхода  $Q_1$  и  $Q_2$ , т.е. при заданных длине канала и перепаде давления могут реализовываться два режима течения с существенно разными расходами. Существует критическое давление  $p_{in}$ , такое, что при больших давлениях на входе в канал решения не существует.

Для объяснения полученных результатов рассмотрим динамику течения магмы в канале. На фиг. 3 для изотермического условия на стенке приведены распределения продольной компоненты скорости  $v$ , температуры  $T$  и вязкости  $\mu$  по радиусу  $r$  в различных сечениях канала в пристеночной области для расхода  $Q_2$ .

Изменение вязкости магмы происходит за счет двух конкурирующих процессов. С одной стороны, вниз по потоку давление уменьшается и соответственно уменьшается концентрация растворенного в магме газа (см. (1.5)), а вязкость магмы увеличивает



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 3. Распределение скорости, температуры и вязкости в пристеночной зоне для сечений канала:  $z = 0, 2.5, 50, 200$  (кривые 1–4) для  $Q_2 = 125.6$ . Сечение  $z = 200$  соответствует выходу из канала

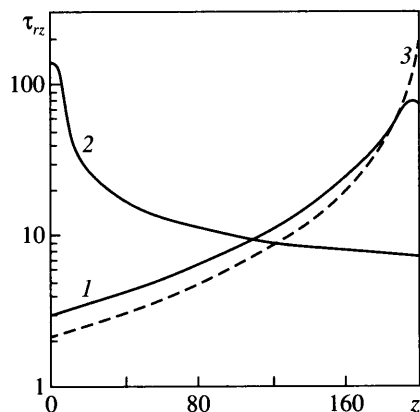
Фиг. 4. Распределение скорости в сечениях канала:  $z = 0, 5, 10, 200$  (кривые 1–4) для  $Q_2 = 125.6$ . Сечение  $z = 200$  соответствует выходу из канала

ся. С другой стороны, за счет вязкого трения происходит выделение тепла. Оно наиболее интенсивно вблизи стенок, где вследствие условия прилипания велики градиенты скорости. За счет теплопроводности тепло перетекает от стенок к центральной части канала, однако для рассматриваемых значений параметров процессы передачи тепла невелики. Таким образом, около стенок канала образуется узкий разогретый слой жидкости, температура в котором растет вниз по потоку, а вязкость жидкости уменьшается. Вследствие этого параболический профиль скорости (заданный на входе в канал и отвечающий изотермическому течению) начинает изменяться и приближаться к прямоугольному профилю, как при течении идеальной жидкости (фиг. 4). При этом перепад давления, обеспечивающий течение магмы с данным расходом, становится меньше (для идеальной жидкости он равен нулю).

На фиг. 5 для расходов  $Q_1$  и  $Q_2$  показано изменение сопротивления канала (компоненты тензора напряжений  $\tau_{rz}(1, z) = (\mu v_r')|_{r=1}$ ) по оси  $z$ . Для сравнения для расхода  $Q_0$  показано изменение сопротивления стенок канала, полученное в изотермической модели по формуле Пуазейля, которая в безразмерных переменных имеет вид:  $\tau_{rz}(1, z) = -4\alpha v_a \mu(c_g, 0)$ .

Для малых расходов процессы диссипативного выделения тепла незначительны, температура меняется несильно, профиль скорости остается близким к параболичес-





Фиг. 5. Зависимость сопротивления канала  $\tau_{rz}(1, z) = (\mu)_{r=1}$  для давления на входе в канал  $p_{in} = 1.065$  и расходов  $Q_1 = 2.6$  и  $Q_2 = 125.6$  (кривые 1, 2). Кривая 3 – та же зависимость для одномерной изотермической модели для  $Q_0 = 1.9$

кому, сопротивление стенок канала за счет вязкой диссипации практически не меняется (фиг. 5). Поэтому кривые 1 и 2 на фиг. 2 почти совпадают с кривой 3, полученной в рамках изотермической модели. Однако для больших расходов за счет вязкой диссипации температура вблизи стенок уже в начальных сечениях канала увеличивается почти вдвое, профиль скорости становится близким к прямоугольному (фиг. 4), при этом сопротивление канала падает (фиг. 5). Поэтому фиксированный перепад давления обеспечивает течение магмы с гораздо большим расходом (фиг. 2).

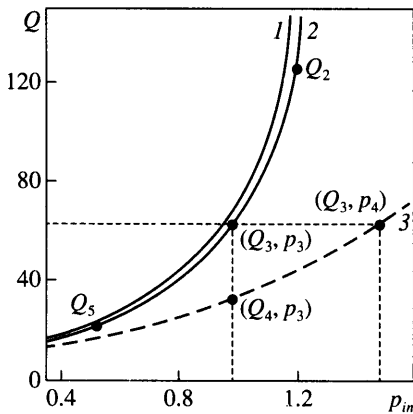
Таким образом, на фиг. 2 режиму с меньшим расходом отвечает слабо разогретая магма. Течение близко к изотермическому течению с параболическим профилем скорости. Сопротивление канала обусловлено большой вязкостью. Режиму с большим расходом соответствует магма, сильно разогретая в пристеночной зоне. Профиль скорости – плоский практически во всей области течения. Сопротивление канала обусловлено большим расходом. Для адиабатического условия на стенке отток тепла из канала не происходит, поэтому влияние вязкой диссипации еще более значительно. Наличие нескольких стационарных режимов извержения при фиксированном давлении в очаге имеет место и в рамках других моделей течения магмы в канале вулкана, например в одномерной изотермической модели извержения сжимаемой магмы [1–3].

Часто во время одного извержения сразу образуется несколько типов пемз [12, 13], часть из которых имеет признаки сильного разогрева и деформаций (раздробленные, частично оплавленные кристаллы). Формирование при подъеме магмы по каналу вулкана сильно разогретого слоя вблизи стенки и слабое изменение температуры в центре канала могут объяснить это явление.

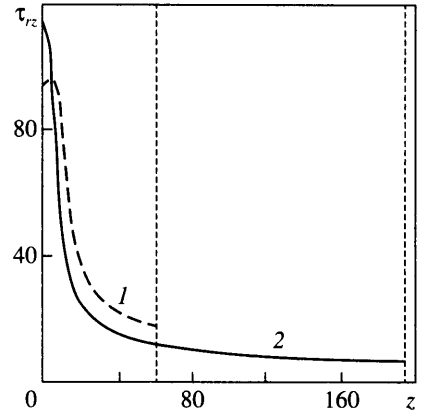
Режимы течения с большим расходом ( $Q_2$ ) соответствуют взрывному типу извержения [14], поэтому в этом случае необходимо решать полную систему уравнений с учетом фрагментации магмы и зоны течения газовой фазы.

На фиг. 6 приведена зависимость расхода магмы  $Q$  от давления  $p_{in}$  на входе в канал, аналогичная представленной на фиг. 2, но отвечающая взрывному типу извержения. На фиг. 7 приведено изменение сопротивления канала (в зоне течения пузырьковой жидкости) по оси  $z$  для малого ( $Q_5$ ) и большого ( $Q_2$ ) расходов в случае изотермических граничных условий на стенке канала.

При малых давлениях  $p_{in}$  на входе в канал (малых расходах) все три кривые на фиг. 6 близки друг к другу. При увеличении давления  $p_{in}$  в рамках неадиабатической модели



Фиг. 6



Фиг. 7

Фиг. 6. Зависимость расхода магмы  $Q$  от давления  $p_{in}$  на входе в канал для адиабатического и изотермического условий на стенке канала при эксплозивном извержении (кривые 1, 2). Кривая 3 – та же зависимость для одномерной изотермической модели;  $Q_2 = 125.6$ ,  $Q_3 = 62.8$ ,  $Q_5 = 22$ ,  $p_3 = 0.983$ ,  $p_4 = 1.48$

Фиг. 7. Зависимость сопротивления канала  $\tau_{rz}(1, z) = (\mu v_r)_{r=1}$  в зоне течения пузырьковой жидкости для расходов  $Q_5 = 22$  и  $Q_2 = 125.6$  (кривые 1, 2). Вертикальные пунктирные прямые соответствуют фрагментации магмы

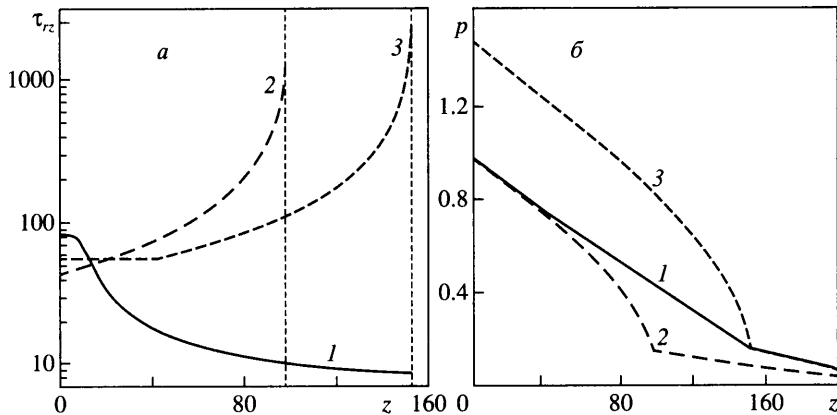
реализуются течения с расходами, в несколько раз большими по сравнению с полученными из изотермической модели. Однако неоднозначность зависимости  $Q(p_{in})$  в случае эксплозивных извержений исчезает. В ней нет решения, когда магма практически не разогревается в пристеночной зоне, что соответствует малым расходам магмы (фиг. 5 и 7).

Для малых расходов зона течения пузырьковой жидкости занимает малую часть канала (фиг. 1). Поэтому фиксированный перепад давления между давлением фрагментации  $p_f$  и давлением  $p_{in}$  на входе в канал для малых расходов происходит на гораздо меньшей длине, что позволяет реализовываться извержениям при малых значениях  $p_{in}$ . С увеличением расхода длина зоны газозвеси уменьшается практически до нуля, пузырьковая жидкость занимает практически весь канал.

Значение давления на входе в канал  $p_{in}$  ограничено прочностью горных пород, образующих стенки канала вулкана, и не может превосходить литостатическое больше чем на 20–30 МПа (0.16–0.24 в безразмерных переменных). Поэтому по фиг. 6 можно оценить максимальный возможный расход. Видно, что в рамках приведенной модели он может быть в несколько раз больше, чем в рамках изотермической.

На фиг. 8 приведены профили сопротивления (в зоне течения пузырьковой жидкости) (а) и давления (б) в случае изотермических граничных условий на стенке канала для расхода  $Q_3$ , соответствующего давлению  $p_3$  на входе в канал. Для сравнения приведены профили сопротивления и давления, полученные в рамках изотермической модели, для расхода  $Q_4 < Q_3$  при том же давлении  $p_3$  на входе в канал и расхода, равного  $Q_3$ , который обеспечивается давлением  $p_4 > p_3$  на входе в канал.

Для кривых 1, 2 давления на входе в канал одинаковы, поэтому одинаковы и начальные вязкости, но расход для кривой 2 существенно меньше. Для кривых 1, 3 одинаковы расходы, а давление для кривой 3 на входе в канал больше, поэтому начальная вязкость меньше. Поэтому для обеих кривых 2, 3, полученных в рамках изотерми-



Фиг. 8. Зависимость сопротивления канала  $\tau_{rz}(1, z) = (\mu v'_r)_{r=1}$  в зоне течения пузырьковой жидкости (а) и давления  $p(z)$  (б) для давления на входе в канал  $p_{in} = p_3 = 0.983$  и расхода  $Q_3 = 62.8$  (кривые 1). Те же зависимости приведены для одномерной изотермической модели для  $p_{in} = p_3$  и  $Q_4 = 33 < Q_3$  (кривые 2) и для  $p_{in} = p_4 = 1.48 > p_3$  и  $Q_3$  (кривые 3). Вертикальные пунктирные прямые (а) и точки излома на кривых (б) соответствуют фрагментации магмы

ческой модели, сопротивление в начале канала меньше, чем для кривой 1 (фиг. 8, а). Сопротивление стенок канала вулкана в изотермическом случае увеличивается вниз по потоку за счет увеличения вязкости, тогда как в неизотермическом случае сопротивление канала сильно падает за счет вязкой диссипации, приводящей к перестройке профиля скорости и уменьшению вязкости.

Соответственно, в обоих изотермических случаях давление вниз по потоку уменьшается быстрее, чем в неизотермической модели (фиг. 8, б). Поскольку давление фрагментации  $p_f$  не зависит ни от расхода, ни от давления на входе в канал, для кривых 1, 3 положение фронта фрагментации совпадает, а для кривой 2 фрагментация происходит глубже.

Из фиг. 8, б видно, что в рамках неизотермической модели течения в пузырьковой жидкости не наблюдается сильного увеличения градиента давления, такого как в изотермической модели. Некоторые критерии фрагментации [15–16] основаны на предположении о сильном увеличении градиента давления перед фрагментацией. Полученные результаты показывают, что эти критерии нуждаются в корректировке.

**Заключение.** Построенная двумерная неизотермическая модель позволила выявить влияние процессов вязкой диссипации и теплопроводности на течение магмы в канале вулкана, которое оказалось существенным. Показано, что могут реализовываться извержения с расходами в несколько раз превышающими расходы, полученные в рамках изотермической модели. В случае больших расходов поведение сопротивления канала качественно иное, чем сопротивление, рассчитанное по формуле Пуазейля, общепринятой для одномерных моделей. При подъеме магмы по каналу сопротивление падает, а не растет. Кроме того, в одномерных моделях сопротивление сильно завышено. Полученная зависимость изменения сопротивления вдоль канала может быть использована для корректировки одномерных моделей.

Решена краевая задача определения расхода магмы в зависимости от давления, заданного на входе в канал. Эта зависимость в случае экструзивных извержений является неоднозначной: существует интервал давлений на входе в канал такой, что при одном и том же значении давления могут реализовываться извержения с малым и большим расходами.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Слезин Ю.Б. Динамика дисперсионного режима вулканических извержений 2. Условие неустойчивости расхода и природа катастрофических эксплозивных извержений // Вулканология и сейсмология. 1984. № 1. С. 23–35.
2. Бармин А.А., Мельник О.Э. Об особенностях динамики извержения сильновязких газонасыщенных магм // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 2. С. 49–60.
3. Woods A.W., Kouyaguchi T. Transitions between explosive and effusive eruptions of silicic magmas // Nature. 1994. V. 370. P. 641–644.
4. Тарз С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 420 С.
5. Гонор А.Л., Чулков А.А. К теории гидродинамического теплового взрыва // Докл. АН СССР. 1991. Т. 316. № 4. С. 856–860.
6. Ockendon H. Channel flow with temperature-dependent viscosity and internal viscous dissipation // J.Fluid Mech. 1979. V. 93. Pt 4. P. 737–746.
7. Costa A., Macedonio G. Viscous heating in fluids with temperature-dependent viscosity: implications for magma flows // Nonlinear Processes Geoph. 2003. V. 10. № 6. P. 545–555.
8. Hess K.U., Dingwell D.B. Viscosities of hydrous leucogranite melts: a non-Arrhenian model // Amer. Mineralogist. 1996. V. 81. № 7. P. 1297–1300.
9. Sparks R.S.J. The dynamics of bubble formation and growth in magmas: a review and analysis // J. Volcanol. and Geotherm. Res. 1978. V. 3. № 1. P. 1–37.
10. Mangan M., Mastin L., Sisson T. Gas evolution in eruptive conduits: combining insights from high temperature and pressure decompression experiments with steady-state flow modeling // J. Volcanol. and Geotherm. Res. 2004. V. 129. № 1–3. P. 23–36.
11. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 430 С.
12. Rosi M., Landi P., Polacci M., Di Muro A., Zandomeneghi D. Role of conduit shear on ascent of the crystal-rich magma feeding the 800-year-b.p. Plinian eruption of Quilotoa Volcano (Ecuador) // Bull. Volcanology. 2004. V. 66. № 4. P. 307–321.
13. Polacci M., Papale P., Rosi M. Textural heterogeneities in pumices from the climactic eruption of Mount Pinatubo, 15 June 1991, and implication for magma ascent dynamics // Bull. Volcanology. 2001. V. 63. № 2–3. P. 83–97.
14. Carey S., Sigurdsson H. The intensity of Plinian eruptions // Bull. Volcanology. 1989. V. 51. № 1. P. 28–40.
15. Papale P. Strain-induced magma fragmentation in explosive eruptions // Nature. 1999. V. 397. № 6718. P. 425–428.
16. Melnik O. Dynamics of two-phase conduit flow of high-viscosity gassaturated magma: large variations of sustained explosive eruption intensity // Bull. Volcanology. 2000. V. 62. № 3. P. 153–170.

Москва

Поступила в редакцию  
3.VI.2004