

УДК 532.546

© 2004 г. А. В. КОНДРАШОВ

О СВОЙСТВАХ НЕКОТОРЫХ ФРОНТОВ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ В ГИДРОТЕРМАЛЬНЫХ ПОРИСТЫХ ПЛАСТАХ

В одномерной постановке исследуются свойства фронтов равновесных фазовых переходов пароводяная смесь – вода (пар) в пористых теплопроводных средах. В зависимости от значений параметров среды определены число необходимых граничных условий на фронте (эволюционность), направление распространения фронта относительно пористой среды, тип фазового перехода (испарение или конденсация) и термодинамическая противоречивость в области “чистой” фазы (вода или пар).

Ключевые слова: фильтрация, равновесные фазовые переходы, фронты, эволюционность, испарение, конденсация.

1. При фильтрации воды в теплопроводной пористой среде возможны различные фазовые переходы. Например, при закачке воды в высокотемпературный гидротермальный резервуар, насыщенный паром, области воды и пара разделены фронтом фазового перехода. Такой режим не всегда реализуется из-за переохлаждения пара непосредственно перед фронтом фазового перехода (термодинамически противоречивое состояние) [1–3]. В этом случае возникает область, насыщенная пароводяной смесью, в которой происходит равновесный фазовый переход. При этом возникают подвижные границы фазовых переходов пароводяная смесь–пар (вода) [2]. Было обнаружено, что в ряде случаев условий непрерывности потока массы и энергии не образуют полную систему на фронте пароводяная смесь–пар. На основе некоторых физических соображений в качестве дополнительного условия была выбрана непрерывность водонасыщенности на фронте [2]. Подобная ситуация возникает и в других задачах с фазовыми переходами в гидротермальных пластах [4–10].

Вопрос о граничных условиях на таких фронтах рассмотрен в модельной постановке в [11, 12]. Показано, что в области смеси существует тип малых возмущений с конечной скоростью распространения (гиперболическое вырождение). На основе предложенной модели структуры обосновывается условие непрерывности водонасыщенности на разрыве.

Ниже исследованы фронты равновесных фазовых переходов пароводяная смесь–вода (пар) в теплопроводных пористых пластах различных значений физических параметров. Найдены условия, когда вода (пар) находится в перегретом (переохлажденном) состоянии в окрестности фронта фазового перехода. С учетом гиперболического вырождения [11] определено число граничных условий необходимых для эволюционности фронта. Определены характер фазового перехода (испарение, конденсация) и направления распространения фронта относительно пористой среды. Построены диаграммы, определяющие указанные выше свойства фронтов равновесных фазовых переходов при заданном состоянии смеси и градиент давления в “чистой” фазе.

2. Предположим, что гидротермальный резервуар представляет собой неподвижную, несжимаемую пористую среду. Для описания процессов тепломассопереноса с равновесными фазовыми переходами воспользуемся системой, состоящей из законов

сохранения масс, энергии, закона Дарси, уравнения равновесия пар-вода, а также уравнений состояния воды, пара и термодинамических соотношений.

Тогда в области совместного существования воды и пара основная система уравнений имеет вид (индексы 1 – вода, 2 – пар, 3 – скелет пористой среды, m – эффективные значения величин для смеси) [1–3]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(ms\rho_1 + m(1-s)\rho_2) - \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\rho_1 s \frac{k}{\mu_1} + \rho_2(1-s)\frac{k}{\mu_2}\right)\frac{\partial P}{\partial x}\right] = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial(\rho e)_m}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(h_1\rho_1 s \frac{k}{\mu_1} + h_2\rho_2(1-s)\frac{k}{\mu_2}\right)\frac{\partial P}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left((\lambda)_m \frac{\partial T}{\partial x}\right) \quad (2.2)$$

$$P = F(T); \quad \rho_1 = \rho_1^0(1 + \rho_P(P - P_0) + \rho_T(T - T_0)), \quad \rho_2 = \frac{P}{RT} \quad (2.3)$$

$$(\rho e)_m = ms\rho_1 e_1 + m(1-s)\rho_2 e_2 + (1-m)\rho_3 e_3; \quad e_i = c_i T; \quad h_i = e_i + \frac{P}{\rho_i} \quad (i = 1, 2)$$

$$(\rho c)_m = ms\rho_1 c_1 + m(1-s)\rho_2 c_2 + (1-m)\rho_3 c_3$$

$$h_2 = c_{p2} T; \quad h_2 - h_1 = q; \quad c_{p2} = c_2 + R$$

$$(\lambda)_m = ms\lambda_1 + m(1-s)\lambda_2 + (1-m)\lambda_3$$

Здесь T – температура, P – давление, s – водонасыщенность, k – фазовая проницаемость, μ – вязкость, ρ_P – коэффициент сжимаемости воды, ρ_T – коэффициент теплового расширения воды, ρ – плотность, e – плотность внутренней энергии, h – удельная энтальпия, m – пористость, c – теплоемкость, $P = F(T)$ – условие равновесия фазового перехода.

Характерные значения параметров, используемые при оценках, приведены ниже

$$\rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3; \quad \rho_3 = 2000 \text{ кг/м}^3; \quad c_1 = 4.2 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К}^0); \quad c_2 = 8.7 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К}^0); \quad c_3 = 0.9 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К}^0); \quad R = 461 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К}^0); \quad q = 2 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}; \quad \lambda_1 = 0.58 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К}^0); \quad \lambda_2 = 0.02 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К}^0); \quad \lambda_3 = 2.0 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К}^0); \quad \mu_1 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с}; \quad \mu_2 = 1 \cdot 72^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}; \quad m = 0.1-0.2; \quad k = 1 \cdot 10^{-18}-1 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2; \quad T_0 = 373-500 \text{ К}^0; \quad A = 4611.17 \text{ К}^0/T_0$$

Рассмотрим уравнения (2.1)–(2.3) в окрестности фронта фазового перехода. Будем предполагать, что давление и соответственно температура меняются мало, так что зависимость температуры от давления можно предполагать линейной

$$\Pi = A\Theta + B_0; \quad \Pi = \frac{P}{P_0}; \quad \Theta = \frac{T}{T_0}; \quad \rho_{ij} = \frac{\rho_i}{\rho_j}; \quad \rho_{21} = \rho_{21}^0 \left(A - \frac{\Pi_0}{\Theta}\right) \quad (2.4)$$

Здесь P_0 , T_0 , ρ_{21}^0 – соответственно давление, температура, и отношение плотностей на фронте, B_0 и A – константы, определяемая выбором зависимости $P = F(T)$. Будем считать воду и скелет несжимаемыми. С учетом сделанных предположений система уравнений (2.1), (2.2) примет вид:

$$(1 - \rho_{21})\frac{\partial s}{\partial t} - \rho_{21}^0 \frac{\Pi_0}{\Theta} \left[\frac{\partial \Theta}{\partial t} - A\kappa_2 \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)^2\right] - A(\kappa_1 - \rho_{21}\kappa_2)\frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial \Theta}{\partial x} = A(s\kappa_1 + (1-s)\rho_{21}\kappa_2)\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}$$

$$\left[1 + \frac{m\rho_1 R(1-s)\Pi_0}{(\rho c)_m \Theta}\right]\frac{\partial \Theta}{\partial t} - \alpha \frac{\partial s}{\partial t} + \left[A\alpha\kappa_1 - \frac{m(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\rho c)_m}\right]\frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial \Theta}{\partial x} - A\beta \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)^2 = (a_m - A\alpha\kappa_1 s)\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}$$

$$\kappa_i = \frac{kP_0}{m\mu_i}, \quad a_m = \frac{(\lambda)_m}{(\rho c)_m}, \quad \alpha = \frac{m\rho_1 q}{(\rho c)_m T_0}, \quad \beta = \frac{m(\rho_1 c_1 s\kappa_1 + \rho_2 c_{p2}(1-s)\kappa_2)}{(\rho c)_m}$$

Пусть эта система имеет решение: $s = s(x, t)$; $\Theta = \Theta(x, t)$. Рассмотрим линеаризованную систему уравнений относительно этого решения

$$(1 - \rho_{21}) \frac{\partial s'}{\partial t} - \rho_{21}(1 - s) \Pi \frac{\partial \Theta'}{\partial t} - (\kappa_1 - \rho_{21} \kappa_2) X_- \frac{\partial s'}{\partial x} + \\ + [2\rho_{21}(1 - s) \Pi \kappa_2 X_- - A(\kappa_1 - \rho_{21} \kappa_2) \chi] \frac{\partial \Theta'}{\partial x} = A(s \kappa_1 + (1 - s) \rho_{21} \kappa_2) \frac{\partial^2 \Theta'}{\partial x^2}$$

$$\left[1 + \frac{m \rho_1 R (1 - s) \Pi_0}{(\rho c)_m \Theta} \right] \frac{\partial \Theta'}{\partial t} - \alpha \frac{\partial s'}{\partial t} + \left[\alpha \kappa_1 - \frac{m(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\rho c)_m A} \right] X_- \frac{\partial s'}{\partial x} = \\ = \left[2\beta X_- - \left(A \alpha \kappa_1 - \frac{m(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\rho c)_m} \right) \chi \right] \frac{\partial \Theta'}{\partial x} + (a_m - A \alpha \kappa_1 s) \frac{\partial^2 \Theta'}{\partial x^2}$$

$$\chi = \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)_0; \quad X_- = A \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)_0$$

Здесь индекс "0" – значение производных на фронте.

Будем искать решение в виде: $s' = s'_0 e^{i(lx - \omega t)}$; $\Theta' = \Theta'_0 e^{i(lx - \omega t)}$ и получим характеристическое уравнение

$$d_{02} \omega^2 + (d_{21} i l^2 + d_{11} l) \omega + (d_{30} i l^3 + d_{20} l^2) = 0$$

$$d_{02} = (1 - \rho_{21}) \left(1 + \frac{m \rho_1 R (1 - s)}{(\rho c)_m} \Pi_0 \right) - \rho_{21} (1 - s) \Pi_0 \alpha$$

$$d_{21} = (1 - \rho_{21}) a_m + \rho_{21} \alpha A (\kappa_1 s + \kappa_2 (1 - s))$$

$$d_{11} = \left[(1 - s) \Pi_0 \left(\left(1 + \rho_{21} \alpha + \frac{m \rho_1 R}{(\rho c)_m} \right) \kappa_1 - \rho_{21} \left(1 - 2\alpha + \frac{m \rho_1 R}{(\rho c)_m} \right) \kappa_2 \right) + 2(1 - \rho_{21}) \beta - \right. \quad (2.5)$$

$$\left. - \rho_{21} (1 - s) \Pi_0 \frac{m(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\rho c)_m} \right] X_- + \left[(1 - \rho_{21}) \frac{m(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\rho c)_m} - \rho_{21} \alpha A (\kappa_2 - \kappa_1) \right] \chi$$

$$d_{30} = \rho_{21} \alpha A \kappa_1 \kappa_2 + \frac{(\lambda)_2}{(\rho c)_m} \kappa_1 - \rho_{21} \frac{(\lambda)_1}{(\rho c)_m} \kappa_2$$

$$d_{20} = \left[2\rho_{21} (1 - s) \Pi_0 \kappa_2 \left(\alpha \kappa_1 - \frac{m(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\rho c)_m} \right) + 2\beta (\kappa_1 - \rho_{21} \kappa_2) \right] X_-^2$$

При $\omega \rightarrow \infty$ и $l \rightarrow \infty$ корни характеристического уравнения имеют вид:

$$\omega_1 = -\frac{d_{21}}{d_{02}} i l^2 + O(l), \quad \omega_2 = -\frac{d_{30}}{d_{21}} l + O(1) \quad (2.6)$$

Для устойчивости необходимо выполнение условия: $d_{21}/d_{02} \geq 0$, что, как показывают оценки, выполняется в имеющем физический смысл диапазоне параметров.

Из (2.6) следует, что существуют два возмущения: $l_{1+}(\omega_1)$ и $l_{1-}(\omega_1)$, распространяющиеся в разные стороны и одно возмущение $l_2(\omega_2)$, распространяющееся относительно неподвижного скелета со скоростью

$$W = -\frac{g\kappa_1}{\sigma_m} X_-$$

$$q \approx (c_{p2} - c_1)T_0, \quad \Omega_i = \frac{(\lambda)_i}{m\rho_2(c_{p2} - c_1)}, \quad g = A\kappa_2 + \Omega_2 - v_{12}\Omega_1 \quad (2.7)$$

$$v_i = \frac{\mu_i}{\rho_i}, \quad v_{ij} = \frac{v_i}{v_j}, \quad \sigma_m = (1 - \rho_{21})\Omega_m + A(\kappa_1 s + \kappa_2(1 - s)) > 0$$

В имеющем физический смысл диапазоне параметров

$$\frac{(\lambda)_1 \rho_2 \mu_1}{(\lambda)_2 \rho_1 \mu_2} = \frac{(\lambda)_1 v_1}{(\lambda)_2 v_2} = \lambda_{12} v_{12} \leq 1, \quad \lambda_{ij} = \frac{(\lambda)_i}{(\lambda)_j} \Rightarrow g\kappa_1 \geq 0 \quad \forall \kappa_i \geq 0 \quad (2.8)$$

Поэтому в силу (2.7) направление распространения данного возмущения совпадает с направлением движения среды.

3. Рассмотрим подвижную границу фазового перехода, разделяющую области, насыщенные водой и равновесной пароводяной смесью. В этом случае в отличие от пяти условий на границе, разделяющей зоны, насыщенные водой и паром, имеется четыре независимых условия. Это – законы сохранения массы и энергии, непрерывность давления и температуры на фронте. Непрерывность температуры следует из условия равновесности фазового перехода в силу непрерывности давления. От границы фазового перехода в области воды распространяются два малых возмущения [1, 11]. Согласно разд. 2 в области совместного равновесного сосуществования воды и пара от фронта отходит одно малое возмущение $l_1(\omega)$ и еще одно возмущение $l_2(\omega)$, распространяющееся относительно скелета с конечной скоростью W (2.7), может как уходить, так и приходить. Если оно приходит ($V - W < 0$, V – скорость данного фронта), то имеется три входящих возмущения и четырех условий достаточно для его эволюционности. Если это возмущение уходит ($V - W > 0$), то четыре возмущения будут уходить от данной границы, и на ней необходимо задавать дополнительное пятое условие.

Для определенности и без ограничения общности будем считать, что зона, насыщенная водой, лежит справа от фронта (индекс “+”), а зона, насыщенная равновесной пароводяной смесью, соответственно, слева от него (индекс “-”) (фиг. 1).

Запишем в введенных выше обозначениях законы сохранения массы и энергии на этой границе

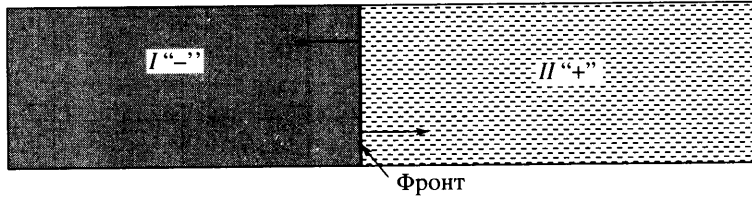
$$(1 - s)(1 - \rho_{21})V = (\kappa_1 s + \rho_{21}\kappa_2(1 - s))X_- - \kappa_1 X_+$$

$$(1 - s)V = \Omega_1 Y_+ - \Omega_m Y_- - \kappa_2(1 - s)X_- \quad (3.1)$$

$$X_j = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)_j; \quad Y_j = \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)_j = -, +(X_- = AY_-)$$

Исключая скорость фронта V из системы (3.1), получим уравнение “ударной адиабаты”, связывающей градиенты давления и температуры справа и слева от фронта и его скорость V

$$(1 - \rho_{21})\Omega_1 Y_+ + \kappa_1 X_+ = (1 - \rho_{21})\Omega_m Y_- + (\kappa_1 s + \kappa_2(1 - s))X_- \quad (3.2)$$



Фиг. 1. Схема расположения областей, насыщенных пароводяной смесью (I) и “чистой” фазой (вода или пар) (II), разделенных фронтом фазового перехода

С помощью уравнений (2.8) и (3.1) получим

$$\text{sign}(W - V) = \text{sign}(X_+ - X_e) = \text{sign}\left(\left((s + v_{12}(1 - s)) + (1 - s)(1 - \rho_{21})\frac{g}{\sigma_m}\right)X_-\right) \quad (3.3)$$

Здесь и далее все необходимые условия будут получены только для градиентов давления X_+ справа от фронта, так как соответствующие условия для градиентов температуры Y_+ следуют из (3.2). Определим координаты пересечения прямой $X = AY$ с “адиабатой” (3.2)

$$X_* = \frac{\sigma_m}{\sigma_1}X_-, \quad \sigma_1 = (1 - \rho_{21})\Omega_1 + A\kappa_1 > 0 \quad (3.4)$$

Слева от точки (X_*, Y_*) на адиабате (3.2) ($X_+ < X_*$) температура в окрестности фронта в области, насыщенной водой, будет больше, чем температура равновесного фазового перехода, вычисленная из $P = F(T)$, а справа ниже. В первом случае состояния перед фронтом будут термодинамически неустойчивыми (противоречивыми).

Определим взаимное расположение точек X_* и X_e на адиабате (3.2)

$$\text{sign}(X_* - X_e) = \text{sign}\left((1 - \rho_{21})(1 - s)^2 \frac{g\Psi}{\sigma_1\sigma_m}X_-\right) = \text{sign}((1 - s)\Psi X_-) \quad (3.5)$$

$$\Psi = A(\kappa_2 - \kappa_1) - (1 - \rho_{21})(\Omega_1 - \Omega_2) \quad (3.6)$$

так как $\sigma_1 > 0, \sigma_m > 0$ (1.7) и $g > 0$ (2.8)

$$\Psi = 0 \Leftrightarrow A\frac{\kappa_2}{\Omega_2} = \frac{(1 - \rho_{21})(\lambda_{12} - 1)}{(1 - \mu_{12})}, \quad \mu_{ij} = \frac{\mu_i}{\mu_j}, \quad \frac{\kappa_2}{\Omega_2} \sim \frac{\kappa_2}{a_2} = \text{Pe}_2, \quad a_2 = \frac{(\lambda)_2}{(\rho c)_2} \quad (3.7)$$

Здесь Pe – число Пекле для пара в задачах тепломассопереноса с фазовыми переходами в пористых средах, выражающее отношение скорости распространения кондуктивного переноса тепла, a_2 – коэффициент температуропроводности пара.

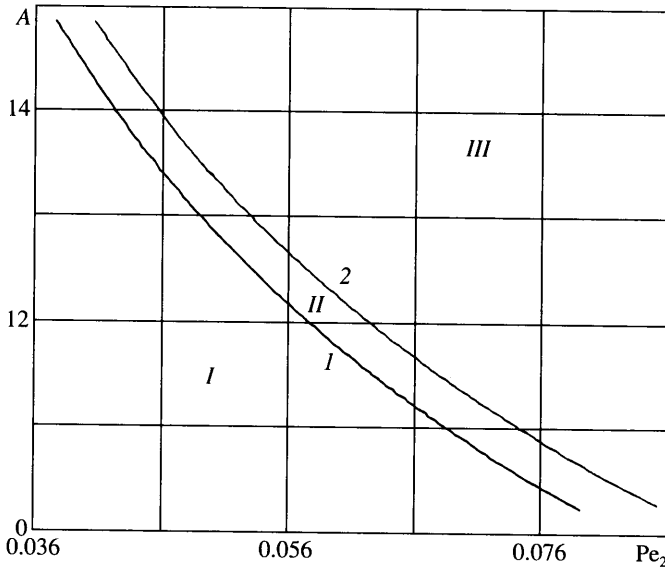
Кривая $\Psi(\text{Pe}_2, A) = 0$ делит плоскость Pe_2, A на две области (фиг. 2 линия 1), в которых знак $(X_* - X_e)X_-$ разный, т.е. взаимное расположение точек X_* и X_e на адиабате (3.2) различно.

Из (3.1) получим условие, определяющее знак скорости фронта V

$$\text{sign}(X_+ - X_0) = \text{sign}((s + v_{12}(1 - s))X_-) = \text{sign}X_- \quad (3.8)$$

Из (3.3) в силу (2.8) имеем соотношение, определяющее взаимное расположение точек X_e и X_0 на адиабате (3.2)

$$\text{sign}(X_e - X_0) = \text{sign}((1 - s)X_-) \quad (3.9)$$



Фиг. 2. Области на плоскости $Pe_2 = \kappa_2/a_2$, A (2.4), соответствующие различным расположениям на адиабатах (3.2) и (4.2) точек X'_* , X'_e , X'_* : область I – $\Psi \leq 0$, область II – $\Psi + \Phi_1 \leq 0$, область III – $\Psi > 0$ и $\Psi + \Phi_1 > 0$

Из соотношений (3.4) и (3.8) в силу (2.8) определим взаимное расположение на адиабате (3.2) точек X_* и X_0 ,

$$\text{sign}(X_* - X_0) = \text{sign}\left((1 - \rho_{21})(1 - s) \frac{g}{\sigma_1} X_-\right) = \text{sign}((1 - s)X_-) \quad (3.10)$$

Для определения типа фазового перехода на фронте необходимо знать знак разности: $V - u_m$, где u_m – скорость движения смеси относительно скелета:

$$u_m = -\frac{\kappa_1 s + \rho_{21} \kappa_2 (1 - s)}{s + \rho_{21} (1 - s)} X_- \quad (3.11)$$

Из первого выражения в (3.1), получается:

$$\text{sign}(V - u_m) = \text{sign}(X_\phi - X_+), \quad X_\phi = \frac{s + v_{12}(1 - s)}{s + \rho_{21}(1 - s)} X_- \quad (3.12)$$

Таким образом, если $V - u_m \geq 0$, ($X_+ \leq X_\phi$), смесь оттекает от границы, т.е. имеет место фронт испарения. При $X_+ > X_\phi$ – фронт конденсации.

Определим взаимное расположение точек X_ϕ , и X_0 , X_e , X_*

$$\text{sign}(X_\phi - X_0) = \text{sign}\left((1 - s)(1 - \rho_{21}) \frac{s + v_{12}(1 - s)}{s + \rho_{21}(1 - s)} X_-\right) = \text{sign}((1 - s)X_-) \quad (3.13)$$

$$\text{sign}(X_e - X_\phi) = \text{sign}\left((1 - s)(1 - \rho_{21}) \frac{(s^2 - v_{12}(1 - s)^2)\Psi + \Phi_1}{\sigma_m(s + \rho_{21}(1 - s))} X_-\right) \quad (3.14)$$

$$\text{sign}(X_* - X_\phi) = \text{sign}\left((1 - s)(1 - \rho_{21}) \frac{\Psi s + \Phi_1}{\sigma_1(s + \rho_{21}(1 - s))} X_-\right) \quad (3.15)$$

$$\Phi_1 = (\rho_{21}\Omega_2 - v_{12}\Omega_1) = \rho_{21}\Omega_1(\lambda_{21} - \mu_{12}) \leq 0 \quad (3.16)$$

В имеющем физический смысл диапазоне параметров $\Phi_1 \leq 0$.

На фиг. 2 на плоскости (Pe_2, A) построена кривая $\Psi + \Phi_1 = 0$ (линия 2).

Так как для физически обоснованного диапазона параметров $\kappa_2 \geq \kappa_1, \Omega_1 \geq \Omega_2$, то

$$-v_{12}\Psi + \Phi_1 = -v_{12}(A(\kappa_2 - \kappa_1) + (\Omega_1 - \Omega_2) + \rho_{21}\Omega_2) \leq 0$$

Если точка, соответствующая задаче, на плоскости (Pe_2, A) лежит ниже кривой 2 (области I и II), то числители дробей в (3.14) и (3.15) будут неположительные для любого значения водонасыщенности s на фронте, и, соответственно:

$$\Psi + \Phi_1 \leq 0 \Rightarrow \forall s: \text{sign}(X_* - X_\phi) = \text{sign}(X_e - X_\phi) = -\text{sign}((1-s)X_-) \quad (3.17)$$

Если точка определяющих параметров лежит выше кривой 2 (область III), то в силу $\Phi_1 \leq 0$

$$\exists s_* \in [0, 1): \Psi s_* + \Phi_1 = 0$$

Тогда из (3.15) следует

$$\Psi(s_{**}^2 + v_{12}(1 - s_{**}^2)) + \Phi_1 = 0, \quad s_{**} = \frac{\sqrt{v_{12} + s_* - v_{12}s_*} - 1}{1 - v_{12}}$$

Таким образом, при $\Psi + \Phi_1 > 0$

$$s \in [0, s_*) \Rightarrow \text{sign}(X_* - X_\phi) = \text{sign}(X_e - X_\phi) = -\text{sign}X_-$$

$$s \in [s_*, s_{**}] \Rightarrow \text{sign}(X_* - X_\phi) = \text{sign}((s - s_*)X_-)$$

(3.18)

$$\text{sign}(X_e - X_\phi) = \text{sign}((s_* - s_{**})X_-)$$

$$s \in (s_{**}, 1] \Rightarrow \text{sign}(X_* - X_\phi) = \text{sign}(X_e - X_\phi) = \text{sign}((1-s)X_-)$$

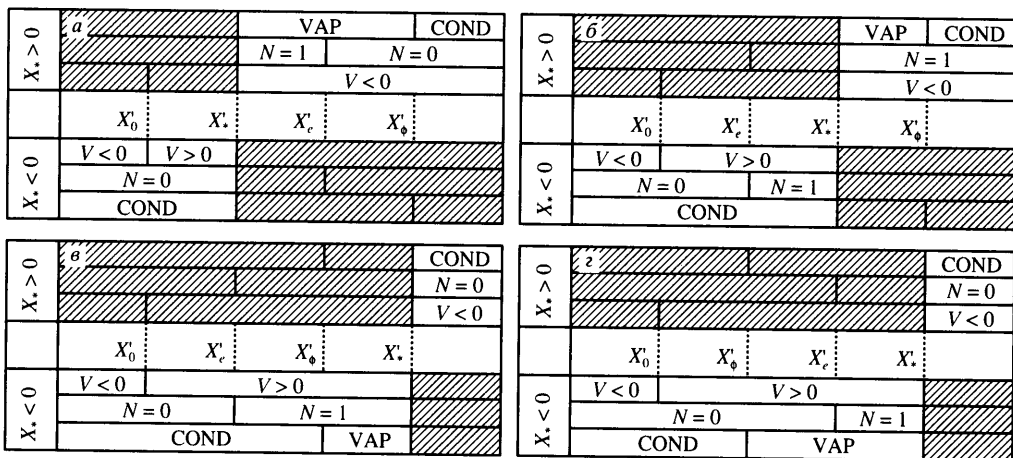
Введем обозначения $X'_j = X_j/X_-$ и рассмотрим все возможные случаи.

Пусть $\Psi < 0$ (область I, фиг. 2). В силу (3.5), (3.9), (3.10), (3.13) взаимное расположение точек X'_j указано на фиг. 3,а.

При движении смеси влево ($X_- > 0$) термодинамически непротиворечивые разрывы распространяются по скелету в сторону смеси. При $X'_+ \in [X'_*, X'_e)$ происходит испарение ("VAP") и для его эволюционности необходимо задать одно дополнительное условие ($N = 1$). При $X'_+ \in [X'_e, X'_\phi)$, на фронте происходит испарение ("VAP"), а при $X'_+ \in [X'_\phi, \infty)$ – конденсация ("COND"). При этом для эволюционности фронта дополнительных условий задавать не нужно ($N = 0$).

В автомодельных задачах тепломассопереноса в полубесконечном пористом слое часто необходимо построить решение с фронтом фазового перехода, разделяющим области, насыщенные пароводяной смесью и водой, при $X_- > 0$ и $V > 0$. Например, в задаче об отборе пароводяной смеси из водяного пласта. В этом случае все возможные разрывы в этом случае при $s \neq 1$ будут термодинамически противоречивыми фронтами испарения. Единственным возможным решением является фронт с $s = 1$. Таким образом, множество возможных состояний в области воды будет состоять из одной точки $X_+ = X_0 = X_* = X_e = X_\phi$. Сам фронт в этом случае будет слабым разрывом, началом зоны объемного фазового перехода – испарения.

При движении смеси вправо ($X_- < 0$) термодинамически непротиворечивые разрывы будут эволюционными ($N = 0$) фронтами конденсации, распространяющимися от-



Фиг. 3. Диаграммы, характеризующие свойства фронта фазового перехода пароводяная смесь I и вода. Случай $\Psi < 0$ (а), $\Psi > 0$, $\Psi + \Phi_1 \leq 0$ или $\Psi + \Phi_1 > 0$ и $s \in [0; s_*)$ (б), $\Psi > 0$, $\Psi + \Phi_1 > 0$ и $s \in [s_*; s_{**}]$ (в), $\Psi > 0$, $\Psi + \Phi_1 > 0$ и $s \in (s_{**}; 1)$ (з)

носителю скелета при $X'_+ \in (\infty, X'_0]$ в сторону смеси, а при $X'_+ \in (X'_0, X'_*)$ в сторону зоны, насыщенной водой.

Пусть $\Psi > 0$, $\Psi + \Phi_1 \leq 0$ или $\Psi + \Phi_1 > 0$ и $s \in [0; s_*)$ (3.18) (области II и III, фиг. 2).

В силу (3.5), (3.9), (3.10), (3.13), (3.17) и (3.18) взаимное расположение точек X'_j представлено на фиг. 3,б.

При $X_- > 0$ термодинамически непротиворечивые разрывы являются эволюционными ($N = 0$) и распространяются по скелету в сторону смеси. При $X'_+ \in [X'_*, X'_\phi)$ на фронте происходит испарение, а при $X'_+ \in [X'_\phi, \infty)$ – конденсация.

При $X_- < 0$ термодинамически непротиворечивые разрывы будут фронтами конденсации. Эти разрывы – эволюционные ($N = 0$) и распространяются относительно пористой среды в сторону смеси при $X'_+ \in (\infty, X'_0]$ и в сторону воды при $X'_+ \in (X'_0, X'_e]$. При $X'_+ \in (X'_e, X'_*)$ фронт распространяется в сторону воды и для его эволюционности необходимо задавать одно дополнительное условие ($N = 1$).

Пусть $\Psi > 0$, $\Psi + \Phi_1 > 0$ и $s \in [s_*; s_{**}]$ (3.18) (области III, фиг. 2). В силу (3.5), (3.9), (3.10), (3.13), (3.17) и (3.18) взаимное расположение точек X'_j указано на фиг. 3,в.

При движении смеси влево ($X_- > 0$) термодинамически непротиворечивые разрывы – эволюционные ($N = 0$) фронты конденсации, распространяющиеся по скелету в сторону области смеси.

При движении смеси вправо ($X_- < 0$) термодинамически непротиворечивые разрывы – эволюционные ($N = 0$) фронты конденсации, распространяющиеся относительно скелета в сторону смеси при $X'_+ \in (\infty, X'_0]$, и в сторону воды при $X'_+ \in (X'_0, X'_e]$. При $X'_+ \in (X'_e, X'_*)$ фронт распространяется в сторону области, насыщенной водой, и для эволюционности необходимо задавать одно дополнительное условие ($N = 1$). При $X'_+ \in (X'_e, X'_\phi)$ на фронте происходит конденсация, а при $X'_+ \in (X'_\phi, X'_*)$ – испарение.

Пусть $\Psi > 0$, $\Psi + \Phi_1 > 0$ и $s \in (s_{**}; 1)$ (3.18) (области III, фиг. 2). В силу (3.5), (3.9), (3.10), (3.13), (3.17) и (3.18) взаимное расположение точек X'_j представлено на фиг. 3,2.

При $X_- > 0$ термодинамически непротиворечивые разрывы – эволюционные ($N = 0$) фронты конденсации, распространяющиеся относительно скелета в сторону смеси.

Для $X_- < 0$ термодинамически непротиворечивые разрывы являются при $X'_+ \in (\infty X'_\phi]$ фронтами конденсации, а при $X'_+ \in (X'_\phi, X'_*]$ – испарения; они распространяются относительно скелета при $X'_+ \in (\infty X'_0]$ в сторону смеси, при $X'_+ \in (X'_0, X'_*]$ в сторону воды. При $X'_+ \in (X'_e, X'_*]$ для эволюционности фронта необходимо задать одно дополнительное условие ($N = 1$).

4. Рассмотрим подвижную границу фазового перехода, разделяющую области насыщенные паром и равновесной пароводяной смесью. На этой границе имеется четыре независимых условия, и всегда три возмущения уходят от нее [1, 4]. И еще одно возмущение, распространяющееся относительно среды со скоростью W , (2.7), может как приходиться к данному фронту, тогда он эволюционный, так и уходить от него, тогда для эволюционности фронта необходимо задавать одно дополнительное условие на нем.

Будем рассматривать фронты фазового перехода, когда зона, насыщенная паром, лежит справа от них (индекс “+”), а зона, насыщенная равновесной пароводяной смесью, – слева (индекс “-”).

Запишем в выше введенных обозначениях законы сохранения массы и энергии на этой границе

$$\begin{aligned} (1 - \rho_{21})sV &= \rho_{21}\kappa_2 X_+ - (\kappa_1 s + \rho_{21}\kappa_2(1 - s))X_- \\ sV &= \rho_{21}\Omega_m Y_- - \rho_{21}\Omega_1 Y_+ - \kappa_1 s X_- \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$X_j = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} \right)_j; \quad Y_j = \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)_j; \quad j = -, + \quad (X_- = AY_-)$$

А также уравнение “ударной адиабаты”, связывающей градиенты давления и температуры среды слева и справа от фронта:

$$(1 - \rho_{21})\Omega_2 Y_+ + \kappa_2 X_+ = (1 - \rho_{21})\Omega_m Y_- + (\kappa_1 s + \kappa_2(1 - s))X_- \quad (4.2)$$

Аналогично разд. 3 введем характеристические точки X_j ; X_e определяет условие ухода или прихода возмущения $l_2(\omega_2)$, (2.7), от фронта фазового перехода; X_* определяет условие термодинамической непротиворечивости состояний перед фронтом в области пара; X_0 определяет направление распространения фронта относительно неподвижного скелета пористой среды; X_ϕ определяет тип фазового перехода происходящего на фронте, испарение или конденсация.

Также как и в разд. 3 определим взаимное расположение точек X_j на адиабате (4.2)

$$\text{sign}(X_+ - X_e) = \text{sign}\left(v_{12}\left((s + v_{12}(1 - s)) - (1 - \rho_{21})s\frac{g}{\sigma_m}\right)X_-\right) \quad (4.3)$$

$$\text{sign}(X_* - X_e) = \text{sign}\left(v_{12}(1 - \rho_{21})s^2\frac{g\Psi}{\sigma_1\sigma_m}X_-\right) = \text{sign}(s\Psi X_-) \quad (4.4)$$

так как $g \geq 0$, $\sigma_i \geq 0$, и в силу (2.8).

$$\text{sign}(X_+ - X_0) = \text{sign}(v_{21}(s + v_{12}(1 - s))X_-) \quad (s \neq 0) \quad (4.5)$$

$$\text{sign}(X_e - X_0) = -\text{sign}(sX_-) \quad (4.6)$$

$$\text{sign}(X_* - X_0) = \text{sign}\left(-v_{21}(1 - \rho_{21})s\frac{g}{\sigma_2}X_-\right) = -\text{sign}(sX_-) \quad (4.7)$$

$$\text{sign}(X_\phi - X_0) = \text{sign}\left(-v_{21}(1 - \rho_{21})s\frac{s + v_{12}(1 - s)}{s + \rho_{21}(1 - s)}X_-\right) = -\text{sign}(sX_-) \quad (4.8)$$

$$\text{sign}(X_e - X_\phi) = \text{sign}\left(-v_{21}(1 - \rho_{21})s\frac{(s^2 - v_{12}(1 - s)^2)\Psi + \Phi_1}{\sigma_m(s + \rho_{21}(1 - s))}X_-\right) = \quad (4.9)$$

$$= -\text{sign}(s((s^2 - v_{12}(1 - s)^2)\Psi + \Phi_1)X_-)$$

$$\Psi + \Phi_1 \leq 0 \Rightarrow \forall s: \text{sign}(X_e - X_\phi) = \text{sign}X_- \quad (4.10)$$

$$\Psi + \Phi_1 > 0 \Rightarrow \text{sign}(X_e - X_\phi) = \text{sign}(s(s_* - s)X_-)$$

$$s_* = \frac{\sqrt{v_{12} - (1 - v_{12})\Phi_1\Psi^{-1}} - v_{12}}{1 - v_{12}} \quad (4.11)$$

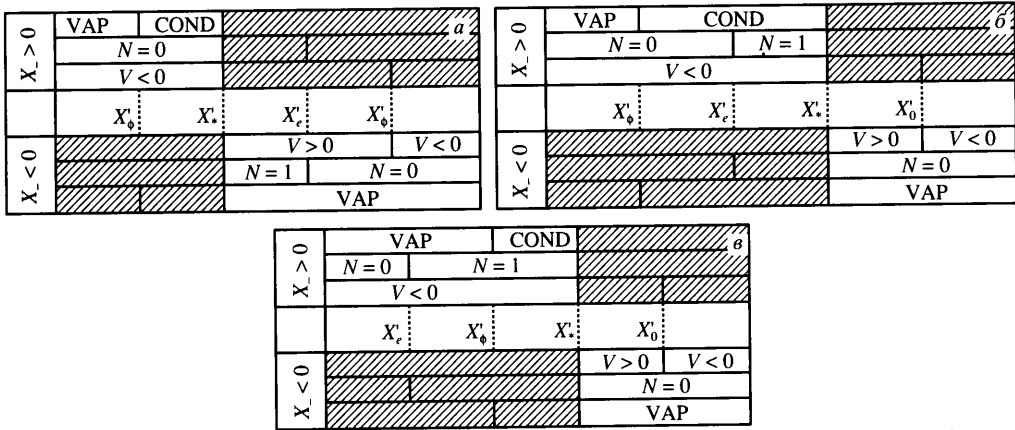
$$\text{sign}(X_* - X_\phi) = \text{sign}\left((1 - \rho_{21})s\frac{\Psi(1 - s) - v_{21}\Phi_1}{\sigma_1(s + \rho_{21}(1 - s))}X_-\right) = \text{sign}(sX_-) \quad (4.12)$$

Пусть $\Psi < 0$ (область I, фиг. 2) В силу (4.5)–(4.9), (4.12) взаимное расположение точек X_j' показано на фиг. 4,а.

При движении смеси влево ($X_- > 0$) термодинамически непротиворечивые разрывы – эволюционные ($N = 0$) фронты, распространяющиеся в сторону смеси относительно пористой среды, на которых происходит испарение при $X_+^i \in (\infty, X_\phi^i]$, а при $X_+^i \in (X_\phi^i, X_*^i]$ – конденсация.

Рассмотрим один частный случай. В автомодельных задачах тепломассопереноса в полубесконечном пористом слое часто возникает ситуация, когда необходимо построить решение с фронтом фазового перехода, разделяющим области, насыщенные пароводяной смесью и паром в случае $X_- > 0$ и $V > 0$. Например, такая ситуация может возникнуть при решении автомодельной полубесконечной задачи о закачке воды в пласт, насыщенный паром. Возможные разрывы в этом случае при $s \neq 0$ будут термодинамически противоречивыми фронтами конденсации, на которых для эволюционности необходимо задавать одно дополнительное условие. В качестве такого единственно возможного дополнительного условия следует выбрать $s = 0$ на фронте, таким образом, множество возможных состояний справа от фронта в области воды будет состоять из одной точки $X_+ = X_0 = X_* = X_e = X_\phi$. Сам фронт в этом случае будет слабым разрывом, началом зоны объемного фазового перехода – конденсации.

При движении смеси вправо ($X_- < 0$) термодинамически непротиворечивые разрывы – фронты испарения (“VAP”), распространяющиеся в сторону области, насыщенной водой по скелету пористой среды, которые эволюционности на фронте необходимо задавать одно дополнительное условие ($N = 1$). При $X_+^i \in [X_*^i, X_e^i)$ для эволюционности на фронте необходимо задавать одно дополнительное условие ($N = 1$). При $X_+^i \in [X_*^i, \infty)$, эволюционный ($N = 0$) фронт испарения распространяется в сторону области смеси относительно пористой среды.



Фиг. 4. То же, что на фиг. 3, для фронта фазового перехода, пароводяная смесь–пар ($s_* = s_{**}$)

Пусть $\Psi > 0$, $\Psi + \Phi_1 \leq 0$ или $\Psi + \Phi_1 > 0$, $s \in (0; s_*)$ (4.11). (Области II и III, фиг. 2). В силу (4.5)–(4.10), (4.12), взаимное расположение точек X'_j показано на фиг. 4,б.

При $X_- > 0$ термодинамически непротиворечивые фронты распространяются в сторону смеси относительно пористой среды. При $X'_+ \in (\infty, X'_\phi]$ на эволюционных ($N=0$) фронтах происходит испарение (“VAP”), а при $X'_+ \in (X'_\phi, X'_e]$ – конденсация (“COND”). При $X'_+ \in (X'_e, X'_*)$ для эволюционности фронтов конденсации необходимо задавать одно дополнительное условие ($N=1$).

При $X_- < 0$ допустимые термодинамически непротиворечивые разрывы – эволюционные ($N=0$) фронты испарения. При $X'_+ \in [X'_*, X'_0)$ фронт распространяется в сторону области, насыщенной водой, по скелету пористой среды, а при $X'_+ \in [X'_0, \infty)$ в сторону области смеси.

Пусть $\Psi > 0$, $\Psi + \Phi_1 > 0$, $s \in (s_*; 1)$ (4.11). (Области II и III, фиг. 2). В силу (4.5)–(4.10), (4.12) взаимное расположение точек X'_j показано на фиг. 4,в.

При движении смеси влево ($X_- > 0$) термодинамически непротиворечивые разрывы распространяются в сторону смеси пористой среды. При $X'_+ \in (\infty, X'_e]$ на эволюционном фронте происходит испарение. При $X'_+ \in (X'_e, X'_*)$ для эволюционности фронта необходимо задавать одно дополнительное условие ($N=1$), при $X'_+ \in (X'_e, X'_\phi]$ на фронте происходит испарение, а при $X'_+ \in (X'_\phi, X'_*)$ – конденсация.

При движении смеси вправо ($X_- < 0$) термодинамически непротиворечивые разрывы – эволюционные ($N=0$) фронты испарения. При $X'_+ \in [X'_*, X'_0)$ фронт распространяется в сторону области, насыщенной водой, по скелету пористой среды, а при $X'_+ \in [X'_0, \infty)$ – в сторону области смеси.

Заключение. В зависимости от определяющих параметров изучены свойства фазовых переходов, пароводяная смесь–вода (пар), в пористых теплопроводных пластах.

Построены диаграммы, которые определяют условия, когда состояние в области чистой фазы (вода или пар) термодинамически противоречиво, т.е. разрывы не реализуются, когда для эволюционности необходимо привлечь дополнительное соотношение, определяют направление распространения фронта относительно скелета пористой среды и характер фазового перехода (испарение, конденсация).

Показано, что для ряда автомодельных задач в полубесконечном случае дополнительным граничным условием для эволюционности на фронте является непрерывность водонасыщенности на нем, т.е. такой фронт может быть только слабым разрывом, началом зоны объемных фазовых переходов.

Автор выражает благодарность А.А. Бармину за постановку проблемы и полезные обсуждения.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ (№ 02-01-00067) и Президентского гранта поддержки ведущих школ (НШ-1697.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бармин А.А., Цыпкин Г.Г. Математическая модель инъекции воды в геотермальный пласт, насыщенный паром // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 6 С. 92–98.
2. Бармин А.А., Кондрашов А.В. Двухфронтная модель инъекции воды в геотермальный пласт, насыщенный паром // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 3. С. 105–112.
3. Кондрашов А.В., Цыпкин Г.Г. О режимах инъекции воды в геотермальный пласт, насыщенный паром // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 2. С. 86–91.
4. Цыпкин Г.Г. Математическая модель фазовых переходов вода–пар в гидротермальных пластах. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 6. С. 98–105.
5. Цыпкин Г.Г. О существовании фронтального режима фазового перехода вода–пар в гидротермальных пластах // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 6. С. 125–133.
6. Garg S.K., Pritchett J.W. Pressure interference data analysis for two-phase (water/steam) geothermal reservoirs // Water Resour. Res. 1998. V. 24. № 6. P. 843–852.
7. Pruess K., Calore C., Cetali R., Wu Y.S. An analytical solution for heat transfer at boiling front moving through a porous medium // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1987. V. 30. № 12. P. 2595–2602.
8. Udell S.K. Heat transfer in porous media: considering phase change and capillary – the heat pipe effect // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1985. V. 28. № 2. P. 485–495.
9. Woods A.W., Fitzgerald S.D. The vaporization of a liquid front moving through a hot porous rock // J. Fluid. Mech. 1993. V. 251. P. 563–579.
10. Woods A.W. Liquid and vapor flow in superheated rock // Annu. Rev. Fluid Mech. 1999. V. 31. P. 171–199.
11. Куликовский А.Г. О фронтах испарения и конденсации в пористых средах // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 5. С. 85–92.
12. Куликовский А.Г. О фазовых переходах при фильтрации в теплопроводном скелете // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 2. С. 85–90.

Москва

Поступила в редакцию
2.III.2004