

УДК 532.59

© 2004 г. В. И. БУКРЕЕВ, А. В. ГУСЕВ, А. А. МАЛЫШЕВА, И. А. МАЛЫШЕВА

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ГАЗОГИДРАВЛИЧЕСКОЙ
АНАЛОГИИ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ О РАЗРУШЕНИИ ПЛОТИНЫ**

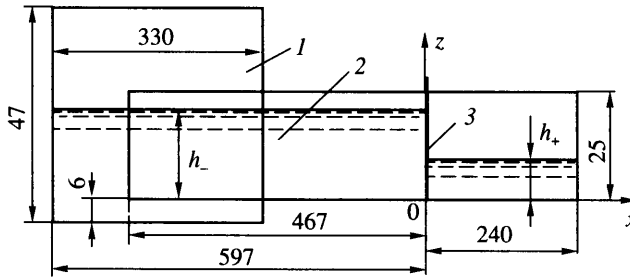
Приведены результаты экспериментального исследования волн при разрушении плотины в случаях сухого и обводненного дна в нижнем бьефе и сравнения с первым приближением теории мелкой воды. Найдено, что это приближение дает хорошие результаты для высоты и скорости распространения гидравлического прыжка в нижнем бьефе в случае обводненного дна, не описывает ондуляции и расходится с экспериментом по скорости распространения возмущения в верхнем бьефе, а в случае сухого дна – и в нижнем бьефе.

Ключевые слова: разрушение плотины, сухое и обводненное дно, волна понижения уровня, гидравлический прыжок, отражение от вертикальной стенки.

В решении сложной задачи о разрушении плотины можно выделить три этапа. На первом этапе были получены аналитические решения, что потребовало упрощения постановки задачи. При этом в работах [1, 2 и др.] использована аналогия уравнений первого приближения теории мелкой воды и одномерной газовой динамики. Однако на процессы после разрушения плотины существенно влияют сложная геометрия реальных русел и потери энергии на трение на больших временах. На втором этапе применялись численные методы расчета на основе уравнений Сен-Венана, в которых учитываются уклон дна и потери энергии на трение [3, 4]. Для третьего этапа характерно развитие более сложных математических моделей гравитационных волн на воде конечной глубины (например, [5]). В последнее время численные расчеты выполняются на основе уравнений Эйлера и Навье–Стокса (например, [6]). Методы решения задачи о разрушении плотины используются при анализе аналогичных волновых процессов в шлюзах и судоподъемниках [7] и в канале с неровным дном [8].

Основу данной работы составляют опыты, в которых достаточно четко выделялись процессы с пренебрежимо малым влиянием сложной геометрии канала и потерь энергии на трение, что позволило детально проверить классическую теорию на основе газогидравлической аналогии, и процессы, представляющие интерес с точки зрения проверки других математических моделей. Из ранее выполненных экспериментальных исследований можно отметить [9–11]. В [9, 10] рассмотрен только случай первоначально сухого дна в нижнем бьефе и приводятся ограниченные данные о волне понижения уровня в верхнем бьефе. В данной работе экспериментальная информация дополнена новыми результатами. Выполнено сравнение с аналитическими авторемодельными решениями задачи на основе первого приближения теории мелкой воды. Смысл используемых далее специальных терминов (сухое и обводненное дно, волна прорыва, критическая глубина, подтопленный и неподтопленный режимы и др.) поясняется, например, в [1–4, 12].

1. Методика эксперимента. Схема экспериментальной установки приведена на фиг. 1. Прямоугольный канал с ровным горизонтальным дном шириной 20.2 см сообщался левым открытым концом с прямоугольным бассейном длиной 330 см и шириной 100 см. Правый конец канала закрыт вертикальной стенкой. Боковые стенки канала изготовлены из стекла, дно и торцевая стенка – из винипласта. Начальный



Фиг.1. Схема экспериментальной установки. Размеры – в см: 1 – бассейн, 2 – канал, 3 – щит

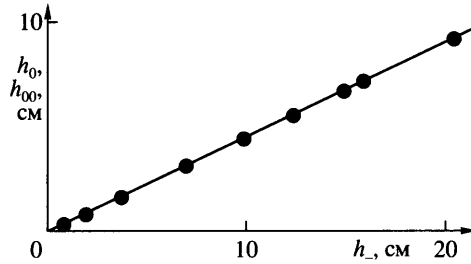
перепад уровней свободной поверхности $h_- - h_+$ (фиг. 1) создавался плоским вертикальным щитом толщиной 1 см. Изучались случаи сухого дна ($h_+ = 0$) и обводненного дна ($0 < h_+ < h_-$). Далее используется неподвижная прямоугольная система координат, показанная на фиг. 1. Время отсчитывается от начала подъема щита. При $t = 0$ щит удалялся вертикально вверх. Закон его движения $z_*(t)$ регистрировался реохордным датчиком. Время выхода нижней кромки щита из воды не превышало 0.07 с.

Волномерами, расположенными на продольной оси симметрии канала в разных точках по x , измерялась глубина $h(t; x, h_-, h_+)$ как функция времени при фиксированных значениях x, h_-, h_+ . Принцип работы волномеров основан на различии электрической проводимости воды и воздуха. При колебаниях уровня свободной поверхности изменялась проводимость между двумя частично погруженными в воду вертикальными электродами диаметром 0.5 мм. Электроды располагались в плоскости, перпендикулярной боковым стенкам канала. Расстояние между ними равнялось 1 см. Статистические калибровочные характеристики волномеров линейны. Их разрешающая способность по амплитуде колебаний ограничивалась уровнем собственных шумов и равнялась ± 0.2 мм. Наибольшая погрешность измерения частот колебаний на верхней границе диапазона от нуля до 5 Гц не превышала 5%. Начальные глубины h_- и h_+ измерялись также стандартными мерными иглами.

По времени перемещения Δt выделенной точки на профиле волны на заданное расстояние Δx между волномерами вычислялась величина $D = \Delta x / \Delta t$, которая далее сопоставляется с теоретической скоростью распространения. Значение D относилось к середине интервала Δx . Величина этого интервала варьировалась от 30 до 200 см. На таких интервалах значение D изменялось не более чем на 2%.

Понятие “скорость распространения” строго определено лишь для стационарных волн и автомодельных теоретических решений. В данных опытах ее экспериментальный аналог D достаточно точно соответствовал теоретической скорости распространения переднего фронта движущихся гидравлических прыжков (для движущегося гидравлического прыжка используется термин “бор” [2]). Такую форму имели волны прорыва в случае обводненного дна в нижнем бьефе. Для них Δt определялось как время перемещения между волномерами средней по высоте точки переднего фронта экспериментального бора. В волне понижения уровня в верхнем бьефе и в волне прорыва, распространяющейся по сухому дну, “передний фронт” стягивается в точку. Для этих волн при определении D использовано время перемещения между волномерами именно этой точки.

По результатам измерений волномерами при различных значениях x определялись мгновенные профили свободной поверхности $h(x; t, h_-, h_+)$. Эти профили получались также фотосъемкой с выдержкой 1/500 с. Для контрастности при фотосъемке воду окрашивали чернилами. Сигналы волномеров и фотоснимки обрабатывали на ком-



Фиг. 2. Зависимость теоретической h_0 и экспериментальной h_{00} глубины в створе щита от глубины верхнего бьефа $h_$ в случае сухого дна

пьютере. Среднеквадратичная мера случайной погрешности оценивалась по результатам многократных измерений в одних и тех же условиях. Как правило, погрешность была в пределах размера экспериментальных точек на приводимых ниже графиках. При отклонении от этого правила погрешность показана на графиках вертикальными отрезками прямых.

Безразмерные величины, помеченные далее верхним индексом “нуль”, определялись с использованием $h_$ и $\sqrt{gh_}$ в качестве характерных масштабов длины и скорости (g – ускорение свободного падения). На некоторых графиках для наглядности информация приведена в размерных величинах. Например, в случае сухого дна при представлении глубины в створе щита h_0 в безразмерной форме вся информация сосредотачивается в одной точке.

2. Случай сухого дна. По теории [2] при $t > 0$ в бесконечно длинном канале глубина $h(x, t)$ определяется формулами

$$h = h_ (x < c_0 t); \quad h = \frac{1}{9g} \left(2c_0 - \frac{x}{t} \right)^2 \quad (-c_0 t \leq x \leq 2c_0 t); \quad h = 0 \quad (x > 2c_0 t)$$

$$c_0 = +(gh_)^{1/2}$$

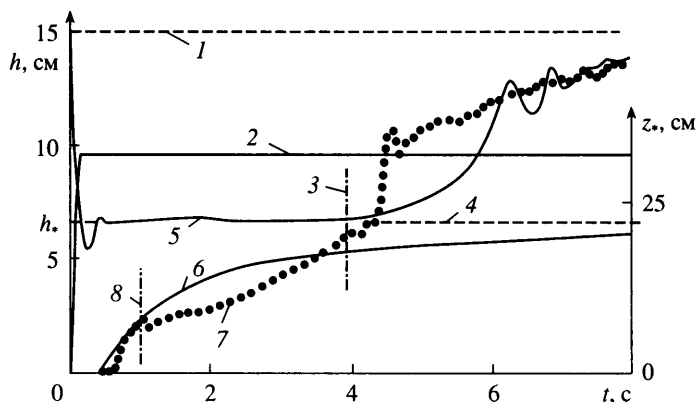
В частности, теоретическая глубина в створе щита h_0 мгновенно становится постоянной и равной критической глубине h_* :

$$h_0 = h_* = (q^2/g)^{1/3} = 4h_/9 = \text{const}, \quad q = 8(gh_^3)^{1/2}/27 = \text{const}_1$$

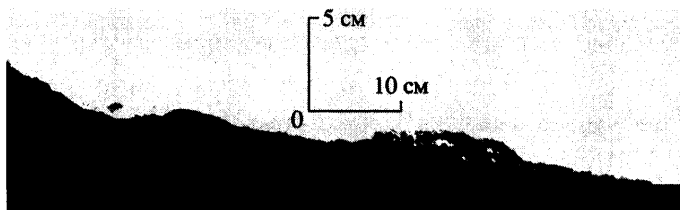
где q – удельный расход (на единицу ширины канала). Формула для h справедлива как для волны понижения уровня в верхнем бьефе ($x < 0$), так и для волны прорыва в нижнем бьефе ($x > 0$).

На фиг. 2 теоретическая зависимость $h_0 = 4h_/9$ приведена сплошной линией. В опытах величина h_0 зависела от времени. Она также выходила на постоянное значение h_{00} , хотя и не мгновенно (см. фиг. 3, кривая 5). Экспериментальные точки на фиг. 2 соответствуют h_{00} . Они хорошо ложатся на теоретическую зависимость, что свидетельствует также о надежности и точности методики измерений.

На фиг. 3 приведены теоретические и экспериментальные зависимости $h(t)$ при $x = 0$ и $x = 100$ см. Показан также закон движения щита $z_*(t)$. Следует отметить, что неподвижный волномер не различает направления движения волны. В его сигнале передний фронт волны всегда расположен слева. В соответствии со схемой на фиг. 1 прямая волна в нижнем бьефе распространялась вправо, а в верхнем бьефе – влево.



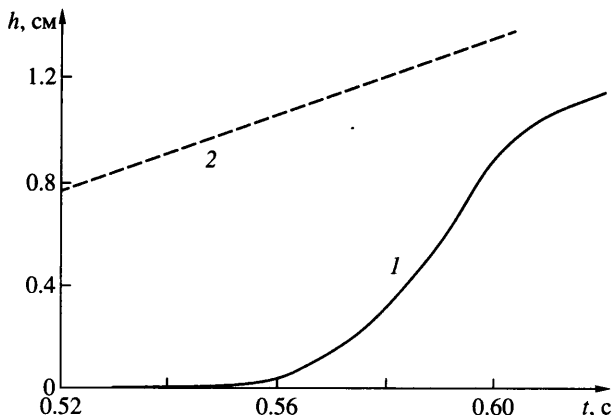
Фиг. 3. Примеры изменения глубины во времени в случае сухого дна: 1 – начальная глубина в верхнем бьефе, 2 – закон движения щита, 3 – граница $t = T_1$, расчетная и экспериментальная глубины при $x = 0$ (4, 5) и при $x = 100$ см (6, 7), 8 – граница $t = T_2$



Фиг. 4. Фотоснимок прямой волны в нижнем бьефе по сухому дну при $h_- = 15$ см, $t = 0.41$ с

Из-за ограниченной длины канала сравнение теории и эксперимента по глубине в створе щита $h_0(t)$ корректно лишь на интервале $T_0 < t < T_1$. Значение T_0 определяется тем, что в эксперименте стационарный режим в створе щита устанавливается не мгновенно. В данных опытах $T_0 = 0.25-0.35$ с. Значение $T_1 = l_1/c_0$ соответствует моменту времени, при котором теоретическая волна в верхнем бьефе достигает открытого конца канала, что приводит к изменению граничного условия. Аналогично сравнение по глубине $h(t)$ при $x = 100$ см корректно лишь на интервале $T_0 < t < T_2$, где $T_2 = l_2/2c_0$ – момент времени, при котором теоретическая волна в нижнем бьефе достигает закрытого конца канала ($l_1 = 467$ см и $l_2 = 240$ см – расстояния от щита до соответствующих поперечных сечений канала). Быстрый рост экспериментальных глубин на фиг. 3 связан с приходом к волномерам отраженных волн.

Данные на фиг. 3 показывают что при корректном сопоставлении теоретическое значение $h_0 = h_*$ хорошо согласуется с экспериментальным значением h_{00} . Для других поперечных сечений канала более детальная информация содержится на фиг. 4–7. На фиг. 4 приведен фотоснимок волны по сухому дну. Левая граница кадра соответствует $x = 0$. При обработке на компьютере вертикальный масштаб увеличен в 2 раза по сравнению с горизонтальным. По теории [2], передний фронт этой волны стягивается в точку, глубина за которой монотонно возрастает вверх по потоку. На фотоснимке основная волна представляет собой ондулярный бор, впереди которого движется предвестник в виде “языка”. Конфигурация головной части волны по сухому дну с четко выраженным “языком” получена также в расчетах на основе уравнений Навье–Стокса [6].



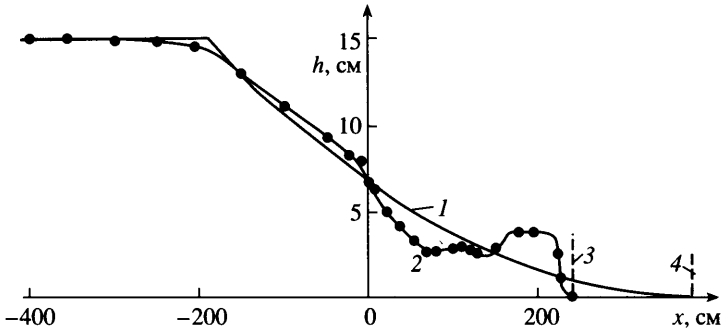
Фиг. 5. Запись волномером головной части волны в нижнем бьефе по сухому дну при $x = 100$ см, $h_- = 20.5$ см: 1 – эксперимент, 2 – теория [2]

На фиг. 5 головная часть волны по сухому дну показана в том виде, как она регистрируется неподвижным волномером. Для сравнения приведена зависимость глубины от времени по теории [2]. Теория существенно расходится с экспериментом. В сигнале волномера также можно выделить “язык” и бор. Скорость распространения “языка” значительно меньше теоретического значения $D_+ = 2c_0$.

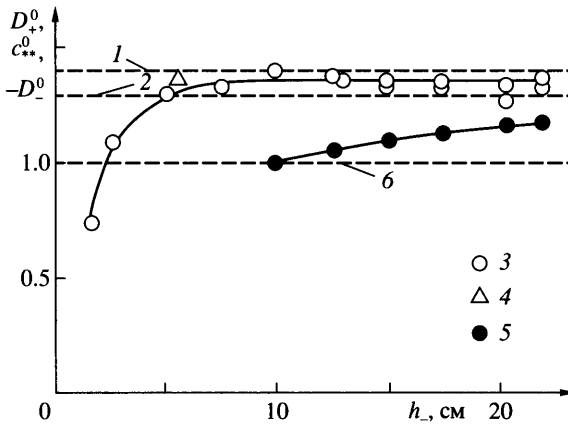
На фиг. 6 приведен пример расчетного и экспериментального профилей свободной поверхности $h(x)$ при фиксированном значении t . Экспериментальная глубина в отличие от теоретической уменьшается вниз по потоку немонотонно. Это следствие того, что в опытах критическая глубина и постоянный расход в створе плотины устанавливаются не мгновенно. Графики на фиг. 6 показывают, что при $h_- = 15$ см экспериментальные скорости распространения волны в верхнем бьефе D_- больше (по абсолютной величине), а в нижнем бьефе D_+ меньше расчетных значений. В частности, по теории к моменту времени $t = 1.52$ с, соответствующему графикам на фиг. 6, уровень свободной поверхности в верхнем бьефе остается неизменным при всех $x \leq -D_-t = -184.4$ см, тогда как в эксперименте при $x = -184$ см уровень уже понизился на 7.2 мм (на 4.8% от h_-).

Фигура 6 показывает, что в эксперименте понижение уровня верхнего бьефа начинается плавно, а не с изломом профиля, как в теории. Поэтому в эксперименте неизбежно приходится вводить некоторое пороговое значение δh , первый по времени выход за пределы которого служит признаком прихода возмущения в данную точку. Аналогичная ситуация имеет место при определении скорости распространения “языка” волны в нижнем бьефе. На основе анализа, учитывающего капиллярные волны и менее существенные факторы, значение δh принято равным -2 мм для волны в верхнем бьефе и $+1$ мм для “языка”.

Экспериментальные данные о скоростях D_+ и D_- при различных значениях h_- содержатся на фиг. 7. В качестве D_+ принималась скорость перемещения “языка” на таких интервалах времени, когда влияние потерь на трение было еще незначительным и сравнение с теорией [2] было корректным. По теории [2], $D_+^0 = D_+/\sqrt{gh_-} = 2$. В ранее выполненных опытах неизменно получались значения $D_+^0 < 2$ с разбросом от 0.7 до 1.8 [4, 9, 10]. Это подтвердилось и в данных опытах. По теории [2], $D_- = -c_0$ (в безразмерной форме это соответствует штриховой линии б на фиг. 7). При $h_- > 12$ см экспе-



Фиг. 6. Мгновенный профиль волны по сухому дну при $t = 1.52$ с: 1 – теория [2], 2 – эксперимент, 3 – закрытый конец канала, 4 – теоретическая передняя точка волны в бесконечно длинном канале



Фиг. 7. Скорости распространения вниз D_+^0 и вверх D_-^0 по потоку в случае сухого дна: 1, 2 – c_{**}^0 во втором приближении теории мелкой воды и по расчетам [15] соответственно, 3, 4 – D_+^0 по опытам авторов и опытам [9], соответственно, 5 – D_-^0 , 6 – c_*^0

риментальные значения D_- существенно превышали теоретические (при меньших значениях h_- неопределенность, связанная с необходимостью введения δh , не позволила сделать обоснованного заключения). Это свидетельствует о том, что при теоретическом анализе D_- нелинейные эффекты нужно учитывать более точно, чем в первом приближении теории мелкой воды.

Данные на фиг. 7 показывают, что существует интервал времени и диапазон значений параметра h_- , когда D_+ имеет постоянное значение, лежащее в достаточно узкой окрестности предельной скорости распространения c_{**} уединенных волн по покоящейся жидкости глубиной h_- . Для скорости распространения уединенной волны c_{**} получены различные количественные значения [13]. В рамках второго приближения теории мелкой воды [14] $c_{**}^0 = c_{**}/c_* = \sqrt{2}$, где $c_* = q/h_*$ – предельная скорость распространения линейных гармонических волн. По расчетам на основе полных уравне-

ний потенциального движения жидкости [15] $c_{**}^0 \approx 1.3$. Эксперименты [16] показали, что второе из этих значений является более точным.

Из экспериментальных данных на фиг. 7 следует, что при $h_- > 6$ см и незначительном влиянии трения скорость распространения передней точки волны прорыва по сухому дну D_+^0 лежит в интервале между двумя указанными теоретическими значениями c_{**}^0 . Ретроспективный анализ опытов [9] показал, что в этот же интервал попадает полученная в них скорость при $t > 0.08$ с. При достаточно больших значениях h_- имеется также тенденция $D_-^0 \rightarrow c_{**}^0$. Следует отметить, что c_{**} наряду с c_* выступает в качестве критического параметра и для других нелинейных волн на воде конечной глубины [13, 16].

При математическом моделировании сложных процессов на движущейся границе контакта воды, воздуха и твердой границы, которые необходимо учитывать в случае распространения волны по сухому дну, возникают значительные трудности [4, 9, 10]. На малых временах после удаления щита удовлетворительное согласие с экспериментом [9] по скорости распространения волны по сухому дну получено в [6] при использовании математической модели, в которой учитывается движение воды и воздуха. На больших временах наименьшее расхождение с опытными данными получено в методе расчета на основе уравнений Сен-Венана с учетом потерь энергии на трение на эмпирической основе [4].

Информация о форме и скорости распространения волны по сухому дну, полученная в данных опытах и расчетах [6], относится только к небольшим интервалам времени после удаления щита. На больших временах под влиянием трения скорость распространения сильно замедляется [10] и, по-видимому, исчезает “язык”.

3. Обводненное дно. В теории [2] для бесконечно длинного канала получены следующие формулы:

$$h = h_- \quad (x < -c_0 t); \quad h = \frac{1}{9g} \left(2c_0 - \frac{x}{t} \right)^2 \quad (-c_0 t \leq x < (2c_0 - 3c_1)t); \quad h = h_1$$

$$((2c_0 - 3c_1)t \leq x < D_1 t); \quad h = h_+, \quad (x \geq D_1 t)$$

$$c_1 = +\sqrt{gh_1}, \quad D_1 = c_1 \sqrt{(h_1 + h_+)/2h_+}$$

Величина h_1 находится из уравнения

$$\sqrt{\frac{g(h_1 + h_+)}{2h_1 h_+}} (h_1 - h_+) = 2(\sqrt{gh_-} - \sqrt{gh_1})$$

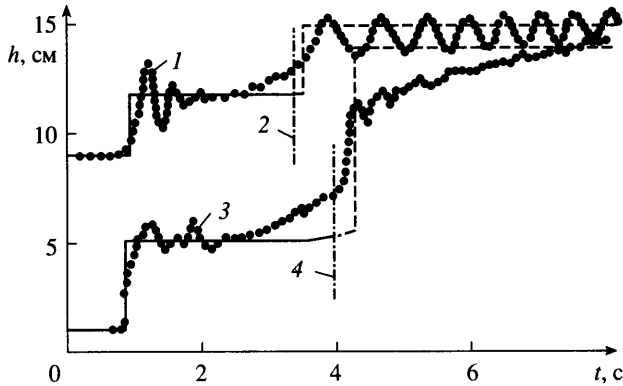
При $h_+^0 < 0.138$ режим течения называется неподтопленным, при $h_+^0 > 0.138$ – подтопленным.

Согласно [2], после отражения волны прорыва от вертикальной стенки вверх по потоку движется прерывная волна со скоростью распространения переднего фронта D_2 и с глубиной за скачком h_2 . При этом справедливы соотношения

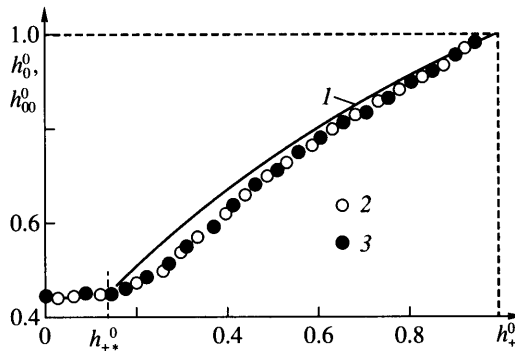
$$(u - D_2)h_1 = -D_2 h_2, \quad (u - D_1)h_1 = -D_2 h_+$$

в которых u – скорость движения частиц жидкости, а D_2 находится как наименьший корень уравнения (относительно D)

$$-D(u - D) = \frac{gh_1}{2} \left(1 - \frac{u - D}{D} \right)$$



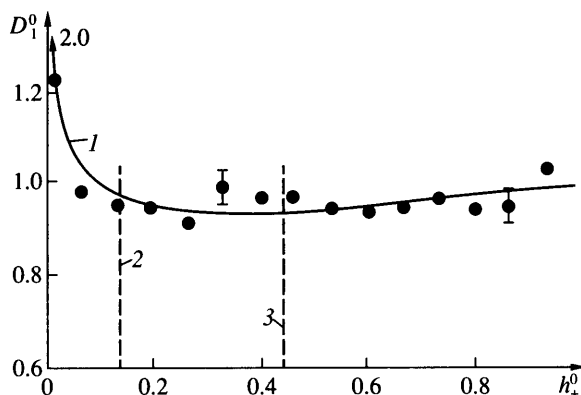
Фиг. 8. Изменение во времени глубины в нижнем бьефе в случае обводненного дна, $h_- = 15$ см, $x = 100$ см: 1 – $h_+ = 9$ см (подтопленный режим), 2 – время прихода экспериментальной отраженной волны в сечение $x = 0$, 3 – $h_+ = 1$ см (неподтопленный режим), 4 – теоретическое значение T_1



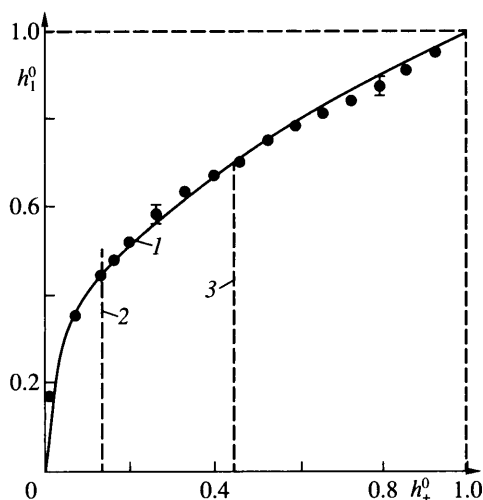
Фиг. 9. Теоретическая h_0^0 и экспериментальная h_{00}^0 глубины в створе щита: 1 – теория, 2, 3 – эксперимент при $h_- = 15$ и 22 см соответственно, h_{+*}^0 – теоретическая граница неподтопленного (слева) и подтопленного режимов

На фиг. 8 приведены зависимости глубины от времени при фиксированном значении $x > 0$ для двух режимов, относящихся к диапазонам $h_+^0 < 0.138$ и $h_+^0 > 0.138$. Расчетные глубины показаны сплошными линиями на интервалах корректности сравнения с экспериментом и штриховыми линиями за пределами этих интервалов. В подтопленном режиме верхняя граница применимости теории определялась временем прихода в сечение $x = 0$ волны, отраженной от закрытого конца канала. В неподтопленном режиме эта граница определялась временем распространения волны в верхнем бьефе до открытого конца канала. Данные на фиг. 8 показывают, что теория хорошо описывает средние глубины и скорости распространения прямой волны, но не описывает ондуляции и структуру переднего фронта отраженной волны. В случае неподтопленного режима на экспериментальной отраженной волне можно выделить “язык” и гидравлический прыжок. Экспериментальная скорость распространения переднего фронта отраженной волны больше расчетной.

На фиг. 9 сравниваются расчетные и экспериментальные зависимости глубины в створе щита от начальной глубины нижнего бьефа. В неподтопленном режиме име-



Фиг. 10. Скорость распространения переднего фронта гидравлического прыжка в нижнем бьефе при $h_- = 15$ см: 1 – теория [2], 2 – $h_+^0 = h_{+*}^0$, 3 – $h_+^0 = h_*^0$



Фиг. 11. Глубина за гидравлическим прыжком в нижнем бьефе при $h_- = 15$ см: 1 – теория [2], 2 – $h_+^0 = h_{+*}^0$, 3 – $h_+^0 = h_*^0$

ет место хорошее совпадение. Хорошо подтвердилось также теоретическое значение верхней границы неподтопленного режима $h_{+*}^0 \approx 0.138$. В подтопленном режиме расхождение теории с экспериментом не превышает 10%.

На фиг. 10 и 11 приведены результаты проверки приведенных выше алгоритмов расчета скорости распространения $D_1^0(h_+^0)$ и глубины за прыжком $h_1^0(h_+^0)$ в нижнем бьефе (сплошные линии). Штриховые линии 2 соответствуют теоретической границе неподтопленного (слева от линии) и подтопленного режимов, штриховые линии 3 – теоретической критической глубине. Экспериментальные точки для D_1^0 получены в диапазоне $4.7 \leq x^0 \leq 10$ в условиях корректности сравнения с теорией. Эксперимен-

тальные точки для h_1^0 получены по глубине после затухания ондуляций. Данные на фиг. 10, 11 показывают, что и по глубине, и по скорости распространения прыжков в нижнем бьефе в случае обводненного дна теория [2] достаточно хорошо подтвердилась как при неподтопленных, так и при подтопленных режимах.

Заключение. Опыты показали, что по параметрам h_0 в случае сухого и обводненного дна, а также по параметрам h_1 и D_1 в случае обводненного дна решение рассматриваемой задачи на основе газогидравлической аналогии можно использовать для тестирования более сложных методов расчета при условии слабого влияния потерь на трение и ограниченной длины канала. Вместе с тем классическое решение не описывает ондуляции, дает заниженное значение скорости распространения волны понижения уровня и завышенное значение скорости распространения волны прорыва по сухому дну, а также слишком схематично описывает процесс отражения волны прорыва от вертикальной стенки.

Авторы благодарят В.В. Остапенко за консультации по теории мелкой воды.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда интеграционных проектов РАН и СО РАН (№ 3.13.1) и Федеральной программы "Ведущие научные школы России" (грант НШ-22-2003.5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Христианович С.А., Михлин С.Г., Девисон Б.Б. Неустановившееся движение в каналах и реках // Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. М.; Л.: Из-во АН СССР, 1938. С. 15–154.
2. Стокер Дж.Дж. Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 617 с.
3. Васильев О.Ф., Гладышев М.Т. О расчете прерывных волн в открытых руслах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 6. С. 184–189.
4. Судобичер В.Г., Шугрин С.М. Движение потока воды по сухому руслу // Изв. Сибирского отд. АН СССР. Сер. тех. наук. 1968. № 13. Вып. 3. С. 116–122.
5. Ляпидевский В.Ю., Тешуков В.М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 419 с.
6. Colicchio G., Colagrossi A., Greco M., Landrini M. Free-surface flow after a dam break: a comparative study // Schifftechnik (Ship technology research). 2002. Bd 49. № 3. P. 95–104.
7. Атавин А.А., Васильев О.Ф., Яненко А.П. Гидродинамические процессы в судопропускных сооружениях. Новосибирск: Наука, 1993. 100 с.
8. Букреев В.И., Гусев А.В., Остапенко В.В. Распад разрыва свободной поверхности жидкости над уступом дна канала // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 6. С. 72–83.
9. Martin J.C., Moyce W.J. An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1952. V. 244. № 882. P. 312–324.
10. Dressler R.F. Comparison of theories and experiments for the hydraulic dam-break wave // Intern. Assoc. Sci. Hydrology. 1954. № 38. P. 319–328.
11. Stansby P.K., Chegini A., Barnes T.C.D. The initial stages of dam-break flow // J. Fluid Mech. 1998. V. 374. P. 407–424.
12. Киселев П.Г. Справочник по гидравлическим расчетам. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1958. 352 с.
13. Букреев В.И. О корреляции между теоретическими и экспериментальными уединенными волнами // ПМТФ. 1999. Т. 40. № 3. С. 44–52.
14. Овсянников Л.В., Макаренко Н.И., Налимов В.И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985. 318 с.
15. Longuet-Higgins M.S., Fenton J.D. On the mass, momentum, energy and circulation of a solitary wave. II // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1974. V. 340. № 1623. P. 471–493.
16. Букреев В.И., Гусев А.В. Волны в канале впереди вертикальной пластины // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 1. С. 82–90.