

УДК 532.5.013.4: 536.252

© 2004 г. Д. В. ЛЮБИМОВ, С. В. ШКЛЯЕВ

**О ДЛИННОВОЛНОВОЙ КОНВЕКЦИИ В ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЕ**

Рассмотрены периодические режимы крупномасштабной конвекции в двухслойной системе с деформируемой границей раздела. В предельном случае сильного поверхностного натяжения получено амплитудное уравнение, описывающее деформацию поверхности раздела. Исследованы периодические двумерные режимы течения; показано, что в зависимости от параметров задачи возможно жесткое и мягкое возбуждение конвекции. Обнаружено конечно-амплитудное возбуждение конвекции при нагреве сверху.

*Ключевые слова:* тепловая конвекция, двухслойная система, деформируемая граница раздела, крупномасштабные течения.

В большинстве работ по тепловой конвекции используются уравнения, полученные Буссинеском [1]. В этом случае жидкость считают изотермически несжимаемой, а тепловым расширением пренебрегают в уравнениях движения всюду, за исключением слагаемого, описывающего архимедову силу. Это приближение означает, что тепловое расширение мало, а поле тяжести велико. С формальной точки зрения приближения Буссинеска строятся в предположении:  $\beta\Theta \ll 1$  ( $\beta$  – коэффициент объемного расширения,  $\Theta$  – характерная разность температур), число Галилея является большим параметром:  $Ga = gh^3/\nu\chi \gg 1$  ( $g$  – ускорение свободного падения,  $h$  – характерный размер задачи,  $\nu$ ,  $\chi$  – коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности соответственно). При этом произведение двух асимптотических параметров является конечным:  $Ra = \beta\Theta Ga$  – число Рэлея.

Сильное поле тяжести приводит к тому, что при использовании приближений Буссинеска свободная граница (граница раздела двух жидкостей) остается плоской [2]. Однако в работе [3] рассмотрена тепловая конвекция в слое со свободной верхней границей, с учетом деформации последней. В частности, получено длинноволновое решение. Позднее в [4] обращено внимание на неправомерность использования приближений Буссинеска в этой задаче и проведен ее анализ для изотермически несжимаемой жидкости (для конечных температурных изменений плотности). Показано, что длинноволновая неустойчивость не возникает при корректном учете деформации свободной поверхности. В [4] также подчеркивается, что особого рассмотрения требует случай жидкостей, обладающих близкими значениями плотности.

Этот случай рассмотрен в работе [5]. Изменения плотности системы (как обусловленные переходом из одной жидкости в другую, так и связанные с тепловым расширением) малы, и необходимо достаточно сильное поле тяжести, чтобы вызвать движение жидкостей. В задаче появляется еще один малый параметр – относительная разность плотностей  $\rho_{0j}^*$  при фиксированной температуре  $\delta = 2(\rho_{02}^* - \rho_{01}^*)/(\rho_{02}^* + \rho_{01}^*) \ll 1$ , а произведение двух асимптотических параметров конечно:  $G = \delta Ga$  – модифицированное число Галилея. В этих условиях деформация поверхности раздела может оказаться существенной.

Приближения (называемые далее обобщенными приближениями Буссинеска), полученные в работе [5], были независимо воспроизведены в [6]. В этой работе также была изучена устойчивость двухслойной системы, подогреваемой снизу. В частности, была обнаружена длинноволновая мода неустойчивости. Слабонелинейное исследо-

вание длинноволновых возмущений проведено в [7, 8]. Получено амплитудное уравнение, описывающее крупномасштабную конвекцию вблизи порога устойчивости, показан жесткий характер возбуждения [7]. В [8] рассмотрен предельный случай, в котором возможно также мягкое возбуждение конвекции в достаточно длинной, но ограниченной в продольном направлении двухслойной системе.

В настоящей работе изучена эволюция конечно-амплитудных длинноволновых возмущений.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается крупномасштабная конвекция в горизонтальной двухслойной системе с деформируемой границей раздела. Твердые границы идеально теплопроводны и поддерживаются при разных значениях температуры:  $\Theta$  (нижняя) и  $-\Theta$  (верхняя). Ось  $z$  направлена вертикально вверх, ось  $x$  расположена горизонтально на расстоянии  $h$  от каждой из твердых границ. Жидкости имеют близкие значения плотностей.

В этих условиях применимы уравнения тепловой конвекции в обобщенных приближениях Буссинеска [5, 6]:

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} + (\mathbf{v}_j \nabla) \mathbf{v}_j \right) = -\nabla p_j + \nu_j \Delta \mathbf{v}_j + \text{Ra} \beta_j T_j \boldsymbol{\gamma} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} + \mathbf{v}_j \nabla T_j = \chi_j \Delta T_j, \quad \text{div} \mathbf{v}_j = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (1.2)$$

На твердых границах фиксирована температура и выполняются условия прилипания:

$$z = \pm 1: \mathbf{v}_{1,2} = 0, \quad T_{1,2} = \pm 1 \quad (1.3)$$

На поверхности раздела, задаваемой уравнением  $z = \zeta(x, y, t)$ , выполняются следующие граничные условия:

$$z = \zeta: \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \zeta = v_z, \quad [\mathbf{v}] = 0, \quad [T] = 0, \quad [\kappa \nabla T] \mathbf{n} = 0 \quad (1.4)$$

$$([p] + G\zeta) \mathbf{n} - [\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}] = \mathbf{n} C \text{div} \mathbf{n} \quad (1.5)$$

Здесь все обозначения обычные,  $p_j$  имеет смысл добавки к гидростатическому распределению давления  $-\delta^{-1} \rho_{0j} G z$ . Квадратными скобками обозначается скачок соответствующей величины при переходе из первой (нижней) жидкости во вторую:  $[f] = (f_1 - f_2)_z = \zeta$ .  $\mathbf{n}$  – вектор нормали к поверхности раздела, направленный из первой жидкости во вторую,  $\boldsymbol{\gamma}$  – единичный вектор, направленный вдоль оси  $z$ .

Система уравнений и граничных условий (1.1)–(1.5) записана в безразмерном виде, в качестве единиц измерения расстояния, времени, скорости, температуры и давления выбраны  $h$ ,  $h^2/\chi$ ,  $\chi/h$ ,  $\Theta$ ,  $\rho_0 \nu \chi / h^2$  соответственно. Здесь  $\rho_0$ ,  $\nu$ ,  $\chi$ , а также используемые ниже  $\beta$ ,  $\kappa$  – средние значения плотности, коэффициентов кинематической вязкости, температуропроводности, объемного расширения и теплопроводности. Например,  $\nu = (\nu_1^* + \nu_2^*)/2$ ,  $\nu_{1,2}^*$  – размерные значения коэффициента кинематической вязкости для каждой из жидкостей.

Задача (1.1)–(1.5) содержит следующие безразмерные параметры: число Рэлея  $\text{Ra}$ , модифицированное число Галилея  $G$ , число Прандтля  $\text{Pr}$ , капиллярное число  $\text{Ca}$  и характеристики обеих жидкостей:

$$\text{Ra} = \frac{g \beta \Theta h^3}{\nu \chi}, \quad G = \frac{\delta g h^3}{\nu \chi}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\chi}, \quad \text{Ca} = \frac{\alpha h}{\rho \nu \chi}$$

$$\nu_j = \frac{\nu_j^*}{\nu}, \quad \kappa_j = \frac{\kappa_j^*}{\kappa}, \quad \beta_j = \frac{\beta_j^*}{\beta}, \quad \chi_j = \frac{\chi_j^*}{\chi}, \quad \rho_{0j} = \frac{\rho_{0j}^*}{\rho_0}$$

$$v_1 + v_2 = 2, \quad \kappa_1 + \kappa_2 = 2, \quad \beta_1 + \beta_2 = 2, \quad \chi_1 + \chi_2 = 2, \quad \rho_{01} + \rho_{02} = 2$$

$$\rho_{02} - \rho_{01} = \delta \ll 1$$

**2. Амплитудное уравнение.** Рассмотрим двумерное конвективное движение, вызываемое искривлением поверхности раздела:  $\zeta = \zeta(x, t)$ . В отличие от работ [7, 8] отклонение поверхности раздела не предполагается малым. Считая указанную деформацию крупномасштабной ( $|\zeta| \sim h \ll L$ , где  $L$  – продольный размер конвективной структуры), применим метод многих масштабов [9] для изучения рассматриваемой задачи. Раскладываем поля температуры, давления, скорости, производные по времени и продольной координате в ряды по формальному параметру  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \sim h/L$ ):

$$T_j = T_j^{(0)} + \varepsilon T_j^{(1)} + \varepsilon^2 T_j^{(2)} + \dots, \quad p_j = p_j^{(0)} + \varepsilon p_j^{(1)} + \varepsilon^2 p_j^{(2)} + \dots, \quad (2.1)$$

$$v_{jx} = \varepsilon u_j + \varepsilon^2 u_j^{(2)} + \dots, \quad v_{jz} = \varepsilon^2 w_j + \dots \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots \quad (2.3)$$

Кроме того, будем считать большим капиллярный параметр:

$$Ca = \varepsilon^{-2} C + \dots \quad (2.4)$$

Во многих реальных системах капиллярное число достигает достаточно больших величин:  $Ca \approx 10^5 - 10^6$ . Соотношение (2.4) означает, что на продольном размере конвективной структуры капиллярный перепад давления сравним с гравитационным или конвективным.

В главном порядке отклонение поверхности раздела вызывает лишь изменение температуры жидкостей (вследствие различия их теплопроводностей) и перераспределение давления:

$$T_{1,2}^{(0)} = \pm 1 - \kappa_{2,1} \xi(z \pm 1), \quad \xi(x, t) = \frac{2}{2 - [\kappa] \zeta(x, t)} \quad (2.5)$$

$$p_{1,2}^{(0)} = \pm Ra \beta_{1,2} z - Ra \beta_{1,2} \kappa_{2,1} \frac{(z \pm 1)^2}{2} \xi + P_{1,2}(x, t) \quad (2.6)$$

Здесь и далее индекс у медленной координаты  $x_1$  (времени  $t_1$ ) опускается. Величины  $P_{1,2}(x, t)$  имеют смысл медленно меняющихся вдоль оси  $x$  частей давления. С помощью условия баланса нормальных напряжений (1.5) и условия замкнутости течения, возникающего в первом порядке по  $\varepsilon$ , эти функции могут быть выражены через  $\zeta(x, t)$  и ее производные.

Продольные изменения давления вызывают медленное конвективное течение жидкости, имеющее вид ( $v_1 = v_2$ )

$$u_1 = F_1(z, \zeta) \zeta_x - \frac{C}{8} (z+1)(\zeta-1)^2 (\zeta z - \zeta + 2z) \zeta_{xxx}, \quad (2.7)$$

$$u_2 = F_2(z, \zeta) \zeta_x - \frac{C}{8} (z-1)(\zeta+1)^2 (\zeta z + \zeta - 2z) \zeta_{xxx} \quad (2.8)$$

$$w_1 = - \int_{-1}^z u_{1x}(z, x) dz, \quad w_2 = \int_z^1 u_{2x}(z, x) dz \quad (2.9)$$

где  $F_{1,2}$  – громоздкие функции (полиномиальные по  $z$ , дробно-рациональные по  $\zeta$ ). Здесь и далее индексы  $x, t$  у переменной обозначают частные производные по продольной координате или времени.

Условие разрешимости задачи, получаемой во втором порядке по  $\epsilon$ , дает замкнутое амплитудное уравнение, описывающее форму поверхности раздела:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( f(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) - C \frac{\partial}{\partial x} \left( f_G(\zeta) \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \right) \quad (2.10)$$

$$f(\zeta) = \text{Ra} f_R(\zeta) - G f_G(\zeta)$$

Здесь  $f_G(\zeta)$  и  $f_R(\zeta)$  – громоздкие функции, обращающиеся в нуль при  $\zeta = \pm 1$ . Первая из них положительна при  $|\zeta| < 1$ , вторая не является знакоопределенной. В предельном случае, когда коэффициенты вязкости и объемного расширения обеих жидкостей совпадают, т.е.  $[\beta] = [v] = 0$ , получаем:

$$f_R = \frac{[\kappa](1 - \zeta^2)^2 [ \kappa(4\zeta^4 - 9\zeta^2 - 7) - 10\zeta^3 + 34\zeta ]}{240 (2 - [\kappa]\zeta)^2}, \quad f_G = \frac{1}{24} (1 - \zeta^2)^3$$

Ниже рассматривается именно этот предельный случай. Очевидна симметрия задачи – при одновременной смене знака  $[\kappa]$  и  $\zeta$  уравнения не меняются. Это позволяет рассматривать лишь положительные значения скачка теплопроводностей.

Разложение  $f(\zeta)$  вблизи некоторой точки  $\zeta_0$  с точностью до кубических членов дает нелинейные слагаемые, полученные в [8]. Значение  $f_G(\zeta_0)$  дает слагаемое, обусловленное поверхностным натяжением в амплитудном уравнении, рассмотренном в [8]. Остальные слагаемые с четвертой производной (обусловленные диффузией импульса и энергии в продольном направлении), полученные в [8], отсутствуют в рассматриваемом здесь приближении.

Проводя в рамках уравнения (2.10) слабонелинейный анализ длинноволновых возмущений, получим уравнение

$$\begin{aligned} \xi_t &= -(A_1(\text{Ra} - R_0)\xi + A_2\xi^2 + A_3\xi_{xx})_{xx} \\ \xi &= \zeta - \zeta_0, \quad \zeta_0 = \text{const}, \quad |\xi| \ll 1 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь  $R_0$  – критическое число Рэлея для длинноволновой конвекции (см. [6, 8]). Это уравнение получено для описания длинноволновой конвекции в системе с деформируемой границей раздела в [7]. Если же параметры системы таковы, что  $2A_2 = (\partial f / \partial \zeta)_{\zeta = \zeta_0} \rightarrow 0$ , то наряду с квадратичным по  $\xi$  слагаемым нужно учесть кубическое.

В этом случае будем иметь амплитудное уравнение, полученное в [8] и исследованное в [8, 10, 11]. Разумеется, что в обоих предельных случаях нужно подходящим образом выбирать масштабы “медленных” времени и длины. В рассматриваемом ниже случае  $[\beta] = [v] = 0$  условие  $(\partial f / \partial \zeta)_{\zeta = \zeta_0} = 0$  не реализуется при  $\text{Ra} \approx R_0$ , т.е. для длинноволновых возмущений.

Уравнение (2.10) получено в предельном случае сильного поверхностного натяжения. В случае конечного поверхностного натяжения ( $C = 0$ ) второе слагаемое в правой части отсутствует, и эволюция поверхности раздела описывается нелинейным уравнением диффузии. При положительном коэффициенте диффузии  $f(\zeta)$  система эволюционирует в равновесное состояние: плоская поверхность раздела  $\zeta = \text{const}(x, t)$ , теплопроводное распределение температуры (2.5). Если же в некоторых точках поверхности раздела неравенство  $f(\zeta) > 0$  нарушается, то развиваются быстро осциллирующие решения с бесконечными пространственными производными  $\zeta_x$ . Очевидно, что такие решения противоречат изначальному предположению о медленном изме-

нении всех функций с координатой  $x$ . Вблизи критических точек, определяемых условием  $f(\zeta) = 0$  (т.е.  $\zeta_x \rightarrow \infty$ ), возникают “доменные стенки”, внутри которых существенны поверхностное натяжение, продольный перенос тепла и импульса.

Таким образом, для конечного поверхностного натяжения можно лишь указать область притяжения равновесного состояния, определяемую неравенством:  $f(\zeta) > 0$ . При нарушении этого условия уравнение (2.10) без второго слагаемого в правой части приводит к появлению нефизических решений.

Выбирая подходящим образом единицы измерения времени и координаты, переписываем уравнение (2.10) в виде (для перемасштабированных величин оставлены прежние обозначения):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( f(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( f_G(\zeta) \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \right) \quad (2.12)$$

$$f(\zeta) = r f_R(\zeta) - g f_G(\zeta), \quad r = \text{Ra}/|G|, \quad g = \pm 1$$

Значение  $g = 1$  соответствует потенциально неустойчивой изотермической стратификации – тяжелая жидкость находится сверху. Легко увидеть, что единицей измерения продольной координаты в уравнении (2.12) является капиллярная длина  $h\sqrt{\text{Ca}/|G|} = \sqrt{\alpha/|\delta|\rho_0 g} \gg h$ . Таким образом, рассматриваемый предельный случай соответствует достаточно малым изменениям плотности и/или слабому полю тяжести.

**3. Стационарные периодические решения вблизи порога устойчивости.** Для стационарных решений проинтегрируем уравнение (2.12):

$$\zeta''' - \Phi(\zeta)\zeta' = \frac{\text{const}}{f_G(\zeta)} = 0, \quad \Phi(\zeta) = r \frac{f_R(\zeta)}{f_G(\zeta)} - g = r\Psi(\zeta) - g \quad (3.1)$$

Здесь штрихом обозначаются производные по координате  $x$ . Доказательство того, что для периодического решения  $\text{const} = 0$ , очевидно: интегрируем уравнение (3.1) по периоду и учитываем, что  $f_G(\zeta) \geq 0$ .

Рассмотрим решение в виде стационарного рельефа малой амплитуды:  $\zeta = \zeta_0 + a \cos kx$ ,  $a \ll 1$ . Нетривиальное решение указанного вида существует, если число Рэлея близко к критическому значению, определяемому формулой:

$$r_0 = -(k^2 - g)/\Psi(\zeta_0) \quad (3.2)$$

Разумеется, (3.2) определяет пороговое значение числа Рэлея для устойчивости механического равновесия: выше  $r_0$  малые возмущения, определяемые эволюционным уравнением (2.12), нарастают, ниже – затухают. Именно в этом смысле далее говорится о стационарном решении малой амплитуды, как о возмущении. Для равных объемных долей жидкостей ( $\zeta_0 = 0$ ) (3.2) принимает вид:

$$r_0 = (40/7)(k^2 - g)[\kappa]^{-2}$$

т.е. наиболее опасными (по крайней мере, локально) являются длинноволновые возмущения – критическое число Рэлея  $r_0$  растет с ростом волнового числа. При любом  $\zeta_0 \neq 0$ , подходящим выбором скачка коэффициентов теплопроводности можно добиться выполнения условия  $\Psi(\zeta_0) > 0$ . Этот случай, однако, далее не рассматривается.

Продолжая разложение до третьего порядка по  $a$ , получим корневой закон для амплитуды возмущений вблизи порога:

$$r - r_0 + \frac{3k^2\Phi'' - \Phi'^2}{24k^2\Psi} a^2 = 0 \quad (3.3)$$

Штрихами обозначены производные по  $\zeta$ ; все функции вычислены при  $\zeta = \zeta_0$ . Положительным значениям коэффициента при  $a^2$  в формуле (3.3) соответствует жесткое возбуждение конвекции, отрицательным – мягкое. Таким образом, при значении  $r_0$ , определяемом выражением (3.2), в задаче наблюдается прямая или обратная вилочная бифуркация. Имея в виду структурную устойчивость [12], будем далее говорить, что в первом случае рождается устойчивое решение, во втором – неустойчивое. При исследовании устойчивости решения (3.3) по отношению к возмущениям с произвольным волновым числом обнаружен очевидный результат: надкритическое решение неустойчиво по отношению к возмущениям с большей длиной волны. В ограниченных в продольном направлении системах спектр волновых чисел будет дискретным и ограниченным снизу, т.е. решение, для которого на размере области укладывается одна полуволна, будет устойчивым (см. подробнее [8]).

При обращении выражения  $3k^2\Phi'' - \Phi^2$  в нуль наблюдается смена мягкого возбуждения жестким – кривая вилочной бифуркации (3.2) пересекается с кривой касательной бифуркации. В окрестности данной точки, учитывая слагаемые пятого порядка по  $a$ , будем иметь:

$$r - r_0 + Ka^2 + Qa^4 = 0, \quad K = \frac{3k^2\Phi'' - \Phi^2}{24k^2\Psi a^2} \quad (3.4)$$

где  $Q$  – громоздкое выражение, зависящее от функции  $\Phi$  и ее производных, вплоть до четвертой. При  $Q < 0$  существует одна надкритическая ветвь решения ( $r > r_0$ ). Две подкритические ветви решения (одна устойчивая, другая неустойчивая) существуют при  $K > 0$  и исчезают через касательную бифуркацию при

$$r = r_0 + 1/4K^2/Q \quad (3.5)$$

Если  $Q > 0$ , то наблюдается обратная ситуация: подкритическая ветвь существует при любых значениях  $K$ . Смена знака  $K$  с отрицательного на положительный приводит к появлению двух надкритических ветвей, сливающихся при  $r$ , определяемом формулой (3.5).

Для равных объемных долей жидкостей будем иметь:

$$a^2 = \frac{20}{1029k^2} \left( \frac{34}{[\kappa]^2} - 7 \right)^2 (k^2 - g)(g - \varphi([\kappa])k^2)(r - r_0) \quad (3.6)$$

Здесь  $\varphi([\kappa])$  – четная функция, отрицательная при  $1.15 < [\kappa] < 1.80$ . Характер ветвления конвективных режимов в зависимости от волнового числа  $k$  и разности коэффициентов теплопроводности жидкостей  $[\kappa]$  приведен в таблице для потенциально неустойчивой стратификации жидкостей ( $g = 1$ ).

В этом случае при  $1.15 < [\kappa] < 1.80$  мягко ветвятся короткие волны, для которых  $k > 1$ , длинные волны развиваются подкритически. Для остальных значений  $[\kappa]$  мягкое ветвление наблюдается в ограниченном диапазоне волновых чисел  $k_1 > k > k_2$ , длинные и короткие волны возникают подкритически. Одно из критических волновых чисел (меньшее при  $[\kappa] < 1.85$  и большее в противоположном случае) равно единице. Второе, обозначаемое  $k_c([\kappa])$ , зависит от скачка коэффициентов теплопроводностей. Поведение функции  $k_c([\kappa])$  указано во второй или в третьей строке таблицы:  $k_c$  возрастает до бесконечности по мере приближения  $[\kappa]$  к значению 1.15, а затем монотонно убывает при  $[\kappa] > 1.80$ , проходя через единицу при  $[\kappa] = 1.85$ .

Знак коэффициента  $Q$  в уравнении (3.4), указанный в последней строке таблицы, позволяет получить амплитудную кривую вблизи  $k_c$ . При  $1.15 < [\kappa]$  и  $[\kappa] > 1.85$  имеем  $Q > 0$ , т.е. надкритическая (устойчивая) ветвь решения гибнет, сливаясь с неустойчивой достаточно близко к критическому значению  $r_0$ . В узком диапазоне  $1.80 < [\kappa] < 1.85$

Волновые числа	$[\kappa] < 1.15$	$[\kappa] \in [1.15, 1.80]$	$[\kappa] \in [1.80, 1.85]$	$[\kappa] \in [1.85, 2]$
$k_1$	1	1	1	$k_c, k'_c < 0$
$k_2 > k_1$	$k_c, k'_c > 0$	–	$k_c, k'_c < 0$	1
$k < k_1$	Жестко	Жестко	Жестко	Жестко
$k \in [k_1, k_2]$	Мягко	Мягко	Мягко	Мягко
$k > k_2$	Жестко	–	Жестко	Жестко
$Q(k = k_c)$	$> 0$	–	$< 0$	$> 0$

наблюдается обратное явление: при  $k > k_c$  подкритическая (неустойчивая) ветвь решения исчезает, сливаясь с устойчивой вблизи  $r_0$ .

Рассмотрим уравнение (3.1) в случае потенциально неустойчивой стратификации и малых чисел Рэлея ( $g = 1, r \rightarrow 0$ ). Для  $r = 0$  волновое число равно единице, уравнение (3.1) имеет вид уравнения математического маятника, а его решение:

$$\zeta_0 = A \cos x, \quad 0 \leq A \leq 1 \tag{3.7}$$

Условие  $k = 1$  (в размерном виде  $\alpha k_*^2 = (\rho_{02}^* - \rho_{01}^*)g$ ) дает критическое волновое число для гравитационно-капиллярных волн, соответствующее обращению в нуль частоты волны. Таким образом, (3.7) соответствует стационарной деформации поверхности, течение в обеих жидкостях отсутствует. Для более высоких значений волнового числа малоамплитудные искажения поверхности раздела затухают (длинные гравитационно-капиллярные волны в сильно вязкой жидкости), при  $k < 1$  развивается рэлей-тейлоровская неустойчивость границы раздела. Оба указанных процесса описываются амплитудным уравнением (2.12). При близких к нулю значениях  $r$  возникают периодические режимы с волновым числом, близким к единице. Для их изучения применялась методика Линдштедта–Пуанкаре [9]. Изменяя единицу измерения координаты в  $k$  раз и раскладывая квадрат волнового числа и поле возмущений в ряд по малому параметру  $k^2 - 1$ , будем иметь в первом порядке малости:

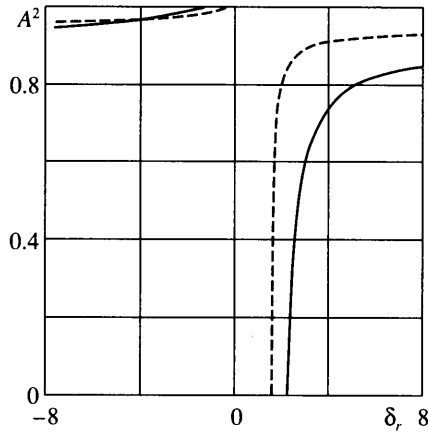
$$\zeta = \zeta_0 + (k^2 - 1)\zeta_1 + \dots, \quad r = \delta_r(k^2 - 1) + \dots \tag{3.8}$$

$$\zeta_1''' + \zeta_1' = \delta_r \Psi(\zeta_0)\zeta_0' - \zeta_0''' \tag{3.9}$$

Из условия разрешимости уравнения (3.9) определяем связь между поправкой к волновому числу и надкритичностью:

$$\delta_r = -\pi A^2 \left( \int_0^{2\pi} \Psi(\zeta_0)\zeta_0'^2 dx \right)^{-1}$$

Амплитудная кривая  $A(\delta_r)$  приведена на фиг.1 для двух значений  $[\kappa]$ . Как видно, периодические режимы с волновыми числами, превосходящими единицу, существуют при подогреве снизу, более длинноволновые режимы – при нагреве сверху ( $\delta_r > 0$ , т.е.  $r$  и  $k^2 - 1$  имеют одинаковые знаки). Согласно результатам, приведенным в таблице, для  $[\kappa] > 1.85$  наблюдается жесткое ветвление при  $k^2 > 1$ . При увеличении амплитуды происходит касательная бифуркация – возникает устойчивая ветвь решения



Фиг. 1. Поправка к волновому числу  $\delta_r$  в зависимости от амплитуды  $A$  для периодических режимов при малом числе  $Ra/G$ .  $[\kappa] = 1.6$  – сплошная линия,  $[\kappa] = 1.9$  – штриховая

(на штриховой линии в масштабе фиг. 1 неустойчивая ветвь не видна). Поправка  $\delta_r$  обращается в бесконечность при некотором значении амплитуды  $A_c([\kappa])$ . Разложение (3.8) становится несправедливым вблизи этой точки:  $r^2$  растет пропорционально  $k^2 - 1$ .

При  $A > A_c$  реализуется обратная ситуация: длинноволновые режимы возникают при подогреве снизу, коротковолновые – при нагреве сверху. Эти режимы близки к неодносвязному:  $A \approx 1$ , т.е. поверхность раздела приближается к твердым границам.

Для потенциально устойчивой стратификации ( $g < 0$ ) и  $1.15 < [\kappa] < 1.80$  короткие волны, для которых  $k > k_c > 1$ , возникают мягко. В этом случае  $Q > 0$ , т.е. вблизи критического волнового числа  $k_c$  устойчивая ветвь гибнет, пересекаясь с неустойчивой при малых надкритичностях. Для остальных значений  $[\kappa]$  наблюдается жесткое ветвление независимо от волнового числа.

**4. Стационарные периодические решения.** Стационарные периодические решения уравнения (2.12) определялись численно. После интегрирования (3.1) принимает вид одномерного уравнения Ньютона для движения частицы в потенциальном поле:

$$\zeta'' = F(\zeta), \quad F = \int \Phi d\zeta \quad (4.1)$$

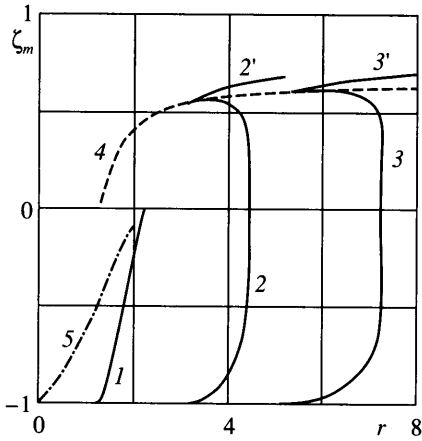
После еще одного интегрирования получим “закон сохранения энергии”:

$$\frac{1}{2} \zeta'^2 + U(\zeta) = E, \quad \frac{dU}{d\zeta} = -F \quad (4.2)$$

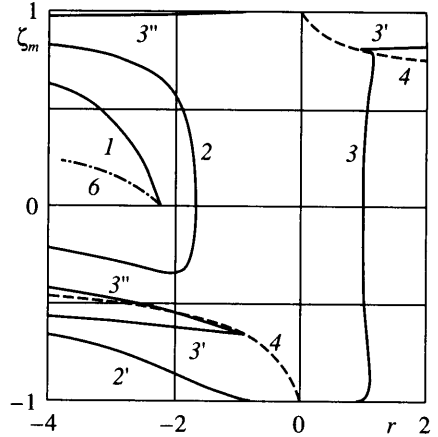
Для определенного соотношения параметров потенциал имеет вид ямы, в этом случае возможны периодические решения. Как отмечено выше, одна из постоянных интегрирования равна нулю, три другие определяются из условий заданного периода решения, среднего значения  $\langle \zeta \rangle$  (в вычислениях рассматривался режим с равными объемными долями жидкостей  $\langle \zeta \rangle = 0$ ) и посредством выбора начала отсчета оси  $x$ . Отметим, что при  $\zeta \rightarrow \pm 1$  сила  $F(\zeta)$  логарифмически расходится, но потенциальная энергия  $U(\zeta)$  остается конечной. Таким образом, уравнение (4.2) описывает касание твердой границы поверхностью раздела (при  $\zeta = \pm 1$  амплитудное уравнение (2.12) вырождается – обращается в нуль коэффициент при старшей производной).

Проведенные в разд. 3 исследования эквивалентны решению задачи (4.1) в слабонелинейном случае, при получении формулы (3.3) в разложении  $\Phi(\zeta)$  учитываются





Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Амплитудные кривые  $\zeta_m(r)$  для  $[\kappa] = 1.6$ ,  $g = -1$ ,  $k = 0$ ; 1; 1.5 – линии 1; 2 и 2'; 3 и 3'. Линии 1; 2, 3 соответствуют режиму с искривлением границы раздела (нижняя жидкость образует капли на твердой поверхности), штриховая линия 4 – касанию верхней жидкостью нижней границы, 5 – граница области притяжения равновесия в случае конечного поверхностного натяжения ( $C = 0$ )

Фиг. 3. Амплитудные кривые  $\zeta_m(r)$  для  $[\kappa] = 1.6$ ,  $g = 1$ ,  $k = 0$ ; 0.5; 1.2 – линии 1; 2 и 2'; 3, 3' и 3'' (1, 2, 3, 3'' – режим с искривлением поверхности раздела, линии 2', 3' – неодносвязный режим). Штриховые линии соответствуют касанию поверхностью раздела твердых границ (4 – верхней, 5 – нижней), 6 – граница области притяжения равновесия для  $C = 0$

слагаемые вплоть до кубических. В этом случае амплитудное уравнение эквивалентно уравнению, рассмотренному в [8], однако коэффициенты в амплитудных уравнениях различны, что связано с учетом нелинейных слагаемых при старшей производной в (4.1). Разница состоит в том, что в [8] раскладывается в ряд функция  $f(\zeta)$ , а при исследовании уравнения (4.1) проводится разложение функции  $\Phi(\zeta)$ .

Амплитудные кривые (зависимость максимального и минимального положения поверхности от параметра  $r$ ) приведены на фиг. 2, 3 для  $[\kappa] = 1.6$  и разных волновых чисел. На обеих фигурах линии 1 соответствуют солитонным решениям с бесконечным периодом, для которых максимум “потенциальной энергии”  $U(\zeta)$  достигается при  $\zeta = 0$ . При устойчивой изотермической стратификации жидкостей ( $g = -1$ , фиг. 2) поверхность раздела прогибается вниз: минимум  $U(\zeta)$  реализуется при  $-1 < \zeta < 0$ . При потенциально неустойчивой стратификации ( $g = 1$ , фиг. 3) солитонное решение существует при нагреве сверху. Поверхность раздела изгибается в сторону верхней жидкости; минимум “потенциальной энергии”  $U(\zeta)$  реализуется при  $\zeta > 0$ .

Штрихпунктирная линия на обеих фигурах соответствует условию  $f(r, g, \zeta_m) = 0$ . Эта линия ограничивает область притяжения равновесного состояния с теплопроводным распределением температуры и плоской поверхностью раздела для конечного поверхностного натяжения ( $C = 0$ ). Затухают все возмущения, для которых в начальном состоянии выполнено неравенство  $\zeta(x, t = 0) > \zeta_m$ . Обратная ситуация наблюдается на фиг. 3: затухают все возмущения, для которых  $\zeta(x, t = 0) < \zeta_m$ .

В случае потенциально устойчивой стратификации жидкостей ( $g = -1$ ) длинноволновая конвекция возникает жестко, коротковолновая – мягко ( $k_c = 1.056$  для  $[k] = 1.6$ ). Очевидно, что полученные периодические решения неустойчивы относительно возмущений с той же длиной волны в первом случае и устойчивы во втором (устойчивость относительно возмущений с произвольным волновым числом не исследовалась). Однако для коротковолновых решений при  $r = r_1(k)$  наблюдается касательная бифуркация (кривая 3), приводящая к исчезновению устойчивого и неустойчивого решений. Относительная надкритичность  $\Delta r = (r_1 - r_0)/r_0$  не превосходит двух процентов, и в масштабах фиг. 2 надкритическая ветвь решения незаметна.

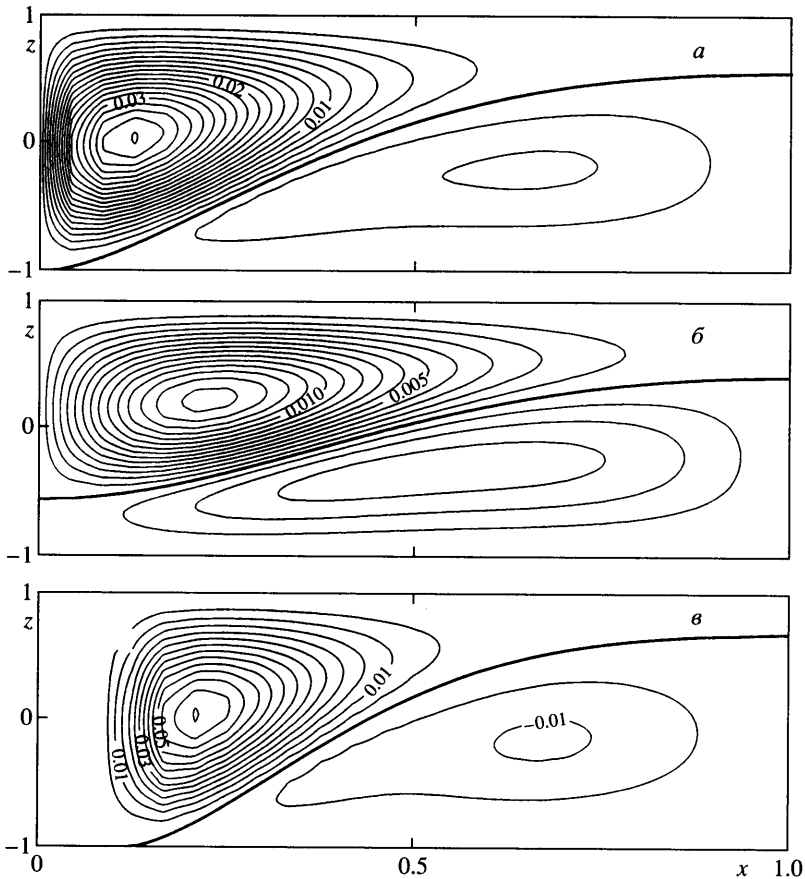
Неустойчивая ветвь решения эволюционирует вплоть до достижения поверхности раздела нижней твердой границы – верхняя жидкость падает на дно. Верхнее положение поверхности раздела, соответствующее касанию дна поверхностью раздела, показано на фиг. 2 штриховой линией. Вдоль этой линии волновое число увеличивается с ростом  $r$  от нуля при  $r = 1.269$ . Штриховая кривая соответствует бифуркации “рождение–смерть” – на ней пересекаются неустойчивая ветвь решения и ветвь, соответствующая неадносвязному режиму (линии 2' и 3'). В последнем случае верхняя жидкость достигает дна на протяжении конечного отрезка по  $x$ . В силу соотношений (2.7), (2.8) верхняя жидкость неподвижна в этом диапазоне координаты  $x$ . Разумеется, в действительности существует переходный слой, в котором скорость жидкости достаточно быстро затухает. Однако горизонтальный размер этого слоя сравним с толщиной системы, т.е. в выбранных единицах измерения продольной координаты он имеет нулевую длину. Отметим, что на основании общих соображений нельзя сделать вывода об устойчивости решения, соответствующего образованию капель. Действительно, исчезновение неустойчивой ветви связано с достижением границы области допустимых значений ( $|\zeta| = 1$ ), а не с касательной бифуркацией.

Форма поверхности раздела и конвективные течения показаны на фиг. 4 для  $r = 3.2$  (фиг. 4,а) и  $r = 4.4$  – нижняя и верхняя ветви решения (фиг. 4,б и фиг. 4,в соответственно). Первое значение с хорошей точностью соответствует пересечению устойчивой и неустойчивой ветвей решения, поверхность раздела касается дна. Течение, показанное на фиг. 4,б, неустойчиво.

На фиг. 3 показаны амплитудные кривые для потенциально неустойчивой стратификации ( $g = 1$ ). При  $k > 1$  неустойчивость равновесного состояния возникает при подогреве снизу ( $r > 0$ ) и наблюдается мягкое возбуждение конвекции. Однако при  $r = r_1(k)$  устойчивая надкритическая ветвь решения “гибнет” вследствие пересечения с неустойчивой (линия 3). Как и при  $g = -1$ , диапазон надкритичности  $\Delta r$  достаточно мал: при более высоких значениях  $r$  наблюдаются только решения с вытеснением нижней жидкости – линия 3' в правой части фиг. 3. Штриховая линия в правой части фиг. 3 соответствует бифуркации “рождение–смерть”. Вдоль этой линии волновое число возрастает от значения  $k = 1$  с ростом числа Рэлея (согласно результатам разд. 3,  $k$  уменьшается вблизи  $r = 0$ , однако минимум кривой  $k(r)$  очень слабо выражен).

Для длинных волн обнаружено жесткое возбуждение конвекции при нагреве сверху (линии 1 и 2). Очевидно, что ответвляющееся в точке вилочной бифуркации решение неустойчиво. Другое решение соответствует образованию капель верхней жидкости: нижнее положение капли для  $k = 0.5$  показано линией 2'. Эта кривая пересекается с линией  $\zeta = -1$  при конечном значении числа Рэлея – капля касается нижней границы. При более высоких значениях  $r$  возникает система чередующихся “вертикальных” слоев: на части периода вся система заполнена одной из жидкостей. Граница раздела состоит из участков, простирающихся от верхней границы до нижней.

С увеличением  $|r|$  область притяжения неадносвязного режима увеличивается. Более того, при нагреве сверху возможно жесткое возбуждение коротковолновых конвективных течений (линии 3', 3'' в левой части фиг. 3). Штриховая линия в левой части фиг. 3 соответствует бифуркации “рождение–смерть”, волновое число растет при

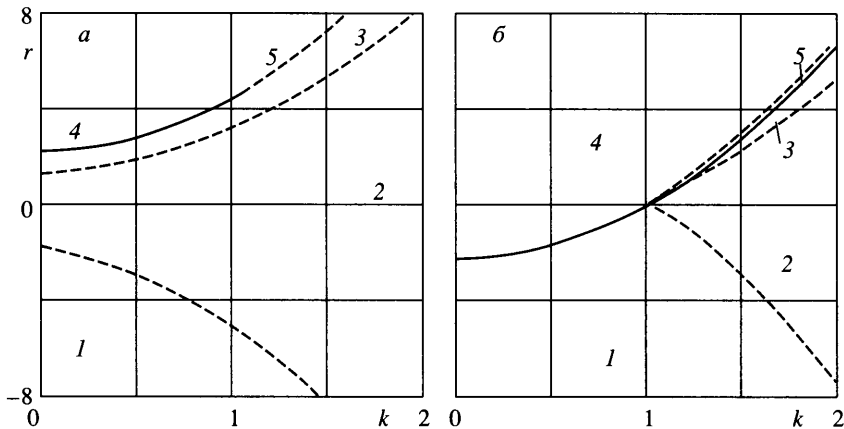


Фиг. 4. Форма поверхности раздела и конвективные течения для  $[\kappa] = 1.6$ ,  $g = -1$ ,  $k = 1$ ;  $a - r = 3.2$ ,  $б, в - r = 4.4$

увеличении  $|r|$ . Таким образом, нагрев сверху оказывает дестабилизирующее воздействие на двухслойную конвективную систему – хорошо известное явление [13–15], называемое антиконвекцией. Интересно то, что в системе с деформируемой границей раздела длинноволновая конвекция при нагреве сверху наблюдается даже для равных коэффициентов объемного расширения и независимо от соотношения коэффициентов температуропроводности жидкостей.

Конвекция при нагреве сверху возбуждается и для потенциально устойчивой стратификации ( $g = -1$ ). Качественно соответствующие кривые схожи с линиями  $3'$ ,  $3''$  в левой части фиг. 3, однако для возбуждения антиконвекции при  $g = -1$  необходим более сильный нагрев.

Сводная карта нелинейных режимов для  $[\kappa] = 1.6$  приведена на фиг. 5,  $a$  ( $g = -1$ ) и 5,  $б$  ( $g = 1$ ). Сплошными линиями показаны вилочные (прямые или обратные) бифуркации, штриховыми – бифуркации “рождение–смерть” (касательные или соответствующие появлению неодносвязных режимов). В области 1 помимо устойчивого положения равновесия существует два периодических решения: соответствующее вытеснению верхней жидкости (линия  $3'$  на фиг. 3) и неустойчивое (линии  $3''$  на фиг. 3). При пересечении штриховой линии эта пара решений гибнет – в области 2 существу-



Фиг. 5. Бифуркационная диаграмма для  $[\kappa] = 1.6$ ,  $g = -1$  (а) и  $g = 1$  (б).

ет единственное решение. При переходе в область 3 вновь рождается пара решений (линии 3, 3' на фиг. 2, 3). Область 3, таким образом, подобна области 1, с той лишь разницей, что неоднозначному решению соответствует теперь вытеснение нижней жидкости. В области 4 существуют два решения: с вытеснением нижней жидкости (линия 3' на фиг. 2, 3) и неустойчивое равновесное состояние. В узкой области 5, ограниченной сплошной и штриховой линиями (в масштабе фиг. 5,а сплошная линия совпадает со штриховой и потому не показана), существует устойчивое решение, соответствующее деформации поверхности раздела. Это решение ответвляется от положения равновесия при пересечении сплошной линии и гибнет, сливаясь с неустойчивым решением на штриховой.

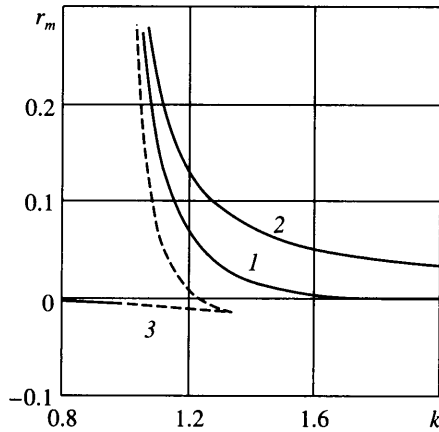
Для других значений скачка коэффициента теплопроводности диаграмма нелинейных режимов конвекции качественно выглядит схожим образом.

При  $[\kappa] > 1.80$  и  $[\kappa] < 1.15$  мягкое ветвление для потенциально неустойчивой стратификации наблюдается в ограниченном диапазоне волновых чисел. Например, при  $[\kappa] = 1.9$  надкритическое возбуждение конвекции возможно при  $0.5877 < k < 1$ . Относительный интервал надкритичности  $\Delta r$  также является малым. При  $k > 1$  неустойчивость равновесного состояния развивается жестко, однако при небольших подкритичностях ( $r_1 < r_0$ ) рождается устойчивая ветвь решения (на существование которой было указано в разд. 3). С увеличением числа Рэлея при  $r = r_2$  наблюдается еще одна касательная бифуркация, приводящая к исчезновению устойчивой ветви решения.

Зависимость относительной надкритичности (подкритичности)  $\Delta r$  от волнового числа решения показана на фиг. 6 для трех значений скачка коэффициента теплопроводности. Сплошными линиями показана относительная надкритичность в случае мягкого ветвления:  $k > 1$  для  $[\kappa] = 1$ ,  $[\kappa] = 1.6$  и  $k < 1$  для  $[\kappa] = 1.9$  (линии 1, 2, 3 соответственно). В последнем случае  $r_0 < r_1 < 0$ , т.е.  $\Delta r < 0$  для надкритической ветви решения. Обращение  $\Delta r$  в бесконечность при малых значениях  $r$  легко понять из результатов разд. 3:  $r_0 = O(k^2 - 1)$ , а касательная бифуркация не описывается разложением (3.8) (фиг. 1), т.е.  $r_1 \gg k^2 - 1$  при  $r \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow 1$ .

Значение  $k_c$  для  $[\kappa] = 1$  равно 1.941 (правая граница линии 1), а для  $[\kappa] = 1.9$  имеем  $k_c = 0.5877$  (левая граница линии 3). Штриховыми линиями показан диапазон существования устойчивой ветви решения в случае жесткого ветвления при  $[\kappa] = 1.9$ . Эта ветвь решения исчезает при  $k = 1.343$ .

Проведено численное решение амплитудного уравнения (2.12) конечно-разностным методом. В ходе расчетов обнаружено, что система эволюционирует к одному из



Фиг. 6. Фрагмент бифуркационной диаграммы для  $g = 1$ ,  $[\kappa] = 1, 1.6, 1.9$  (линии 1, 2, 3)

стационарных решений. В численных экспериментах достигалось либо состояние с плоской границей, либо режим с разбиением одной из жидкостей на капли. Устойчивые режимы, соответствующие искривлению поверхности раздела, обнаружены не были. По-видимому, это связано с тем, что из-за погрешности вычислений критическое число Рэлея, полученное конечно-разностным методом, превышает точное значение (3.2) и может выходить за пределы существования искомого режима.

**Заключение.** Рассмотрена крупномасштабная конвекция в горизонтальной двухслойной системе из жидкостей с совпадающими коэффициентами объемного расширения и кинематической вязкости с учетом деформируемости границы раздела. В этом случае существен следующий механизм возникновения тепловой конвекции: деформация поверхности раздела вызывает искажения поля температуры и приводит к возникновению адвективного течения в каждой из жидкостей. Течение в одной из жидкостей увеличивает деформацию поверхности, в другой — уменьшает. Так как интенсивность этих течений различна, возникает суммарный эффект, усиливающий или ослабляющий деформацию поверхности раздела. В работе изучено взаимодействие указанного конвективного механизма неустойчивости с изотермическим рэлей-тейлоровским.

Получено уравнение, описывающее эволюцию поверхности раздела для конечно-поверхностного натяжения. Определены условия устойчивости равновесного состояния (теплопроводное распределение температуры, плоская граница раздела) по отношению к конечно-амплитудным возмущениям. При нарушении этих условий амплитудное уравнение становится неприменимым — возникают решения с бесконечными производными. Причина подобного явления достаточно проста — в полученном амплитудном уравнении не учтены эффекты, противодействующие накоплению энергии в определенных участках слоя (продольный перенос тепла и импульса, поверхностное натяжение). Данный недостаток амплитудного уравнения можно устранить, например, считая поверхностное натяжение достаточно большим.

Получено амплитудное уравнение, описывающее конвективные течения и форму поверхности раздела в указанном предельном случае. В рамках этого уравнения исследована устойчивость равновесного состояния системы. В зависимости от параметров задачи возможно жесткое или мягкое возбуждение конвекции. Численно исследованы стационарные периодические решения данного уравнения. Обнаружены решения, соответствующие стационарным двумерным конвективным течениям в

системе с искривленной поверхностью раздела. Эти решения существуют в достаточно узком диапазоне параметров, в остальных случаях одна из жидкостей разбивается на капли. При подогреве снизу образуются капли более теплопроводной жидкости, окруженные менее теплопроводной. При нагреве сверху наблюдается обратная ситуация. Обнаружены также режимы, соответствующие продольному чередованию “вертикальных” слоев: капли каждой из жидкостей касаются обеих твердых границ. Поверхность раздела состоит из кривых, соединяющих верхнюю и нижнюю твердые стенки.

Показано, что нагрев сверху стабилизирует равновесное состояние системы по отношению к малым возмущениям. Однако даже при потенциально устойчивой изотермической стратификации жидкостей возможно конечно-амплитудное возбуждение антиконвекции.

Численное решение амплитудного уравнения показало, что в ходе временной эволюции система стремится к одному из стационарных состояний.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке из средств гранта РЕ-009-0 Американского фонда гражданских исследований и развития, грантов РФФИ (№ 02-01-00701) и № 02-01-06581мас и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1981.2003.1).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Boussinesq J.* Theorie Analytique de la Chaleur. V. 2. Paris: Gauthier-Villars, 1903.
2. *Джозеф Д.* Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 638 с.
3. *Изаacson В.Х., Юдович В.И.* О возникновении конвекции в слое жидкости со свободной границей // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 4. С. 23–28.
4. *Непомнящий А.А.* О длинноволновой конвективной неустойчивости в горизонтальных слоях с деформируемой границей // Конвективные течения. Пермь: Изд-во Перм. пед. ин-та, 1983. С. 25–31.
5. *Rasenat S., Busse F.H., Rehberg I.* A theoretical and experimental study of double-layer convection // J. Fluid Mech. 1989. V. 199. P. 519–540.
6. *Лобов Н.И., Любимов Д.В., Любимова Т.П.* Конвективная неустойчивость системы горизонтальных слоев несмешивающихся жидкостей с деформируемой границей раздела // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 2. С. 32–39.
7. *Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Alexander J.I.D., Shklyayev S.V.* Long-wave instability of a differentially heated two-layer system with a deformable interface. // 3rd Intern. Conf. on Multiphase Flows (ICMF-98). Proc. CD. 1998, Lyon, France. PDF/PDF600/PDF675.
8. *Любимов Д.В., Шкляев С.В.* Слабонелинейный анализ конвекции в двухслойной системе с деформируемой поверхностью раздела // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 4. С. 44–55.
9. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
10. *Novick-Cohen A., Segel L.A.* Nonlinear aspects of the Cahn-Hilliard equation // Physica. D. 1984. V. 10. № 3. P. 277–298.
11. *Grinfeld M., Novick-Cohen A.* The viscous Cahn-Hilliard equation: Morse decomposition and structure of the global attractor // Trans Amer. Math. Soc. 1999. V. 351. № 6. P. 2375–2406.
12. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2000. 367 с.
13. *Welander P.* Convective instability in a two-layer fluid heated uniformly from above // Tellus. 1964. V. 16. № 3. P. 364–371.
14. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* О неустойчивости равновесия системы горизонтальных слоев несмешивающихся жидкостей при нагреве сверху // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 6. С. 28–34.
15. *Simanovskii I.B., Nepomnyashchy A.A.* Convective Instabilities in Systems with Interface // Switherland etc.: Gordon and Breach, 1993. 279 p.