

УДК 533.6.011.35

© 2004 г. А. В. ИВАНОВА, А. Г. КУЗЬМИН

НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ ТРАНСЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

Численно исследовано невязкое трансзвуковое обтекание симметричных аэродинамических профилей с минимумом кривизны в средней части. Показано, что при нулевом угле атаки α в некотором диапазоне числа Маха натекающего потока $M_{\min} < M_{\infty} < M_{\max}$ существуют как симметричные, так и несимметричные картины стационарного обтекания. В этом диапазоне несимметричные течения устойчивы по отношению к малым возмущениям, а симметричные течения устойчивы, если M_{∞} не совпадает с сингулярным числом Маха, при котором незначительные изменения M_{∞} или α могут вызывать реструктуризацию течения.

Ключевые слова: аэродинамический профиль, невязкое течение, местная сверхзвуковая зона, ударные волны, неустойчивость.

При большой дозвуковой скорости натекающего потока воздуха около аэродинамического профиля образуется зона сверхзвуковой скорости течения. Если кривизна профиля имеет минимум вблизи его середины, то возможно возникновение двух и более сверхзвуковых зон на его верхней и нижней сторонах. При возрастании M_{∞} эти зоны могут сливаться, а при убывании, напротив, расщепляться на подобласти меньшего размера. В [1, 2] показано, что изменение стационарной картины обтекания, сопровождаемое слиянием или расщеплением сверхзвуковых зон, происходит дискретным образом. Это явление получило название структурной неустойчивости, а значения M_{∞} , при переходе через которые происходит реструктуризация течения, названы сингулярными значениями M_s . В данной работе концепция структурной неустойчивости используется для анализа причин неединственности трансзвуковых течений, установленной в исследованиях ряда авторов в предыдущие годы [3–7].

1. Вопросы устойчивости решений уравнений Эйлера. В [5] была рассмотрена задача стационарного обтекания модельного профиля с прямолинейной средней частью

$$y(x) = \pm 0.06, \quad 0.25 \leq x \leq 0.75$$

$$y(x) = \pm 0.06 \sqrt{8x(1-2x)}, \quad 0 \leq x < 0.25 \quad (1.1)$$

$$y(x) = \pm 0.03 \sin(12.56637x - 7.85398) + 0.03, \quad 0.75 < x \leq 1.0$$

Несимметричные решения с положительной и отрицательной подъемной силой, полученные при $\alpha = 0$ в диапазоне числа Маха

$$0.825 < M_{\infty} < 0.843 \quad (1.2)$$

свидетельствовали о неединственности стационарного обтекания. Относительно симметричных решений был сделан вывод, что они неустойчивы.

Ниже проводится исследование трансзвукового обтекания профиля (1.1) с использованием мелких расчетных сеток. Показывается, что в диапазоне (1.2) как симметричные, так и несимметричные течения устойчивы по отношению к малым возмущениям угла атаки и числа Маха, за исключением случая $M_{\infty} = M_s$, когда наблюдается неустойчивость симметричных течений.

2. Постановка задачи. Рассматривается невязкое двумерное течение сжимаемого газа около аэродинамического профиля. В качестве краевого условия на профиле используется классическое условие скольжения. Течение описывается системой уравнений Эйлера, решение которых требуется найти в конечной области с внешней границей, расположенной на достаточно большом удалении от профиля, где поток является практически однородным. На внешней границе задаются число Маха $M_\infty < 1$ и угол атаки α натекающего потока. Начальными условиями являются параметры неподвижной среды или параметры потока, полученного в результате расчетов установившегося течения при других значениях M_∞ и α .

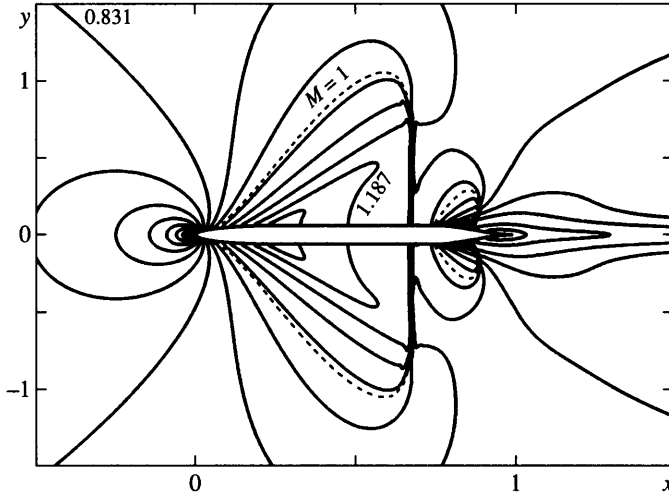
Для нахождения решений уравнений Эйлера использована программа NSC2KE, разработанная на основе метода конечных объемов [8]. Дискретизация конвективных членов проводилась по схеме Po (Roe). Второй порядок аппроксимации по пространственным переменным обеспечивался путем восстановления параметров в ячейках по схеме MUSCL с применением ограничителей потоков типа Ван Албэда [9]. Интегрирование по времени проводилось с помощью явного четырехточечного алгоритма Рунге – Кутты. Численное моделирование условий на входных и выходных участках внешней границы включало схему расщепления потоков Стеггера – Уорминга [10]. Стационарные решения находились с применением локальных шагов по времени для обеспечения более быстрого установления.

Исследование обтекания аэродинамических профилей было проведено на неравномерной C-образной сетке 673×215 , составленной из треугольных элементов, сгущавшихся вблизи ударных волн и в областях с большими градиентами течения. Внешняя граница расчетной области располагалась на расстоянии 20 длин хорд от профиля. Выход на стационарный режим наблюдался после примерно $1.5 \cdot 10^3$ итераций. Тестовые расчеты на более крупной сетке показали, что погрешность в определении положения ударных волн при этом заметно возрастает. С другой стороны, использование более мелких сеток не приводило к значительному повышению точности расчетов, но при этом время вычислений, необходимое для получения стационарного решения, существенно увеличивалось. Апробация вычислительной программы состояла в расчете трансзвукового течения в канале и сравнении результатов с данными, полученными с помощью схемы ENO2 [1, 2]. Кроме того, были проведены расчеты обтекания профиля Whitcomb для угла атаки $\alpha = 4^\circ$, показавшие, что найденная зависимость коэффициента подъемной силы C_L от M_∞ хорошо согласуется с результатами, полученными по коммерческой программе FLUENT.

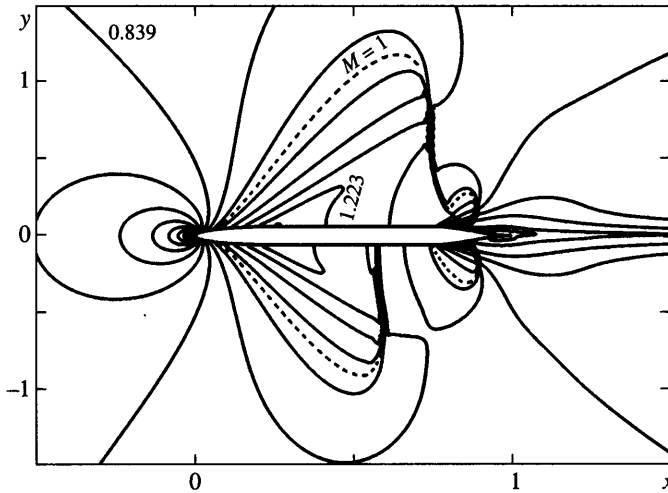
3. Результаты расчетов обтекания профиля (1.1). Расчеты установившихся течений показали, что при $\alpha = 0$ и $M_\infty = 0.755$ на верхней и нижней сторонах профиля (1.1) формируются по две сверхзвуковые зоны. Такая картина обтекания далее называется течением вида $2 + 2$. С возрастанием M_∞ до значения 0.841 расстояние между сверхзвуковыми зонами уменьшается и становится равным 0.078, при этом течение остается симметричным относительно оси x (фиг. 1).

С увеличением M_∞ от 0.841 до 0.842 происходит изменение структуры течения, состоящее в том, что по обе стороны профиля две сверхзвуковые зоны сливаются в одну. При этом симметрия сохраняется и устанавливается картина обтекания вида $1 + 1$. Последовательность нестационарных состояний, возникающих при таком переходе, прослежена в [2] для случая трансзвукового течения в канале.

При изменении $M_\infty = 0.841$ на меньшую величину, до 0.8415, процесс установления к новому стационарному состоянию развивается крайне медленно. При этом наличие малых погрешностей задания координат расчетной сетки или профиля может привести к тому, что на одной из его сторон слияние сверхзвуковых зон осуществится раньше, чем на другой. Возникшая асимметрия течения развивается далее так, что на второй стороне профиля расстояние между зонами начинает увеличиваться и устанавливается несимметричная картина обтекания (фиг. 2), в дальнейшем обозначаемая как $1 + 2$.



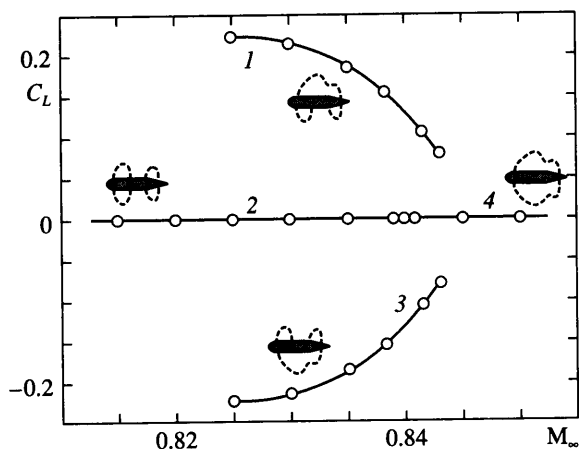
Фиг. 1. Симметричное обтекание профиля (1.1) при $M_\infty = 0.841$, $\alpha = 0$: изолинии числа Маха



Фиг. 2. Несимметричное обтекание профиля (1.1) при $M_\infty = 0.8415$, $\alpha = 0$: изолинии числа Маха

Область, полученную в результате слияния двух сверхзвуковых зон, будем называть для краткости объединенной сверхзвуковой зоной.

При убывании M_∞ от 0.842 до 0.8395 картина обтекания 1 + 1 сохраняет качественный характер, лишь высота объединенных зон несколько снижается. Дальнейшее уменьшение M_∞ до 0.8385 приводит к реструктуризации течения, в результате которой с каждой стороны профиля сверхзвуковые зоны разделяются на две и устанавливается симметричная картина обтекания вида 2 + 2. Если $M_\infty = 0.8395$ изменить на меньшую величину, до 0.839, то процесс расщепления сверхзвуковых зон развивается крайне медленно. При этом малые погрешности задания координат профиля или асимметрия сетки могут вызвать переход к несимметричным картинам обтекания 1 + 2 или 2 + 1.



Фиг. 3. Зависимость коэффициента подъемной силы C_L от M_∞ для профиля (1.1) при $\alpha = 0$: 1–4 – ветви, соответствующие разному количеству местных сверхзвуковых зон, показанных на схемах обтекания; ветви 2 и 4 накладываются друг на друга в интервале (3.1)

Из представленного выше следует, что для профиля (1.1) при $\alpha = 0$ существует сингулярное число Маха $M_s \approx 0.8403$, в окрестности которого

$$0.839 < M_\infty < 0.8415 \quad (3.1)$$

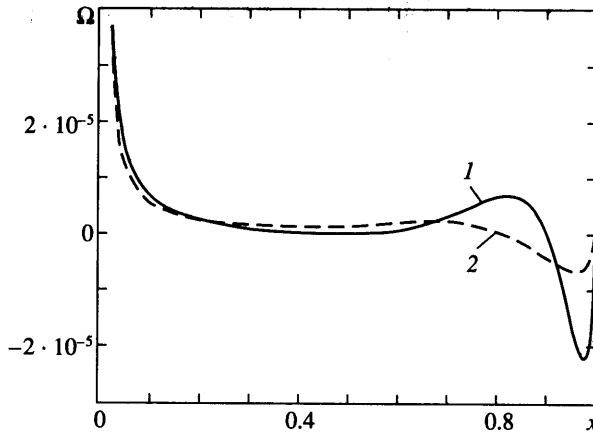
наблюдается гистерезис симметричных картин обтекания. Реализация одной из двух возможных симметричных картин в диапазоне (3.1), таким образом, зависит от предыстории M_∞ .

Симметричное обтекание профиля (1.1) устойчиво по отношению к малым возмущениям угла атаки α , если M_∞ не совпадает с M_s . Например, для $M_\infty = 0.8425 > M_s$ картина обтекания вида 1 + 1 сохраняется при углах атаки до 0.2° , и при последующем задании $\alpha = 0$ она возвращается к симметричному виду. Если же увеличить α до 0.25° , то происходит переход к течению типа 1 + 2. Для возвращения к первоначальной картине необходимо задать отрицательное значение угла атаки. Таким образом, при фиксированном $M_\infty = 0.8425$ наблюдается существование сингулярного угла атаки, вызывающего реструктуризацию течения, и имеет место гистерезис течения по α .

Для фиксированного $M_\infty = 0.831 < M_s$ симметричная картина обтекания 2 + 2 устойчива при углах атаки до 0.35° . Если же увеличить α до 0.4° , то происходит переход к несимметричному обтеканию вида 1 + 2. Для реализации первоначальной картины 2 + 2 необходимо снова задать отрицательное α . Таким образом, при $M_\infty = 0.831$ гистерезис по углу атаки является более широким, чем в предыдущем случае.

Данные результаты показывают, что неустойчивость симметричных течений в [5] была связана, по-видимому, с использованием недостаточно мелкой вычислительной сетки. В действительности симметричное обтекание профиля (1.1) устойчиво при малых возмущениях α и M_∞ , хотя границы устойчивости сужаются при приближении M_∞ к M_s . В частности, в диапазоне (3.1) изменение α всего на $\pm 0.1^\circ$ вызывает развитие нестационарного перехода, приводящего к установлению картины обтекания 1 + 2 или 2 + 1.

Несимметричное обтекание профиля (1.1) при $\alpha = 0$ сопровождается появлением положительной или отрицательной подъемной силы. Значения коэффициента подъемной силы C_L (фиг. 3), вычисленные путем интегрирования давления вдоль профиля, фактически совпадают со значениями C_L , полученными в [5]. При изменении числа Маха в диапазоне $0.825 \leq M_\infty \leq 0.843$ положение сверхзвуковых областей и величина



Фиг. 4. Зависимость кривизны $\Omega = -y''[1 + (y')^2]^{-3/2}$ от продольной координаты x : 1, 2 – для профилей (4.1) с $n = 6$ и (4.3)

коэффициента C_L изменяются непрерывно. Однако при уменьшении M_∞ до 0.8245 происходит скачкообразный переход от несимметричного обтекания к течению вида 2 + 2. При этом объединенная сверхзвуковая зона расщепляется и симметрия течения относительно оси x восстанавливается.

С другой стороны, при увеличении M_∞ от 0.843 до 0.8435 происходит переход от несимметричной картины обтекания 1 + 2 или 2 + 1 к 1 + 1. Таким образом, устойчивое несимметричное обтекание при нулевом угле атаки реализуется в диапазоне

$$M_{\min} < M_\infty < M_{\max} \quad (3.2)$$

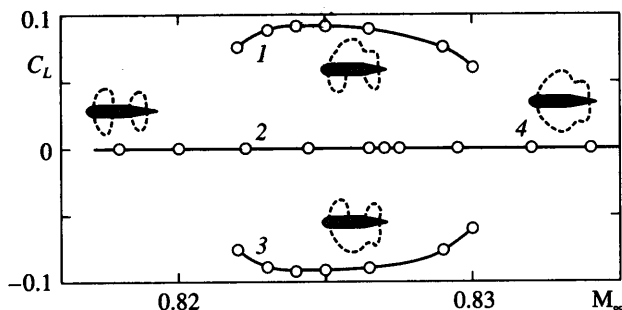
где $M_{\min} \approx 0.8247$ и $M_{\max} \approx 0.8433$, что согласуется с (1.2).

4. Обтекание профилей с ненулевой кривизной средней части. Кривизна симметричного профиля

$$y(x) = \pm 0.06 \sqrt{1 - (2x - 1)^4} \cos^2\left(\frac{1}{2} \pi x^n\right), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad n \geq 1.78 \quad (4.1)$$

уменьшается от максимального значения при $x = 0$ до минимума вблизи его середины, за которым следует второй максимум (см. кривую 1 на фиг. 4). В отличие от (1.1) кривизна этого профиля не обращается в нуль нигде, кроме точки перегиба, расположенной в его хвостовой части.

Расчеты трансзвукового обтекания профиля (4.1) при $n = 6$ дали результаты, аналогичные представленным в предыдущем разделе для (1.1). Сингулярное число Маха M_s в этом случае равно 0.8272, гистерезис симметричных течений по M_∞ составляет ± 0.0003 . Интервал (3.2) существования несимметричных решений при $\alpha = 0$ ограничен значениями $M_{\min} \approx 0.8217$ и $M_{\max} \approx 0.8303$ (фиг. 5). Полученная при $M_\infty = 0.822$ несимметричная картина обтекания 1 + 2 представлена на фиг. 6. В объединенной сверхзвуковой области наблюдается многократное отражение ударных волн от звуковой линии и профиля. При убывании M_∞ и переходе через M_{\min} сверхзвуковая область расщепляется на две подобласти в результате расширения и углубления второго вогнутого участка звуковой линии. Распределение давления на профиле является гладким от $x = 0$ до ударных волн в конце местных сверхзвуковых зон в отличие от (1.1), где графики давления на верхней и нижней сторонах профиля имеют изломы при $x = 0.25$ вследствие разрыва



Фиг. 5. Зависимость коэффициента подъемной силы C_L от числа M_∞ для профиля (4.1) с $n = 6$ при $\alpha = 0$: 1–4 – ветви, соответствующие разному количеству местных сверхзвуковых зон, показанных на схемах обтекания; ветви 2 и 4 накладываются друг на друга в интервале ширины 0.0006

второй производной от $y(x)$. Для профиля (4.1) с $n = 5.5$ получены аналогичные результаты, хотя поведение симметричных картин обтекания несколько отличается от того, которое установлено при $n = 6$. В частности, гистерезис симметричных течений по M_∞ в окрестности M_s не наблюдается.

Расчеты обтекания профиля (4.1) с $n = 4$ показали, что сингулярных чисел Маха в этом случае не существует. Поэтому симметричное течение устойчиво при всех M_∞ . В диапазоне $0.756 < M_\infty < 0.8185$ с каждой стороны профиля наблюдались две сверхзвуковые зоны, находившиеся при $M_\infty = 0.8175$ на весьма близком расстоянии друг от друга, однако без их слияния. С увеличением M_∞ вторая сверхзвуковая зона уменьшалась в размерах и сжималась в точку на поверхности профиля. Несимметричные решения при нулевом угле атаки не были получены. Для профиля (4.1) с $n = 3$ и $n = 2$ сингулярные числа Маха также не найдены.

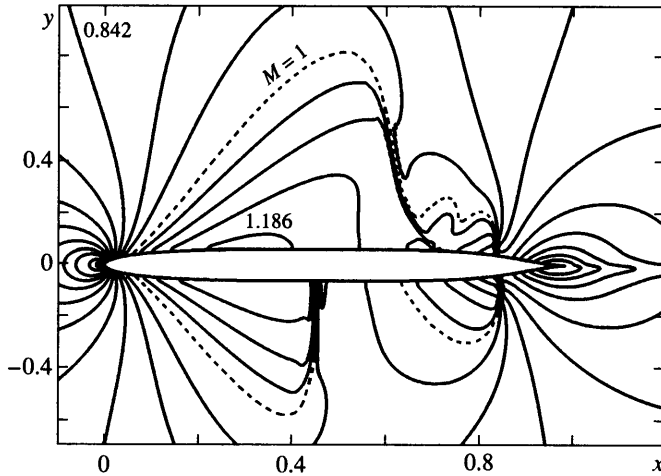
Вместо множителя $\cos^2(\pi x/2)$, обеспечивающего заострение контура в концевой точке $x = 1$, можно использовать множитель $(1 - x^m)^2$

$$y(x) = \pm 0.06 \sqrt{1 - (2x - 1)^4} (1 - x^m)^2, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.2)$$

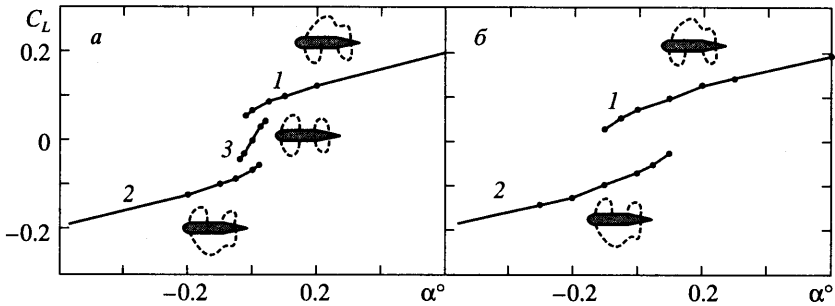
Если $m = 1.85n$, то профиль (4.2) лишь незначительно отличается от (4.1). В частности, для (4.2) с $m = 10$ зависимость $C_L(M_\infty)$ имеет такой же вид, как и на фиг. 5. В этом случае $M_s \approx 0.8242$, а интервал существования несимметричных решений при $\alpha = 0$ ограничен значениями $M_{\min} \approx 0.821$ и $M_{\max} \approx 0.826$. Гистерезис симметричных решений по M_∞ в окрестности M_s не наблюдается. График зависимости $C_L(\alpha)$ для $M_\infty = 0.8215$ состоит из трех ветвей (фиг. 7, а), показывающих наличие гистерезиса по α . При $M_\infty \rightarrow 0.8242$ верхняя и нижняя ветви расширяются, а средняя сжимается в точку и исчезает (фиг. 7, б). Диапазон значений α , в котором определена средняя ветвь, при этом быстро уменьшается. Это означает резкое сужение границ устойчивости симметричных течений. В частности, если M_∞ принадлежит окрестности $0.822 < M_\infty < 0.8257$ числа M_s , то изменение α лишь на $\pm 0.04^\circ$ вызывает развитие нестационарного перехода, приводящего к течению вида 1 + 2 или 2 + 1. Следовательно, симметричное обтекание профиля (4.2) с $m = 10$ представляется неосуществимым на практике для некоторой окрестности числа M_s , ширина которой зависит от степени турбулентности натекающего потока.

Качественно иная картина наблюдается при обтекании профиля

$$y(x) = \pm 0.06 \sqrt{1 - |2x - 1|^{2.8}} (1 - x^{5.5})^2, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.3)$$



Фиг. 6. Несимметричное обтекание профиля (4.1) с $n = 6$ при $M_\infty = 0.822$, $\alpha = 0$: изолинии числа Маха



Фиг. 7. Зависимость коэффициента подъемной силы $C_L(\alpha)$ для профиля (4.2): а, б – $M_\infty = 0.8215, 0.8242$; 1–3 – ветви, соответствующие разному количеству местных сверхзвуковых зон, прилегающих к верхней и нижней сторонам профиля, как показано на схемах обтекания

со слабо выраженным минимумом кривизны при $x \approx 0.5$ и максимумом при $x \approx 0.681$ (кривая 2 на фиг. 4). Для этого профиля существует сингулярное число Маха $M_{s1} \approx 0.7835$. Однако в отличие от случаев, рассмотренных выше, при возрастании M_∞ и переходе через M_{s1} происходит не слияние, а расщепление сверхзвуковой области на две зоны. При дальнейшем возрастании M_∞ вторая сверхзвуковая зона смещается вниз по течению, уменьшается в размерах и исчезает. Кроме M_{s1} существует сингулярное число $M_{s2} \approx 0.7755$ такого же характера, как и в случае профилей (1.1), (4.1), (4.2).

Заключение. Проведенные расчеты подтвердили сделанный в предыдущих исследованиях вывод о том, что при определенных условиях существуют неединственные решения задачи о стационарном трансзвуковом обтекании аэродинамического профиля, и уточнили механизм возникновения неединственности. Показано, что несимметричное обтекание симметричного профиля при $\alpha = 0$ и значениях M_∞ , близких к сингулярному числу M_s , устанавливается вследствие структурной неустойчивости течения по отношению к крайне малым возмущениям угла атаки и геометрии профиля. При

других M_∞ установление несимметричных режимов может происходить под действием возмущений конечной величины. Кроме неединственности, связанной с существованием при $\alpha = 0$ несимметричных течений, может наблюдаться неединственность симметричных картин обтекания в узком интервале чисел Маха в окрестности M_c из-за гистерезиса по M_∞ , сопровождающего реструктуризацию течения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ (грант № Е02-1.0-157). Авторы выражают признательность В. Mohammadi за предоставление программы NSC2KE.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kuz'min A.G.* Interaction of a shock wave with the sonic line // IUTAM Symp. Transsonicum IV. Dordrecht: Kluwer, 2003. P. 13–18.
2. *Иванова А.В.* Структурная неустойчивость невязкого трансзвукового течения в канале // Инж.-физ. журн. 2003. Т. 76. № 6. С. 58–60.
3. *Jameson A.* Airfoils admitting non-unique solutions of the Euler equations // AIAA Paper. 1991. № 91–1625. P. 1–13.
4. *McGrattan K.* Comparison of transonic flow models // AIAA Journal. 1992. V. 30. № 9. P. 2340–2343.
5. *Hafez M.M., Guo W.H.* Nonuniqueness of transonic flows // Acta Mech. 1999. V. 138. № 3/4. P. 177–184.
6. *Hafez M.M., Guo W.H.* Some anomalies of numerical simulation of shock waves. Pt I: Inviscid flows // Computers and Fluids. 1999. V. 28. № 4/5. P. 701–719.
7. *Caughey D.A.* Studies in unsteady transonic flow and aeroelasticity // IUTAM Symp. Transsonicum IV. Dordrecht: Kluwer, 2003. P. 41–46.
8. *Mohammadi B.* Fluid dynamics computation with NSC2KE: an user-guide, release 1.0. INRIA Techn. Report. 1994. RT-0164. 71 p.
9. *Turkel E., Van Leer B.* Flux vector splitting and Runge-Kutta methods for the Euler equations // Lect. Notes in Phys. 1985. V. 218. P. 566–570.
10. *Steger J.L., Warming R.F.* Flux vector splitting for the inviscid gas dynamics equations with application to finite-difference methods // J. Comp. Phys. 1983. V. 40. № 2. P. 263–293.

Минск
Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
23.I.2004