МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 2004

УДК 532.546

 Е. П. ВОЛЬНИЦКАЯ

# ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ПЛАСТАХ С РАЗРЫВНЫМИ КОЛЛЕКТОРСКИМИ СВОЙСТВАМИ

Использование вариационных принципов в качестве исходного базиса для построения моделей сплошных сред рассмотрено в работах Л.И. Седова и его учеников. В данной работе вариационный формализм развит для расчетов нестационарных фильтрационных течений жидкости в пористых и трещиновато-пористых средах с неоднородными, разрывными и, в частности, кусочно-постоянными свойствами. Доказано, что из основного вариационного соотношения $\delta W = 0$ в случае среды с разрывными свойствами следуют не только дифференциальные уравнения фильтрационных моделей, но и условия на поверхностях разрыва коллекторских свойств пласта. Это открывает путь к обобщению и эффективному использованию прямых вариационных методов для расчета фильтрационных полей в пластах сложного сторения. Предлагаемые методы иллюстрируются конкретными примерами.

*Ключевые слова*: фильтрация, вариационный формализм, разрывные решения, прямые вариационные методы.

Исключительная общность вариационных принципов позволяет использовать их для решения самых различных задач прикладной механики и, в частности, задач фильтрации жидкостей и газов в пористых средах. Подробные сведения об истории создания и развития вариационных принципов содержатся в монографиях [1–3].

Всестороннее использование вариационных принципов для построения моделей в различных областях механики сплошной среды содержится в работах [4]. Им сформулировано базисное вариационное уравнение, которое является естественным обобщением вариационного принципа Гамильтона на случай, когда все величины варьируются как внутри объема, так и на его поверхности, а процессы могут быть необратимыми.

Вариационные принципы, базирующиеся на использовании некоторых специальных функционалов, представляющих собой интегральные характеристики среды, обладают тем преимуществом, что применимы не только к гладким движениям частиц среды, но и к случаям, когда такая гладкость нарушается. При этом вариационные принципы позволяют получать дополнительные условия на поверхностях разрыва (в вариационном исчислении эти условия известны как условия Коши–Эрдмана) [5].

Достаточно полный обзор работ по использованию вариационных принципов в теории фильтрации представлен в монографии [6]. В подавляющем большинстве работ они использовались для решения фильтрационных задач в пластах с постоянными, либо гладкими непостоянными коллекторскими свойствами. В работе [7] дано обобщение вариационного принципа на случай произвольных непостоянных или кусочно-постоянных фильтрационных свойств пластов.

Вариационные принципы и методы в теории фильтрации обычно использовались при решении стационарных задач. Для нестационарных задач теории упругости был предложен вариационный принцип, содержащий функционалы, выраженные через свертки неизвестных функций по времени [8]. В [9] дано обобщение этого вариационного принципа для уравнений теплопроводности и получены некоторые решения при помощи вариационных методов.

В настоящей работе продолжены исследования в области развития вариационных принципов для построения нестационарных фильтрационных полей в сложнопостроенных (слоистых, зонально-неоднородных) пористых и трещиновато-пористых коллекторах.

**1. Вариационный принцип для нестационарной фильтрации жидкости в пористой среде с разрывными коллекторскими свойствами.** Вариационный принцип, сформулированный для задач фильтрации, утверждает, что из всех возможных полей давления, удовлетворяющих граничным условиям на поверхности области фильтрации, истинным будет то, при котором первая вариация $\delta W$ некоторого функционала $W$ равна нулю $\delta W = 0$, т.е. искомое поле давления – стационарная точка для данного функционала.

Используя подход [8, 9], сформулируем вариационный принцип для нестационарной фильтрации жидкости в пористых и трещиновато-пористых средах с разрывными фильтрационными свойствами.

Упругий режим фильтрации в неоднородной пористой среде описывается уравнением пьезопроводности

$$\beta(x, y, z)\frac{\partial p}{\partial t} = \nabla\left(\frac{k(x, y, z)}{\mu}\nabla p\right) \tag{1.1}$$

где $p(x, y, z, t)$ – давление в пласте; $\beta = \beta_s + m\beta_l$ – коэффициент упругоемкости пласта; $\beta_s$, $\beta_l$ – коэффициенты сжимаемости твердой фазы породы и жидкости соответственно; $m$ – пористость; $k$ – коэффициент проницаемости пласта; $\mu$ – динамическая вязкость жидкости.

Дадим этому уравнению эквивалентную вариационную формулировку:

$$\delta W = 0$$

$$W = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left[\beta(x, y, z)\frac{\partial p}{\partial t}*p + \frac{k(x, y, z)}{\mu}(\nabla p*\nabla p)\right]dV \tag{1.2}$$

Здесь символом "*" обозначена свертка по времени двух функций

$$f(x, y, x, t)*g(x, y, z, t) = \int\limits_0^t f(x, y, x, \tau)*g(x, y, z, t-\tau)d\tau$$

Варьирование функционала (1.2) при наличии областей с различными фильтрационными свойствами $k_i$, $\beta_i$ и $k_j$, $\beta_j$ приводит к выражению

$$\delta W = \int\limits_{\Gamma}\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial \nu}*\delta p dl + \int\limits_{\Gamma_{ij}}\left(\frac{k_i}{\mu}\frac{\partial p_i}{\partial \nu_{ij}}*\delta p_i - \frac{k_j}{\mu}\frac{\partial p_j}{\partial \nu_{ij}}*\delta p_j\right)dl_{ij} -$$

$$-\int\limits_{\Omega}\left[\beta(x, y, z)\frac{\partial p}{\partial t} - \nabla\left(\frac{k}{\mu}\nabla p\right)\right]*\delta p dV$$

Здесь $\Gamma$ – внешняя поверхность, ограничивающая область фильтрации $\Omega$, $dl$ – элемент этой поверхности, $\nu$ – внешняя нормаль к ней, $\Gamma_{ij}$ – поверхность разрыва фильтрационных свойств, $dl_{ij}$ – элемент этой поверхности, $\nu_{ij}$ – внешняя нормаль к $\Gamma_{ij}$; также учтено, что $\delta p(x, y, z, 0) = 0$.

Если осуществлять варьирование в классе непрерывных функций $p$, для которых вариации давления на внешней поверхности Г $\delta p = 0$, а в точках границы разрыва свойств $\Gamma_{ij}$ $\delta p_i = \delta p_j$, то условие стационарности $\delta W = 0$ для выражения (1.2) приводит, с одной стороны, к дифференциальному уравнению (1.1), а с другой – к условиям сопряжения, отражающим непрерывность функции $p$ и нормальных составляющих скоростей фильтрации на каждой границе $\Gamma_{ij}$:

$$\begin{aligned} p_i &= p_j \\ \frac{k_i}{\mu}\frac{\partial p_i}{\partial \nu} &= \frac{k_j}{\mu}\frac{\partial p_j}{\partial \nu} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Утверждение, что вариационная формулировка (1.2) эквивалентна уравнению (1.1) с условиями сопряжения (1.3), дает возможность использовать вариационный принцип для нахождения приближенных решений нестационарных задач фильтрации в пористых пластах с непостоянными, разрывными и, в частности, кусочно-постоянными коллекторскими свойствами.

В частном случае однородной пористой среды при отсутствии границ разрыва фильтрационных свойств вариационный принцип для нестационарной фильтрации жидкости имеет вид

$$\delta W = 0$$

$$W = \left[\frac{1}{2}\int_{\Omega}\beta\frac{\partial p}{\partial t}*p + \frac{k}{\mu}(\nabla p*\nabla p)\right]dV$$

Варьирование этого функционала приводит к выражению

$$\delta W = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left[\delta\left(\beta\frac{\partial p}{\partial t}*p\right) + \frac{k}{\mu}\delta(\nabla p*\nabla p)\right]dV =$$

$$= \int_{\Gamma}\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial \nu}*\delta p dl - \int_{\Omega}\left(\beta\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{k}{\mu}\nabla^2 p\right)*\delta p dV$$

для которого условие стационарности $\delta W = 0$ равносильно решению уравнения пьезопроводности (1.1) в однородной пористой среде (считаем, что вариации давления на внешней поверхности Г равны нулю).

**2. Вариационный принцип для нестационарной фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде с разрывными коллекторскими свойствами.** В качестве математической модели, описывающей упругий режим фильтрации в неоднородной среде с двойной пористостью, воспользуемся системой дифференциальных уравнений [10]:

$$\begin{aligned} \beta_1(x,y,z)\frac{\partial p_1}{\partial t} &= \nabla\left(\frac{k_1(x,y,z)}{\mu}\nabla p_1\right) - \frac{\alpha(x,y,z)}{\mu}(p_2 - p_1) \\ \beta_2(x,y,z)\frac{\partial p_2}{\partial t} &= \nabla\left(\frac{k_2(x,y,z)}{\mu}\nabla p_2\right) + \frac{\alpha(x,y,z)}{\mu}(p_2 - p_1) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь индекс “1" относится к системе трещин; "2" – к системе пористых блоков; $\alpha = k_2/l_1^2$ – безразмерная характеристика среды, определяемая через проницаемость пористых блоков $k_2$ и квадрат длины трещин $l_1$.

Покажем, что дифференциальные уравнения (2.1) являются уравнениями Эйлера–Лагранжа для следующего функционала:

$$W = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\Big[\beta_1(x,y,z)\frac{\partial p}{\partial t}*p_1 + \frac{k_1(x,y,z)}{\mu}(\nabla p_1*\nabla p_1) + \frac{\alpha(x,y,z)}{\mu}(p_2-p_1)*p_1 + \tag{2.2}$$
$$+\beta_2(x,y,z)\frac{\partial p_2}{\partial t}*p_2 + \frac{k_2(x,y,z)}{\mu}(\nabla p_2*\nabla p_2) - \frac{\alpha(x,y,z)}{\mu}(p_2-p_1)*p_2\Big]dV$$

Варьирование функционала (2.2) при наличии областей $\Omega_i$, $\Omega_j$ с различными фильтрационными параметрами $\beta_{1i}$, $\beta_{2i}$, $k_{1i}$, $k_{2i}$ и $\beta_{1j}$, $\beta_{2j}$, $k_{1j}$, $k_{2j}$ приводит к выражению

$$\delta W = \int_{\Gamma}\left(\frac{k_1}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial \nu}*\delta p_1 + \frac{k_2}{\mu}\frac{\partial p_2}{\partial \nu}*\delta p_2\right)dl +$$

$$+\int_{\Gamma_{ij}}\left[\left(\frac{k_{1i}}{\mu}\frac{\partial p_{1i}}{\partial \nu_{ij}}*\delta p_{1i} + \frac{k_{2i}}{\mu}\frac{\partial p_{2i}}{\partial \nu_{ij}}*\delta p_{2i}\right) - \left(\frac{k_{1j}}{\mu}\frac{\partial p_{1j}}{\partial \nu_{ij}}*\delta p_{1j} + \frac{k_{2j}}{\mu}\frac{\partial p_{2j}}{\partial \nu_{ij}}*\delta p_{2j}\right)\right]dl_{ij} -$$

$$-\int_{\Omega}\left\{\left[\beta_1(x,y,z)\frac{\partial p_1}{\partial t} - \nabla\left(\frac{k_1(x,y,z)}{\mu}\nabla p_1\right) + \frac{\alpha(x,y,z)}{\mu}(p_2-p_1)\right]*\delta p_1 +\right.$$

$$\left.+\left[\beta_2(x,y,z)\frac{\partial p_2}{\partial t} - \nabla\left(\frac{k_2(x,y,z)}{\mu}\nabla p_2\right) - \frac{\alpha(x,y,z)}{\mu}(p_2-p_1)\right]*\delta p_2\right\}dV$$

Ограничимся классом функций, для которых вариации давления $\delta p_j$ ($j = 1, 2$) на внешней поверхности $\Gamma$ равны нулю. Поскольку вариации $\delta p_j$ в обеих подобластях $\Omega$ произвольны, из основной леммы вариационного исчисления следует, что условие стационарности $\delta W = 0$ для функционала (2.2) эквивалентно решению системы уравнений (2.1) с условиями сопряжения на границах раздела сред с различными фильтрационными параметрами. Возможны различные условия на этих границах.

Если давления на границе $\Gamma_{ij}$ в системе трещин и пор являются непрерывными, то

$$\delta p_{1i} = \delta p_{1j}, \quad \delta p_{2i} = \delta p_{2j}$$
$$\frac{k_{li}}{\mu}\frac{\partial p_{li}}{\partial \nu} = \frac{k_{lj}}{\mu}\frac{\partial p_{lj}}{\partial \nu} \quad (l = 1, 2) \tag{2.3}$$

Если давление на границе $\Gamma_{ij}$ в системе трещин непрерывно, а в порах терпит разрыв (поры запечатаны), то имеет место (2.3) при $l = 1$

$$\delta p_{1i} = \delta p_{1j}, \quad \delta p_{2i} \neq \delta p_{2j}$$
$$\frac{k_{2i}}{\mu}\frac{\partial p_{2i}}{\partial \nu} = 0, \quad \frac{k_{2j}}{\mu}\frac{\partial p_{2j}}{\partial \nu} = 0 \tag{2.4}$$

Если давление в трещинах терпит разрыв на границе $\Gamma_{ij}$ (трещины запечатаны), а в порах – непрерывно, то имеет место (2.3) при $l = 2$

$$\delta p_{1i} \neq \delta p_{1j}, \quad \delta p_{2i} = \delta p_{2j}$$
$$\frac{k_{1i}}{\mu}\frac{\partial p_{1i}}{\partial \nu} = 0, \quad \frac{k_{1i}}{\mu}\frac{\partial p_{1j}}{\partial \nu} = 0 \tag{2.5}$$

При условиях $\delta p_{1i} \neq \delta p_{1j}$, $\delta p_{2i} \neq \delta p_{2j}$ – трещины и поры запечатаны, т.е. пласты гидродинамически изолированы и имеет место (2.4), (2.5).

Выбор тех или иных условий сопряжения на границе раздела разнородных трещиновато-пористых пластов определяется их геологическим строением – протяженностью и раскрытостью трещин, размерами пор, взаимным расположением пор и трещин и т.д.

В частном случае однородной трещиновато-пористой среды при отсутствии границ разрыва фильтрационных свойств вариационный принцип для нестационарной фильтрации жидкости имеет вид

$$\delta W = 0$$

$$W = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\Big[\beta_1\frac{\partial p_1}{\partial t}*p_1 + \frac{k_1}{\mu}(\nabla p_1*\nabla p_1) + \frac{\alpha}{\mu}(p_2 - p_1)*p_1 + \\ + \beta_2\frac{\partial p_2}{\partial t}*p_2 + \frac{k_2}{\mu}(\nabla p_2*\nabla p_2) - \frac{\alpha}{\mu}(p_2 - p_1)*p_1\Big]dV \tag{2.6}$$

Варьирование этого функционала приводит к выражению

$$\delta W = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\Big\{\beta_1\delta\Big(\frac{\partial p_1}{\partial t}*p_1\Big) + \frac{k_1}{\mu}\delta(\nabla p_1*\nabla p_1) + \frac{\alpha}{\mu}\delta[(p_2 - p_1)*p_1] + \\ + \beta_2\delta\Big(\frac{\partial p_2}{\partial t}*p_2\Big) + \frac{k_2}{\mu}\delta(\nabla p_2*\nabla p_2) - \frac{\alpha}{\mu}\delta[(p_2 - p_1)*p_2]\Big\}dV = \\ = \int_{\Gamma}\Big(\frac{k_1}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial \nu}*\delta p_1 + \frac{k_2}{\mu}\frac{\partial p_2}{\partial \nu}*\delta p_2\Big)dl - \int_{\Omega}\Big\{\Big[\beta_1\frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{k_1}{\mu}\nabla^2 p_1 + \frac{\alpha}{\mu}(p_2 - p_1)\Big]*\delta p_1 + \\ + \Big[\beta_2\frac{\partial p_2}{\partial t} - \frac{k_2}{\mu}\nabla^2 p_2 - \frac{\alpha}{\mu}(p_2 - p_1)\Big]*\delta p_2\Big\}dV \tag{2.7}$$

для которого условие стационарности $\delta W = 0$ равносильно решению системы уравнений (2.1) для однородной трещиновато-пористой среды (считаем, что вариации давления $\delta p_j$ ($j = 1, 2$) на внешней поверхности $\Gamma$ равны нулю).

**3. Примеры построения фильтрационных полей в неоднородных коллекторах.** Для нахождения истинных полей давления, на которых реализуется условие $\delta W = 0$, воспользуемся вариационным методом Ритца, согласно которому приближенное решение задач $p_N(x, y, z, t)$ ищется в виде отрезка ряда

$$p_N(x, y, z, t) = \sum_{k=0}^{N} a_k(t)\varphi_k(x, y, z) \tag{3.1}$$

где $a_k$ – неизвестные коэффициенты ряда, в общем случае зависящие от времени; $\varphi_k$ – базисные функции, которые должны удовлетворять граничным условиям задачи, а также условию полноты [11]. Подстановка ряда (3.1) в соответствующую вариационную формулировку приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $a_k$. Определив $a_k$ и подставив их в выражение (3.1), получим искомое поле давлений в пласте (вернее, его $N$-е приближение).

Рассмотрим задачу о притоке жидкости в круговом кусочно-однородном пласте мощностью $H$, вскрытом скважиной радиуса $r_c$ и ограниченном контуром питания $R_k$.

При этом необходимо решить уравнение (1.1) в цилиндрических координатах. Пусть начальное давление в залежи было $p_0$, и при эксплуатации скважины оно изменялось по некоторому закону $P_0(t)$ до давления $p_c$. На контуре питания ($r = R_k$) поддерживается первоначальное давление $p_0$. На кровле и подошве пласта выполняется условие непроницаемости. В следующих безразмерных переменных формулировка задачи имеет вид:

$$\xi = \frac{r}{R_k},\quad \xi_c = \frac{r_c}{R_k},\quad \eta = \frac{y}{H},\quad \alpha_i = \frac{y_i}{H},\quad \beta_j = \frac{r_j}{R_k},\quad P = \frac{(p-p_c)}{(p_0-p_c)},\quad \kappa_{ij} = \frac{k_{ij}}{k_m}$$

$$b_{ij} = \frac{\beta_{ij}}{\beta_m},\quad \tau = \frac{t\chi_m}{R_k^2},\quad k_m = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}\frac{k_{ij}S_{ij}}{R_kH},\quad \beta_m = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}\frac{\beta_{ij}S_{ij}}{R_kH},\quad \chi_m = \frac{k_m}{\mu\beta_m}$$

$$b\frac{\partial P}{\partial\tau} = \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\kappa\xi\frac{\partial P}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\kappa\frac{\partial P}{\partial\eta}\right)\left(\frac{R_k}{H}\right)^2 \tag{3.2}$$

$$P(\xi,\eta,0) = 1,\quad P(\xi_c,\eta,\tau) = P_0(\tau),\quad P(1,\eta,\tau) = 1$$
$$\frac{\partial P}{\partial\eta} = 0\quad(\eta = 0, \eta = 1) \tag{3.3}$$

На каждой границе разрыва фильтрационных свойств должны выполняться условия сопряжения (1.3).

Как показано в разд. 1, сформулированная задача эквивалентна вариационной задаче об отыскании экстремалей для функционала $W$, выраженного в цилиндрических координатах:

$$W = \pi\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}}\int_{\beta_j}^{\beta_{j+1}}\left\{b_{ij}\frac{\partial P}{\partial\tau}*P + \kappa_{ij}\left[\frac{\partial P}{\partial\xi}*\frac{\partial P}{\partial\xi} + \left(\frac{R_k}{H}\right)^2\frac{\partial P}{\partial\eta}*\frac{\partial P}{\partial\eta}\right]\right\}\xi d\xi d\eta \tag{3.4}$$

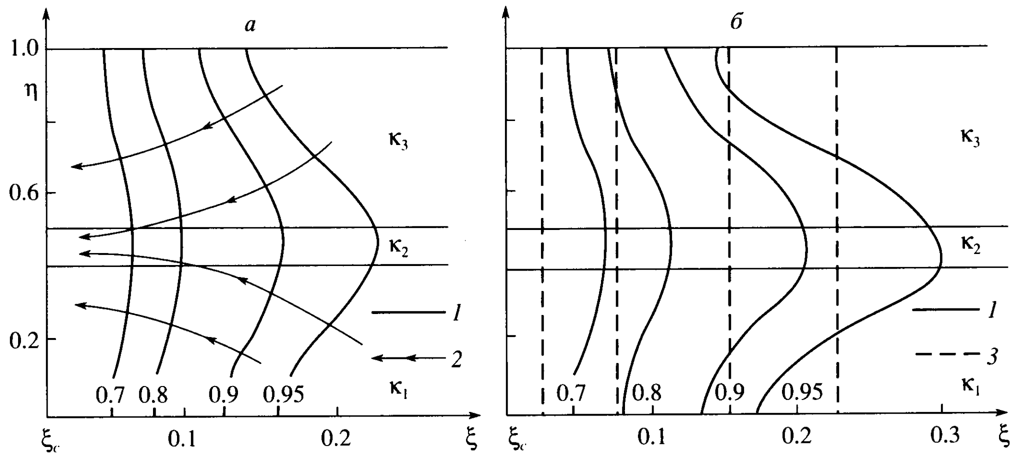
где $n$ – число пластов; $l$ – число зон в пласте.

Согласно алгоритму использования прямых вариационных методов, поле давлений в пласте будем искать в виде ряда, удовлетворяющего начальным и краевым условиям данной задачи:

$$P(\xi,\eta,\tau) = 1 + P_c(\tau)\ln\xi + (\xi_c - \xi)\ln\xi\left[\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}a_{km}(\tau)\xi^k\left(\frac{\eta^{m+1}}{m+1} - \frac{\eta^{m+2}}{m+2}\right) + \sum_{k=1}^{N}d_k(\tau)\xi^k\right]$$
$$P_c(\tau) = \frac{P_0(\tau)-1}{\ln\xi_c} \tag{3.5}$$

Контрольные расчеты показали, что достаточно ограничиться $N$ = 3–10, чтобы последующее приближение отличалось от предыдущего менее, чем на 1% и практически совпадало с точным решением задач, имеющимся лишь в случае двух кусочно-однородных зон или прослоев.

На фиг. 1 показано поле давлений в трехслойном пористом пласте, в котором один из пропластков обладает малой мощностью и большой проницаемостью по сравнению с другими. Такая картина может наблюдаться на практике в том случае, когда пласт рассечен трещиной большой протяженности. Поле изобар рассчитано вариационным методом при $N$ = 3 в различные моменты времени. Как и следовало ожидать, поле давлений быстрее распространяется по пропластку с наибольшей проницаемос-



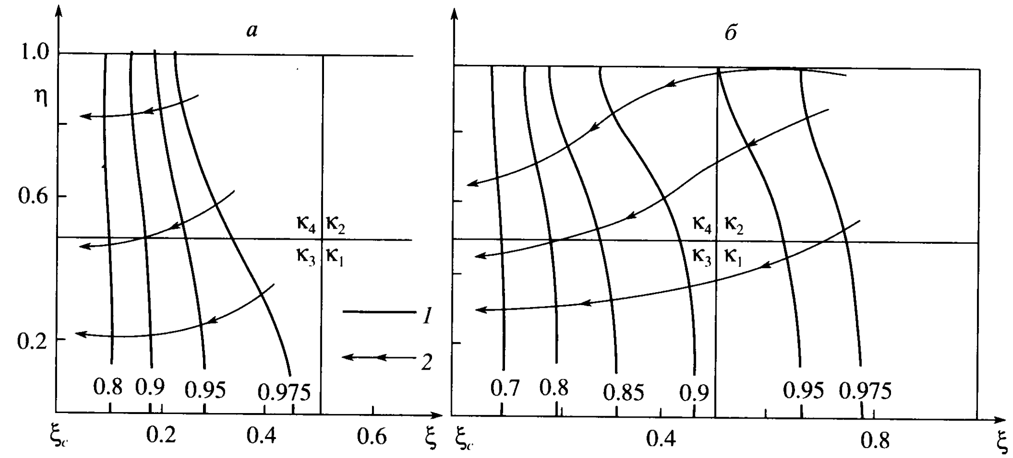

Фиг. 1. Поле давлений в круговом трехслойном пласте ($h_1 : h_2 : h_3 = 0.4 : 0.1 : 0.5$; $\kappa_1 : \kappa_2 : \kappa_3 = 0.096 : 9.6 : 0.003$; $b_1 = b_2 = b_3$) в различные моменты времени: *а* – $\tau = 0.01$, *б* – $\tau = 0.07$; *1* – линии изобар, *2* – линии тока, *3* – линии изобар в пласте с осредненной проницаемостью

тью, в то время как в менее проницаемых слоях наблюдается эффект так называемого гидравлического запаздывания. Вследствие возникающего градиента давлений, между отдельными слоями залежи происходят перетоки жидкости вдоль линий тока, отмеченных на фиг. 1.

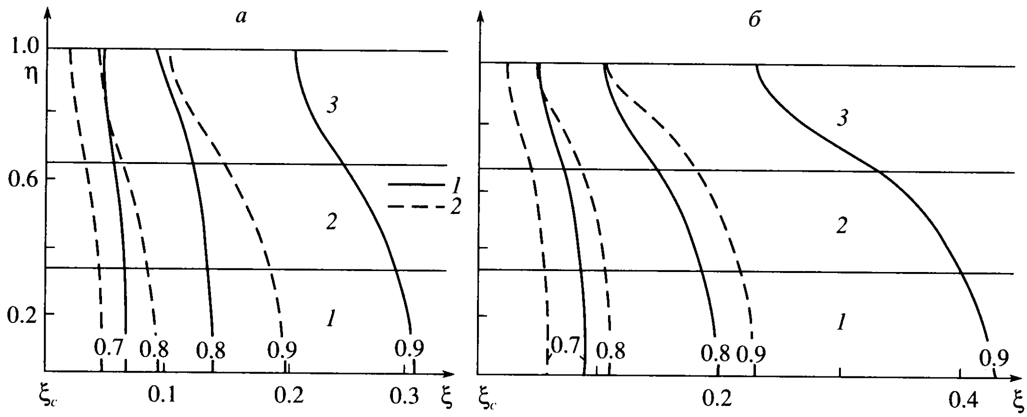
На практике для упрощения гидродинамических расчетов нередко осредняют фильтрационные параметры многослойных залежей. Такой подход облегчает определение дебитов скважин, динамики пластового давления, но тем не менее может сильно исказить реальную картину течения в слоистом пласте. На фиг. 1*б* пунктиром нанесено поле давлений в пласте, рассчитанное по средневзвешенной по мощности проницаемости $k_m = 1$. Видно, что осреднение фильтрационных свойств залежи существенно искажает реальную картину поля давлений, не позволяет выявить перетоки между отдельными пропластками.

При помощи вариационных методов можно также рассчитать фильтрационные поля в пластах более сложного строения. Допустим, в результате обработки прискважинной зоны пласта улучшились ее фильтрационные свойства. На фиг. 2 показано поле изобар в различные моменты времени в круговом двухслойном пласте, имеющем прискважинную зону с улучшенными фильтрационными характеристиками. Здесь для наглядности построены линии тока жидкости, позволяющие качественно проследить направления фильтрационных потоков.

На фиг. 3 показано рассчитанное вариационным методом поле давлений в трехслойном трещиновато-пористом пласте в различные моменты времени. Постановка задачи здесь аналогична рассмотренной выше. Фильтрационные параметры системы трещин “1” для каждого пропластка выбраны на порядок большими, чем системы пор “2”, что соответствует реальным трещиновато-пористым средам. Как видно из фигуры, изменение давления как в трещинах, так и в порах происходит быстрее по нижнему, наиболее проницаемому пропластку. Кроме того, на порядок большая проницаемость трещин по сравнению с порами обусловливает опережение фронта давления в системе трещин в каждом из пропластков. Таким образом, имеет место “двойное” гидравлическое запаздывание, вызванное, с одной стороны, слоистой неоднородностью залежи, а с другой – наличием в пределах каждого пропластка двух взаимодейст-




Фиг. 2. Поле давлений в круговом неоднородном пласте ($\kappa_1 : \kappa_2 : \kappa_3 : \kappa_4 = 1 : 0.1 : 10 : 2$) в различные моменты времени: *а* – $\tau = 0.01$, *б* – $\tau = 0.06$; *1* – линии изобар, *2* – линии тока




Фиг. 3. Поле давлений в трехслойном круговом трещиновато-пористом пласте в различные моменты времени: *а* – $\tau = 0.01$, *б* – $\tau = 0.05$. Соотношение параметров трещин: $\kappa_{11} : \kappa_{12} : \kappa_{13} = 10 : 1 : 0.1$; пористых блоков: $\kappa_{21} : \kappa_{22} : \kappa_{23} = 1 : 0.1 : 0.01$ ($h_1 = h_2 = h_3$; $b_{1k} = b_{2i}$, $i = 1, 2, 3$): *1* – линии изобар в системе трещин, *2* – линии изобар в системе пористых блоков

вующих континуумов – трещин и пор, обладающих различными фильтрационными характеристиками.

Таким образом, приведенные в этом разделе примеры расчетов полей давления в пластах с разрывными коллекторскими свойствами демонстрируют эффективность использования прямых вариационных методов в условиях сложного строения коллекторов, когда другие математические методы чрезвычайно громоздки и трудоемки, а зачастую и просто неприемлемы.

**Заключение.** Сформулированы вариационные принципы нестационарной фильтрации жидкости в пористых и трещиновато-пористых средах. Произведено обобщение вариационных принципов на случай сред с разрывными коллекторскими свойствами.

Приведены примеры расчета нестационарных фильтрационных полей в многослойных пористых и трещиновато-пористых пластах при помощи вариационного метода. Вариационные принципы и методы применимы при любом числе областей неоднородности (слоев и зон), что позволяет эффективно их использовать для расчета фильтрационных полей в пластах сложного строения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.
2. *Полак Л.С.* Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1960. 599 с.
3. *Щелкачев В.Н.* Проблемы педагогики высшей школы. Вариационные принципы механики. М.: Нефть и газ, 1996. 237 с.
4. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1973. Т. 1. 536 с.; Т. 2. 584 с.
5. *Лурье М.В.* Применение вариационного принципа для исследования разрывов в сплошной среде // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 4. С. 747–753.
6. *Данилов В.Л.* Вариационный принцип наименьшей скорости рассеяния энергии при фильтрации жидкостей в пористой среде и его приложения. Москва–Ижевск: Ин-т компьют. исследований, 2003. 108 с.
7. *Филинов М.В., Лурье М.В., Максимов В.М., Епишин В.Д.* Об использовании вариационного принципа для построения приближенных решений задач фильтрации жидкости и газа // Изв. вузов. Нефть и газ. 1979. № 6. С. 25–31.
8. *Gurtin M.E.* Variational principles for linear elastodynamics // Arch. Rat. Mech. Analysis. 1964. V. 16. № 1. P. 34–50.
9. *Айнола Л.Я.* Вариационные принципы для нестационарных задач теплопроводности // Инж.-физ. ж. 1967. Т. 12. № 4. С. 465–468.
10. *Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 5. С. 852–864.
11. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.


Москва

Поступила в редакцию
12.III.2004