

УДК 533.6.011.72:534.1

© 2004 г. Ю. Ф. КИСАРОВ, Л. Е. ТОНКОВ

## МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ СКАЧКА УПЛОТНЕНИЯ В КАНАЛЕ

Численно исследовано влияние случайных возмущений давления малой амплитуды на течение в канале переменного сечения при наличии скачков уплотнения, располагающихся за минимальным сечением. Рассмотрены вопросы, связанные с обработкой и анализом получаемых результатов.

*Ключевые слова:* диффузор, скачок уплотнения, колебания, случайные возмущения.

Течения в сужающихся – расширяющихся каналах (соплах, диффузорах, эжекторах и т.п.), часто встречающиеся в различного рода технических устройствах, несомненно, являются важным предметом для теоретических и экспериментальных исследований. Среди множества задач, возникающих при изучении течений указанного типа, была рассмотрена задача о численном моделировании колебаний скачка уплотнения в условиях трансзвукового течения [1].

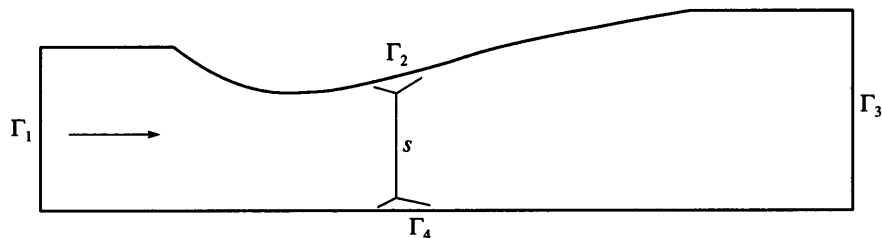
В экспериментальных исследованиях [2–5] колебательных процессов в сужающихся – расширяющихся каналах отмечается, в частности, что течение как в плоских моделях диффузоров, так и в осесимметричных соплах всегда в той или иной степени нестационарно, а наблюдаемые пульсации газодинамических величин и колебания системы скачков уплотнения вызваны как внутренними, так и внешними причинами, имеющими стохастическую природу.

При численном моделировании течений рассматриваемого типа одной из важных деталей является способ задания возмущений параметров течения. Влияние синусоидальных пульсаций давления большой амплитуды, заданных на выходной границе:  $p'_{x=L}(t) = \delta \sin(2\pi ft)$ , где  $\delta = 0.2p_\infty$ , смоделировано в [6–8]. Для численного исследования шума сверхзвуковой осесимметричной струи в [9] возмущалась радиальная компонента скорости:  $v'_{x=0}(t, r) = \delta \exp[-(r - 0.5)^2] \sin(2\pi ft)$ ,  $\delta = 0.001$ .

В расчетах по одномерной модели [5] возмущения давления вычислялись при помощи случайного процесса, имеющего характер белого шума. Источник располагался в том месте, где, по результатам эксперимента, наблюдалась максимальная интенсивность пульсаций. К сожалению, в статье не указана амплитуда возмущений.

При расчете параметров нестационарного течения в [10, 11] возмущения в явном виде не накладывались. В уравнениях Навье – Стокса вязкие члены полагались равными нулю. Вместе с тем на непроницаемых границах ставились условия прилипания и формирование пограничного слоя происходило за счет схемной (численной) вязкости. Нестационарность течения обеспечивалась ошибками округления и другими, имеющими вычислительную природу, которые с хорошей точностью можно считать белым шумом с амплитудой порядка машинного нуля.

**1. Постановка задачи.** Настоящая работа посвящена численному моделированию влияния малых случайных возмущений заданного спектрального состава на поведение системы скачков уплотнения и структуру течения в плоском диффузоре. Решаются осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье – Стокса, записанные в консервативной



Фиг. 1. Область интегрирования  $\Omega$ ;  $s$  – замыкающий скачок уплотнения

форме. Система уравнений замыкается моделью турбулентности Спаларта – Аллмараса [12].

Решение ищется в области  $\Omega \times [0, t^*]$  с основанием  $\Omega$  (фиг. 1) и границей  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ , представляющей собой сужающийся–расширяющийся канал, ограниченный твердыми непроницаемыми стенками  $\Gamma_2, \Gamma_4$ , входным  $\Gamma_1$  и выходным  $\Gamma_3$  сечениями (среда движется слева направо).

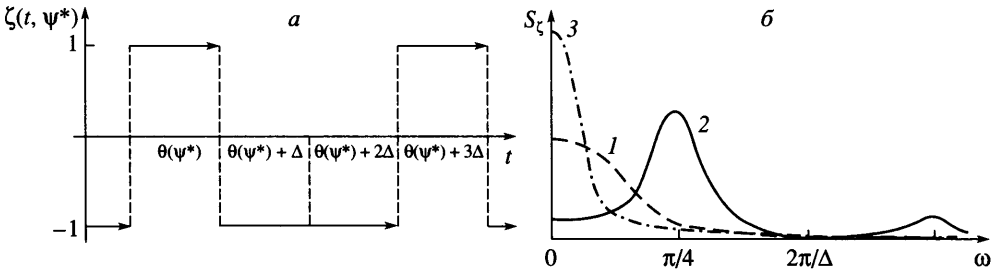
**2. Начальные и граничные условия.** Геометрические размеры  $\Omega$ , параметры среды на входной и выходной границах, число  $Re = 8 \cdot 10^5$  соответствуют условиям эксперимента [3]. На границе  $\Gamma_1$  задавались полное давление и температура торможения, поперечная составляющая вектора скорости полагалась равной нулю. Давление на входной границе в процессе расчета определялось путем экстраполяции по значениям во внутренних узлах. На  $\Gamma_3$  истечение также дозвуковое, и поэтому здесь задавалось статическое давление в общем случае как функция времени  $t$ . На непроницаемых границах  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_4$  ставились условия прилипания и отсутствия тепловых потоков.

Начальные условия для расчета нестационарного возмущенного течения определялись стационарным решением, для заданного в выходном сечении постоянного давления  $p = 0.91$ . При этом значении  $p$  реализуется режим течения с образованием скачка умеренной интенсивности в расширяющейся части канала ( $x \approx 4.3$ ). Число Маха перед скачком  $M = 1.37$ . Полученное стационарное решение соответствует одному из режимов, экспериментально исследованных в [3], где отмечено, что в подобных условиях в прямоугольной модели диффузора не наблюдаются ярко выраженные трехмерные особенности.

Начиная с момента времени  $t = 0$  стационарный поток в выходном сечении канала подвергался действию малых возмущений статического давления с амплитудой, равной 2% от стационарного значения. Возмущения задавались при помощи случайного процесса  $\zeta(t, \psi)$ ,  $\psi \in \Psi$  ( $\Psi$  – пространство элементарных событий), каждая траектория которого при фиксированном  $\psi = \psi^*$  представляет собой кусочно-постоянную на интервалах длины  $\Delta$  непрерывную справа функцию  $t$ , принимающую два значения 1 и  $-1$  (фиг. 2, а). Координата первой точки “переключения”  $\vartheta(\psi)$  является случайной величиной, равномерно распределенной на интервале  $(0, \Delta)$ . Величина  $P$  ( $0 < P < 1$ ) – вероятность перехода в момент времени  $t_k = \vartheta(\psi) + k\Delta$ ,  $k = 0, 1, \dots$  из одного состояния в другое.

Графики спектральной плотности  $S_{\zeta}(\omega)$  рассматриваемого случайного процесса для различных значений  $P$  на фиг. 2, б показывают, что даже для такого простого случая, когда свойства процесса определяются одним параметром (при фиксированном  $\Delta$ ), можно получить существенно различающиеся возмущения. Так, для  $P = 0.5, 0.25, 0.75$  реализуются соответственно дискретный белый шум (кривая 1, фиг. 2, б), узкополосный процесс (2), процесс с преобладанием постоянной составляющей (3).

**3. Краткое описание метода.** Применяемый метод расчета основан на разностной схеме Стегера – Уорминга, неявной в поперечном направлении. Перед построением



Фиг. 2. Стационарный случайный процесс  $\zeta(t, \Psi)$ : а – возможная реализация ( $\Psi = \Psi^*$ ); б – спектральная плотность: 1–3 –  $P = 1/2; 1/4; 3/4$

конечно-разностного аналога исходная система уравнений приведена к безразмерному виду (в качестве характерных масштабов выбраны критические значения газодинамических величин и высота входного сечения). Затем выполнено преобразование координат  $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ , переводящее исходную область  $\Omega$  в единичный квадрат  $\Omega'$ . Для вычисления пространственных производных применена аппроксимация, предложенная в [13]. Более подробно метод расчета, а также особенности течения (изменение конфигурации системы скачков, возникновение и исчезновение отрывных зон и т.д.), наблюдающиеся при наложении гармонических возмущений, описаны в [8].

**4. Результаты.** Для анализа влияния стохастических колебаний на процессы в диффузоре вычислялись средние значения параметров, среднеквадратичные отклонения, спектральные плотности

$$S_g(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} M \left[ \frac{T}{(2N + 1)} \left| \sum_{n=-N}^N g_n \exp(-i2\pi fnT) \right|^2 \right] \tag{4.1}$$

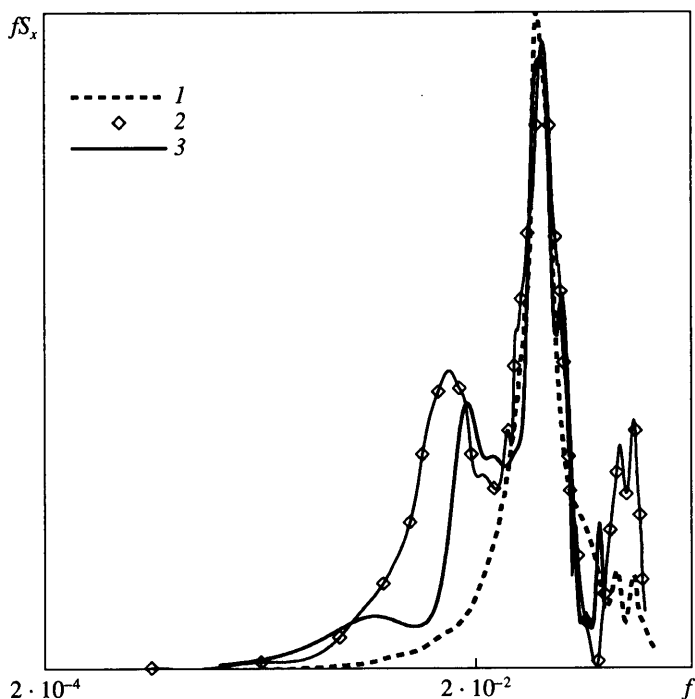
и функции пространственно-временной корреляции (для фиксированного значения  $y$ )

$$C_{h-g}(x, t, \tau) = (\sigma_g(x)\sigma_h)^{-1} (M[h(t + \tau, \psi)g(x, t, \psi)], \tau \geq 0; -M[h(t, \psi)g(x, t - \tau, \psi)], \tau < 0) \tag{4.2}$$

Здесь  $[0, T]$  – промежуток дискретизации,  $2N$  – количество отсчетов,  $M$  – математическое ожидание, вычисленное по ансамблю реализаций,  $f$  – циклическая частота (число Струхала). Величина корреляции нормирована на произведение среднеквадратичных отклонений. Для получения устойчивых спектральных оценок с разрешением по частоте 0.005 течение моделировалось на отрезке (безразмерного) времени  $t \in [0, 2000]$ . Было получено 76800 равноотстоящих отсчетов данных, по которым методом Уэлча [14] с применением косинусоидального окна и 50% перекрытия сегментов длины  $2N = 2048$  вычислялись оценки спектральной плотности (4.1), а также корреляционные функции (4.2).

Для нестационарного течения, когда возмущения являются узкополосным случайным процессом, параметры процесса  $P = 0.25$  и  $\Delta = 9$  выбираются таким образом, чтобы первый локальный минимум (фиг. 2, б, кривая 2) пришелся на частоту  $f_1 = 0.12$ . Данное значение является первой характерной частотой для области, ограниченной с одной стороны скачком уплотнения, с другой – выходным сечением канала при наличии среднего потока [3].

На фиг. 3 показана в сравнении с экспериментальными данными [3] (кривая 1) и результатами вычислений [5] (2) спектральная плотность смещений скачка  $S_x$ , полученная в рамках излагаемого метода (3). Для учета влияния пограничного слоя в расчетах [5]



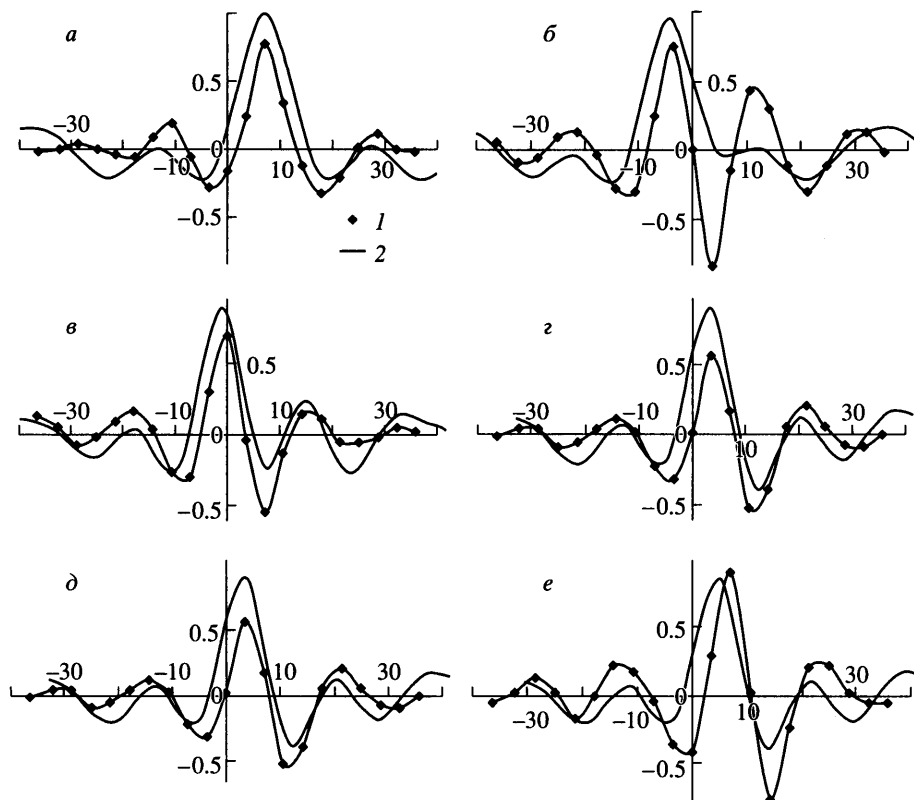
Фиг. 3. Спектральная плотность смещений скачка уплотнения: 1 – эксперимент [3], 2 – расчет [5] (одномерная модель), 3 – расчет для узкополосного случайного возмущения

использовалось эффективное, а не геометрическое сечение канала. Как следует из фиг. 3, совместный расчет турбулентного пограничного слоя и процесса распространения возмущений позволяет более точно воспроизвести картину движения скачка уплотнения.

Представление о взаимосвязи колебаний скачка уплотнения и пульсаций давления в различных сечениях канала дает функция взаимной корреляции  $C_{x-p}$ . Для ее вычисления по формуле (4.2) надо в качестве эталонного сигнала  $h(t)$  взять смещение скачка от своего стационарного положения  $x'(t)$ ;  $g(x, t, \psi_*) \equiv p'(x, t)$ . Сравнение (фиг. 4) вычисленной корреляционной функции  $C_{x-p}$  и построенной по результатам эксперимента [3] свидетельствует об адекватном отражении численной моделью процессов колебаний скачка и распространения волн давления по каналу.

Более детальное представление о процессах распространения возмущений в канале можно получить, построив, например, вдоль его оси пространственно-временную корреляционную функцию  $C_{p-p}$  для пульсационной составляющей давления. Для этого в (4.2) следует за эталонный сигнал взять пульсационную составляющую давления:  $h(t) \equiv p'(x_s, t)$ ,  $x_s$  – ордината среднего положения скачка уплотнения. Результаты проведенных расчетов, а также физическая природа моделируемого процесса позволяют в рамках решаемой задачи считать процесс колебаний стационарным (в вероятностном смысле). Это означает, что корреляционная функция (4.2) инвариантна относительно сдвига по  $t$ .

Изолинии вычисленной функции  $C_{p-p}(x, \tau)$  приведены на фиг. 5. Кривыми I и II показано геометрическое место максимумов корреляционных кривых – гребней, поло-

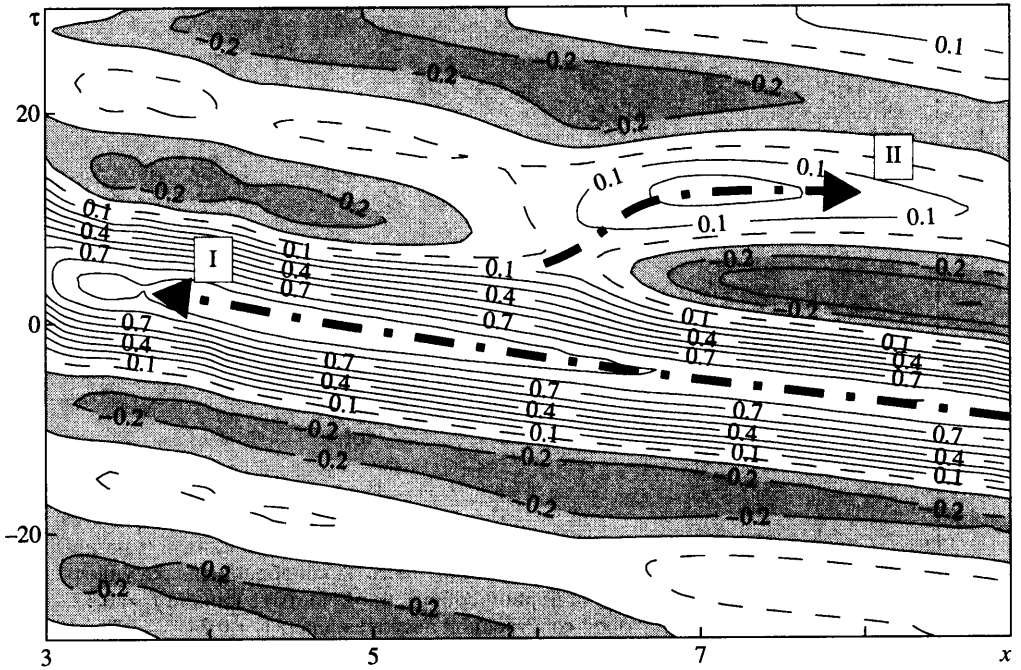


Фиг. 4. Коэффициент взаимной корреляции смещений скачка уплотнения и пульсаций давления для  $x/x_s = 1.56; 2.47; 3.63; 5.05; 6.59; 8.87$  (а–е): 1 – эксперимент [3]; 2 – расчет для узкополосного случайного возмущения

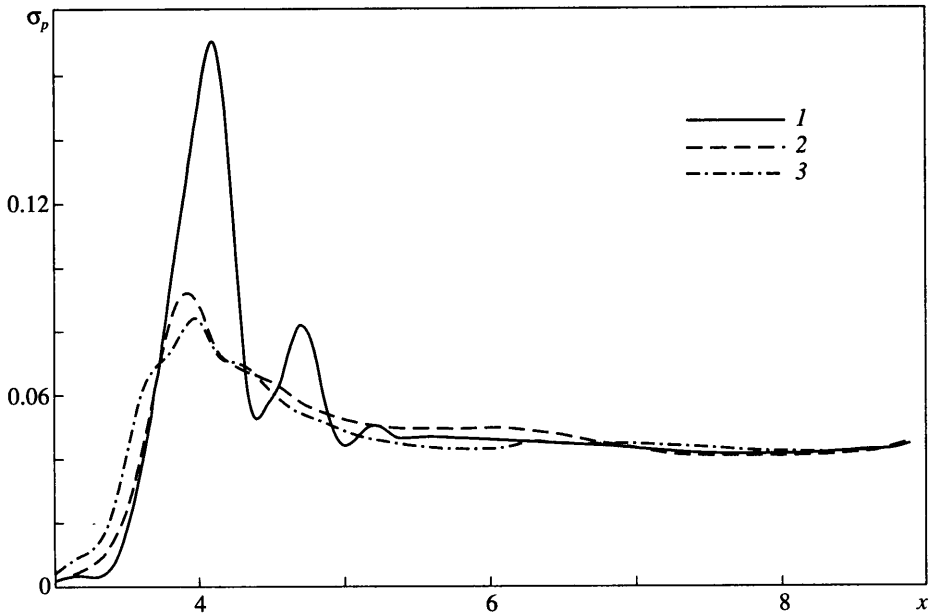
жение которых характеризует направление и скорость распространения возмущений. Штриховые кривые соответствуют нулевому значению корреляции. Можно четко выделить два семейства возмущений – это волны, вызванные наложенными колебаниями давления и распространяющиеся от выходного сечения в глубь канала (кривая I) и возмущения, обусловленные колебаниями скачка уплотнения, сносимые вниз по течению (кривая II). Скорость распространения возмущений, генерируемых колебаниями скачка, вниз по потоку непостоянна и увеличивается с приближением к выходному сечению (это видно по искривлению гребня II). Такое поведение объясняется тем, что волны, отраженные от скачка уплотнения или вызванные его колебаниями, двигаются в зону, где величина давления большую часть времени меньше его значения в среднем положении скачка (область отрицательных значений корреляции на фиг. 5).

Отметим, что на фиг. 5 не заметно уменьшения корреляции левее крайнего положения ударной волны ( $x < 3.4$ ), т.е. двумерная модель естественным образом отражает наличие связи между колебаниями давления по разные стороны от скачка, которая обусловлена распространением возмущений против потока по зонам дозвукового течения в область перед скачком.

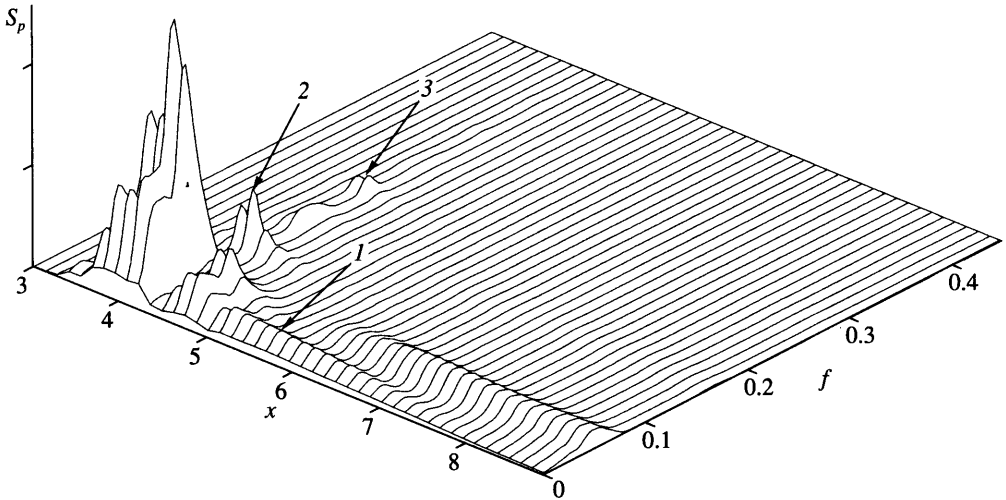
Среднеквадратическое отклонение давления (фиг. 6) характеризует интенсивность пульсаций в различных сечениях канала. Абсолютный максимум на кривой I (ось канала) соответствует среднему положению скачка уплотнения, перемещения которого



Фиг. 5. Изолинии нормированной пространственно-временной корреляционной функции пульсаций давления  $C_{p-p}(x, \tau)$  для узкополосного случайного возмущения: I – распространение накладываемых возмущений, II – распространение отраженных возмущений



Фиг. 6. Среднеквадратическое отклонение давления (узкополосные возмущения): 1 – ось канала; 2, 3 – верхняя и нижняя стенки



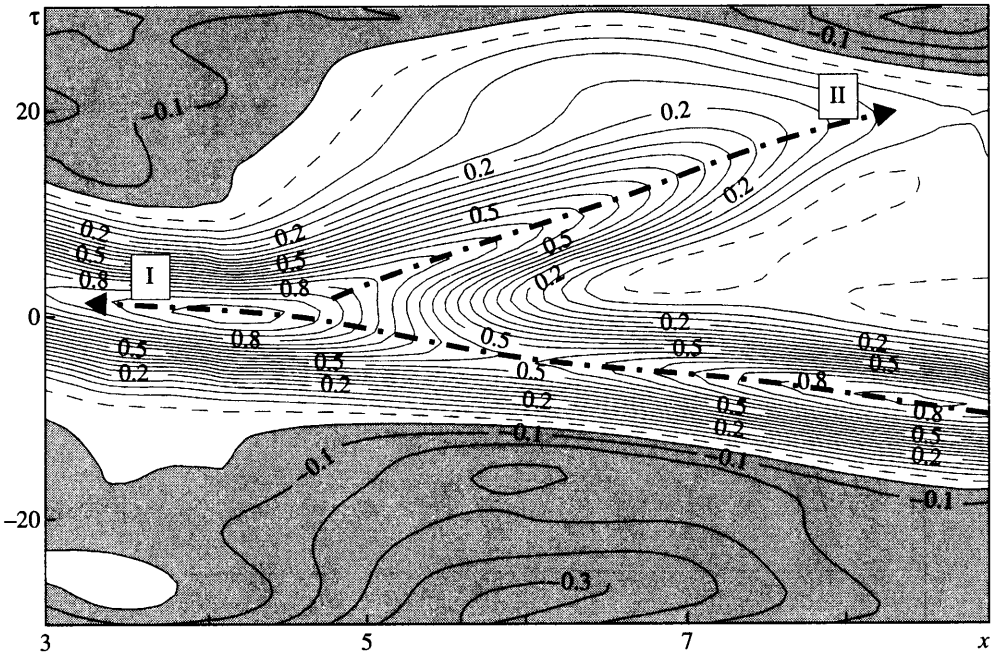
Фиг. 7. Спектральная плотность пульсаций давления  $S_p(x, f)$  на оси канала (узкополосные возмущения): 1 – выделение характерной частоты колебаний скачка уплотнения, 2 – локальный максимум на первой собственной частоте канала  $f_1 = 0.12$ , 3 – локальный максимум на второй собственной частоте канала  $f_2 = 0.24$

вызывают в этом сечении колебания давления с амплитудой порядка интенсивности скачка. Здесь осью канала называется линия в  $\Omega$ , которая при преобразовании координат  $\Omega \rightarrow \Omega'$  переходит в прямую  $\eta = 1/2$ . Следующий ниже по течению локальный максимум вызван смещениями второго скачка уплотнения меньшей интенсивности, который отсутствует в стационарном (невозмущенном) течении и появляется в некоторые промежутки времени в возмущенном потоке. На графиках, соответствующих верхней (кривая 2) и нижней (3) стенкам канала, абсолютный максимум меньше по величине и расположен выше по течению, чем на кривой 1, что обусловлено конфигурацией скачка уплотнения и его взаимодействием с пограничным слоем.

Характер полученных зависимостей качественно соответствует результатам экспериментов [2], проведенных для канала с геометрическими размерами, отличающимися от приведенных в [3]. Отмечено, что при всех исследованных сверхзвуковых режимах фиксируются пренебрежимо малый уровень пульсаций перед ударной волной, затем ярко выраженный максимум и почти постоянный уровень пульсаций в дозвуковой области вниз по потоку.

Оценка спектральной плотности колебательной составляющей давления  $S_p(x, f)$  для оси канала показана на фиг. 7. Разрешение спектра по частоте составляет 0.005. При удалении от выходного сечения в глубь канала происходит изменение спектрального состава колебаний давления. Начиная с сечения  $x = 7.5$ , в спектре появляется локальный максимум (стрелка 1 на фиг. 7) на частоте  $f = 0.002$ , по терминологии [3], происходят “захват” и выделение в спектре характерных частот. Расположение локальных максимумов на частотах 0.11 и 0.23 (обозначены стрелками 2 и 3 соответственно), с учетом разрешения спектра достаточно точно соответствующее теоретической оценке для потока со средним течением ( $f_1 = 0.12$ ,  $f_2 = 0.24$ ), свидетельствует о значительном вкладе акустических колебаний.

Рассмотрим далее особенности нестационарного течения, когда возмущения задаются широкополосным случайным процессом с параметрами  $P = 0.46$ ,  $\Delta = 4.8$ .



Фиг. 8. Изолинии нормированной пространственно-временной корреляционной функции пульсаций давления  $C_{p-p}(x, \tau)$  для широкополосного случайного возмущения: *I* – распространения накладываемых возмущений и *II* – отраженных возмущений

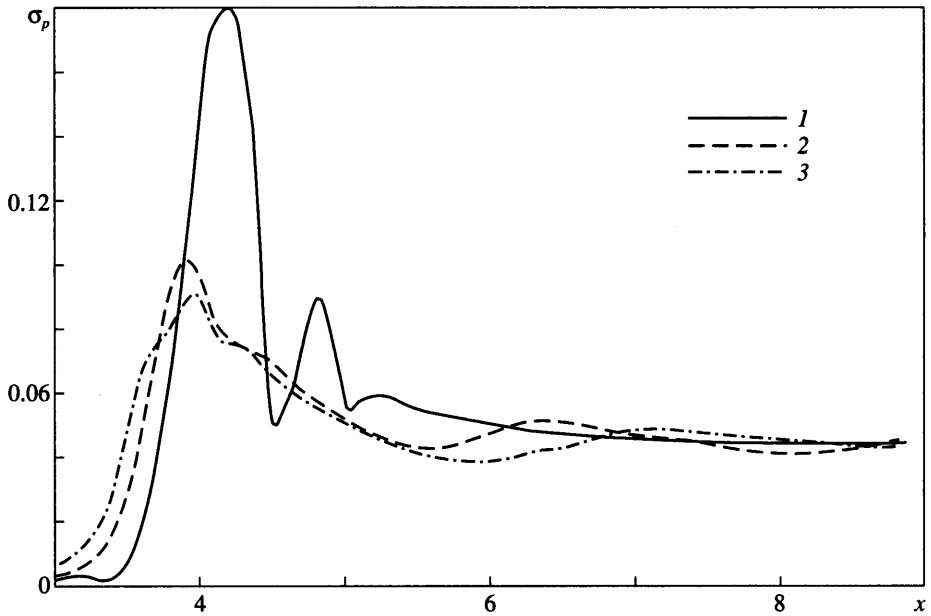
На карте изолиний пространственно-временной корреляционной зависимости для пульсационной составляющей давления (фиг. 8) гребень *I* менее широкий по сравнению с изображенным на фиг. 5, так как чем ближе характер случайных возмущений к белому шуму, тем сильнее его корреляционная функция приближается к  $\delta$ -функции. Скорость распространения отраженных волн вниз по течению практически постоянна в силу того, что в данном случае распределение давления в среднем более равномерно по длине канала.

Зависимость среднеквадратического отклонения давления (фиг. 9) практически совпадает с представленной на фиг. 6 за исключением того, что значения интенсивности пульсаций несколько ниже. Такое совпадение свидетельствует, что для рассматриваемого класса задач интенсивность колебаний давления слабо зависит от спектрального состава накладываемых случайных возмущений, а определяется главным образом движением скачка уплотнения и условиями на нем.

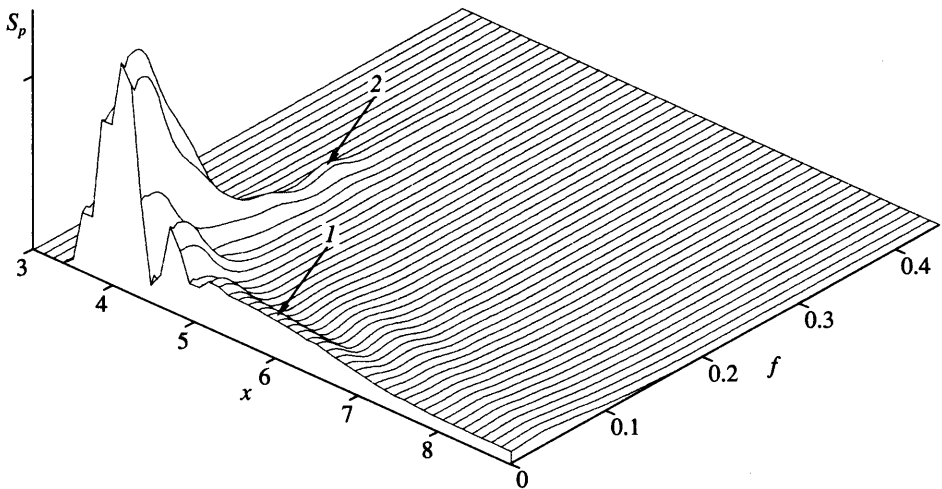
На графике спектральной плотности колебательной составляющей давления (фиг. 10) аналогично предыдущему варианту, начиная с сечения  $x = 7.5$ , в спектре выделяется максимум (стрелка *I*). Распределение спектральной плотности пульсаций в этом случае естественно занимает значительно большую полосу частот, поэтому гармоника с первой собственной частотой, обозначенная на фиг. 7 стрелкой 2, в данном случае в спектре не выделяется. Локальный максимум, соответствующий второй собственной акустической частоте канала  $f_2 = 0.22$ , сохраняется (фиг. 10, стрелка 2).

Сравнение фиг. 7 и 10 показывает, что спектральный состав пульсаций давления в различных сечениях канала в большей степени зависит от спектра накладываемых возмущений, чем остальные рассмотренные характеристики.





Фиг. 9. Среднеквадратическое отклонение давления (широкополосные возмущения); 1 – ось канала; 2, 3 – верхняя и нижняя стенки



Фиг. 10. Спектральная плотность пульсаций давления  $S_p(x, f)$  на оси канала (широкополосные возмущения): 1 – выделение характерной частоты колебаний скачка уплотнения, 2 – локальный максимум на второй собственной частоте канала  $f_2 = 0.24$

**Заключение.** Численно исследовано влияние узко- и широкополосных случайных возмущений давления на течение в канале переменного сечения при наличии скачков уплотнения. Сопоставление с данными (Sajben M., Kroutil J.C., Masuda M.) о спектральной плотности смещений скачка уплотнения, функции взаимной корреляции смещений и пульсаций давления показывает достаточно хорошее согласование между результатами проведенных расчетов и данными экспериментальных исследований. Сле-

дует отметить и соответствие рассчитанного распределения интенсивности пульсаций давления по длине канала, полученному в экспериментах.

Вне зависимости от спектрального состава возмущений нестационарное течение обладает несколькими ярко выраженными свойствами.

При смещении вверх по течению в спектре выделяется локальный максимум в области низких частот. Этот факт также отмечается при экспериментальных исследованиях и связывается с собственной частотой колебаний скачка. Амплитуда пульсаций слабо зависит от спектрального состава накладываемых возмущений и определяется движением скачка уплотнения и его интенсивностью. Взаимодействие скачка с пограничным слоем и нестационарными отрывными зонами определяет характер распространения возмущений как вниз по потоку, так и вверх, в частности в область за скачком.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zaman K.B.M.Q., Dahl M.D., Bencic T.J., Loh C.Y. Investigation of a 'transonic resonance' with convergent-divergent nozzles // J. Fluid Mech. 2002. V. 463. P. 313–343.
2. Чен К.П., Сейбен М., Кроутил Дж.К. Колебания ударной волны в диффузоре в области трансзвукового течения // Ракетн. техника и космонавтика. 1979. Т. 17. № 10. С. 65–75.
3. Богар Т.Дж., Сейбен М., Кроутил Дж.К. Экспериментальное исследование параметров течения и характерных частот возмущений в сверхзвуковых диффузорах // Аэрокосм. техника. 1984. Т. 2. № 5. С. 3–14.
4. Сейбен М., Богар Т.Дж., Кроутил Дж.К. Экспериментальное исследование течений в плоских воздухозаборниках // Аэрокосм. техника. 1985. Т. 3. № 1. С. 3–13.
5. Handa T., Masuda M., Matsuo K. Mechanism of shock wave oscillation in transonic diffusers // AIAA Journal. 2003. V. 41. № 1. P. 64–70.
6. Хси Т., Уордлоу А.Б., Коукли Т. Влияние пульсаций давления в камере ПВРД на течение во входном диффузоре // Аэрокосм. техника. 1988. № 4. С. 122–129.
7. Тонков Л.Е. Моделирование неустойчивости ударных волн в каналах // Мат. моделирование. 1997. Т. 9. № 2. С. 102–105.
8. Кисаров Ю.Ф., Тонков Л.Е. Периодические колебания скачка уплотнения в канале переменного сечения // Вестн. Удмурт. ун-та. 2000. № 1. С. 28–37.
9. Loh C.Y., Chang S.-C., Jorgenson P.C.E., Hultgren L.S. Noise computation of a shock-containing supersonic axisymmetric jet by the CE / SE method // AIAA Paper. 2000. № 0475. 2000.
10. Loh C.Y., Zaman K.B.M.Q. Numerical investigation of 'transonic resonance' with a convergent-divergent nozzle // AIAA Journal. 2002. V. 40. № 12. P. 2393–2401.
11. Loh C.Y. Computational aeroacoustics by the space-time CE / SE Method // NASA CR. 2001. № 210680.
12. Spalart P.R., Allmaras S.A. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // AIAA Paper 92-0439. 1992. P. 1–21.
13. Вязников К.В., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Построение монотонных разностных схем повышенного порядка аппроксимации для систем уравнений гиперболического типа // Мат. моделирование. 1989. Т. 1. № 5. С. 95–120.
14. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990. 584 с.