МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 2004

УДК 532.517.2

© 2004 г. А. И. МОШИНСКИЙ

ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ДИФФУЗИЯ ПРИ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ТОНКИХ ПЛЕНКАХ ПРИ НЕОДНОМЕРНОСТИ ПОЛЯ СКОРОСТИ И АНИЗОТРОПНОСТИ ТЕНЗОРА ДИФФУЗИИ

При описании переноса вещества в каналах широкое распространение получила теория дисперсии Тейлора [1, 2], позволяющая асимптотически обоснованно заменить полное уравнение диффузии (теплопроводности) с конвективным слагаемым, зависящим от поперечной потоку координаты, на осредненное по сечению канала уравнение эффективной диффузии (дисперсии) с постоянными коэффициентами. В последующих многочисленных работах теория Тейлора была перенесена на более сложные ситуации и предложены новые алгоритмы для построения уравнений дисперсии (см., например, [3–8]), где использованы оригинальные методы анализа дисперсии вещества). При течениях в тонких пленках аналогичная [1, 2] теория приводит к матрице коэффициентов дисперсии [9, 10].

В данной работе теория Тейлора переносится на течения жидкости в пленках при неодномерном поле скоростей и анизотропном тензоре диффузии. Эти характеристики также существенно зависят от пространственных координат и времени. Полученные уравнения дисперсии упрощены в областях резкого изменения тензора коэффициентов эффективной диффузии.

Ключевые слова: эквивалентная диффузия, анизотропность, тонкие пленки.

1. Постановка задачи. Рассмотрим распространение динамически пассивной примеси в потоке жидкости, ограниченном плоскостью $Z = 0$ и слабоискривленной поверхностью $Z = H(X, Y, \tau)$. Считаем область бесконечно протяженной по направлению осей X и Y, т.к. рассмотрение ограниченной по этим направлениям области со стандартными граничными условиями для дальнейшего изложения несущественно. Можно вместо плоскости $Z = 0$ также рассмотреть слабоискривленную поверхность, но подобное обобщение только усложнит запись некоторых формул, не внося в теорию принципиальных осложнений. Будем использовать терминологию массопереноса для конкретности изложения; ясно, что в силу аналогии переноса массы и тепла (энергии), полученные результаты непосредственно переносятся на задачи теплопроводности в движущейся среде.

Процесс распространения вещества в данной области описывается уравнением

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\mathbf{V}C) = \operatorname{div}(\mathbf{D}^*\operatorname{grad}C) \tag{1.1}$$

где C – концентрация примеси, τ – время, $\mathbf{V}(X, Y, \tau)$ – вектор скорости. Полагаем $\mathbf{V}$ известной величиной, что часто встречается в задачах массопереноса, тем более что примесь динамически пассивная, т.е. не оказывает влияния на движение несущей среды. Компоненты тензора $\mathbf{D}^*$ считаем известными функциями эйлеровых координат в декартовом базисе X, Y. Эти компоненты в общем случае могут зависеть от времени (последнее встречается в турбулентных потоках [11]). Они также подчинены требованиям неравновесной термодинамики [12], а именно симметрии $D^*_{ij} = D^*_{ji}$ (соотношения Онзагера) и положительной определенности: $D^*_{\mu\nu}\xi_\mu\xi_\nu > \kappa\xi_\mu\xi_\mu$ ($\kappa > 0$, $\boldsymbol{\xi}$ – произвольный ненулевой вектор), что связано с диссипативностью процесса и производством энтропии. Здесь и далее по повторяющемуся дважды греческому индексу подразумевается суммирование от одного до трех.

Одним из ограничений, принятых в цитированных и других работах по теории дисперсии, является описание диффузионных свойств среды изотропным тензором диффузии, который определяется одним коэффициентом диффузии, тогда как свойства среды могут быть анизотропными для диффузионного переноса, в частности при турбулентных течениях [13]. Классические жидкости с простой молекулярной структурой редко обнаруживают анизотропные свойства переноса тепла и массы при реализации ламинарного режима течения. Подобное поведение (анизотропность) присуще, например, дисперсным смесям ферромагнитных частиц, допускающим гомогенное описание при наличии электромагнитного поля, выделяющего некое направление в пространстве (оси вращения и миграции частиц). Интересным примером среды с анизотропной теплопроводностью являются жидкие кристаллы. В частности, при течении нематических жидких кристаллов свойства анизотропности определяются направлением специальной оси, так называемого директора [14]. Эволюция директора описывается дополнительным к уравнениям гидродинамики и энергии уравнением переноса и при определенных условиях гидродинамическую задачу и проблему нахождения поля директора можно решать независимо от задачи теплопроводности.

Несущую среду считаем несжимаемой, что приводит к уравнению

$$\operatorname{div}(\mathbf{V}) = 0 \tag{1.2}$$

Поле скоростей полагаем подчиненным условию равенства нулю нормальной составляющей к плоскости $Z = 0$ и условию на подвижной поверхности $Z = H(X, Y, \tau)$, заключающемуся в том, что скорость перемещения любой точки поверхности и скорость частицы жидкости, прилегающей к этой точке поверхности, должны иметь одинаковые проекции на нормаль к поверхности (кинематическое условие). В таком случае имеем [15]

$$Z = 0\colon V_z = 0, \quad Z = H(X, Y, \tau)\colon \frac{\partial H}{\partial \tau} + V_z\frac{\partial H}{\partial X} + V_y\frac{\partial H}{\partial Y} - V_z = 0 \tag{1.3}$$

Уравнение (1.1) дополняется граничными условиями и начальным условием

$$Z = 0\colon D^*_{z\nu}\frac{\partial C}{\partial X_\nu} = 0, \quad Z = H(X, Y, \tau)\colon n_\mu D^*_{\mu\nu}\frac{\partial C}{\partial X_\nu} = 0 \tag{1.4}$$

$$X, Y \to \pm\infty\colon C < \infty \tag{1.5}$$

где n_μ – компоненты вектора внешней нормали к поверхности $Z = H(X, Y, \tau)$. Граничные условия (1.4) выражают отсутствие потока вещества через поверхности $Z = 0$ и $Z = H(X, Y, \tau)$. Условие (1.5) не имеет принципиального значения для предлагаемого ниже анализа и может быть заменено каким-либо другим линейным соотношением на цилиндрической поверхности $J(X, Y) = 0$, ограничивающей область массопереноса.

$$\tau = 0\colon C = C_n(X, Y, Z) \tag{1.6}$$

2. Безразмерная форма задачи (1.1)–(1.6). В данной работе главной целью будет упрощение задачи (1.1)–(1.6). Основными дополнительными условиями являются (1.4). Далее будут указаны некоторые усложнения в постановке задачи (1.1)–(1.6), также по изложенной схеме допускающие упрощенную асимптотическую постановку.

В качестве масштаба переменных, меняющихся вдоль оси Z, возьмем характерный размер слоя H_*, а вдоль осей X и Y – характерный размер L_*. Специфика тонкого слоя такова, что величина $\varepsilon = H_*/L_*$ мала и это обстоятельство будет использовано при анализе.

В трехмерном пространстве при соответствующих условиях есть две возможности проводить осреднение поля концентраций либо по одной, либо по двум координатам в зависимости от отношения их масштабов. Ранее [16] рассматривался перенос вещества в призматическом канале и было проведено осреднение поперек его. Это привело к эквивалентному уравнению диффузии (теплопроводности) с одной независимой пространственной координатой с эффективным коэффициентом диффузии. Здесь будет проанализирована задача, связанная с асимптотическим осреднением по одной координате (поперек слоя), в результате чего придем к двумерному по пространственным координатам уравнению диффузии с эффективным тензором диффузии.

Введем операцию осреднения некоторой функции F

$$\langle F(x, y, t)\rangle = \int_0^1 F(x, y, z, t)dz \tag{2.1}$$

Перейдем к безразмерным координатам и времени

$$x_1 = x = \frac{X}{L_*}, \quad x_2 = y = \frac{Y}{L_*}, \quad x_3 = z = \frac{Z}{H_*}, \quad t = \tau\frac{D_*}{L_*^2}, \quad \varepsilon = \frac{H_*}{L_*} \tag{2.2}$$

(D_* – характерный масштаб тензора диффузии $\mathbf{D}^*$). Для вывода уравнений эффективной диффузии введем пульсационные скорости $U_j = V_j - \langle V_j\rangle$ ($j = 1, 2$) вдоль координат x, y и $U_z = U_3 = V_z$ вдоль z. Запишем уравнение неразрывности (1.2) и уравнение переноса (1.1) в безразмерной форме

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\mu} + \varepsilon\frac{\partial\langle v_j\rangle}{\partial x_j} = 0 \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered}\varepsilon^2\left[\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_{ij}\frac{\partial C}{\partial x_j}\right) - \mathrm{Pe}\langle v_j\rangle\frac{\partial C}{\partial x_j}\right] + \\ + \varepsilon\left\{\mathrm{Pe}u_\mu\frac{\partial C}{\partial x_\mu} - \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(D_{iz}\frac{\partial C}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_{iz}\frac{\partial C}{\partial z}\right)\right]\right\} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D_{zz}\frac{\partial C}{\partial z}\right)\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered}\langle v_x\rangle = \frac{\langle V_x\rangle}{U_*}, \quad \langle v_y\rangle = \frac{\langle V_y\rangle}{U_*}, \quad u_x = \frac{U_x}{V_*}, \quad u_y = \frac{U_y}{V_*}, \\ u_z = \frac{U_z}{U_*}, \quad D_{\mu\nu} = \frac{D^*_{\mu\nu}}{D_*}, \quad \mathrm{Pe} = \frac{H_*V_*}{D_*} = \frac{L_*U_*}{D_*}\end{gathered} \tag{2.5}$$

где V_* – масштаб скорости вдоль осей X и Y, который связан с масштабом U_* скорости по оси Z соотношением $V_*/L_* = U_*/H_*$, вытекающим из уравнения неразрывности. Число Пекле Pe считаем имеющим порядок единицы. Здесь и далее по повторяющемуся дважды латинскому индексу подразумевается суммирование от одного до двух. Даже когда нет суммирования, будем стремиться использовать греческий индекс, когда целесообразно менять его от одного до трех и латинский – от одного до двух. Особенно выделим индекс z к координате z – по нему нет суммирования.

При записи уравнений (2.3) и (2.4) полагаем, что масштабом средних скоростей $\langle V_j\rangle$ служит величина U_*, т.е. значения рассматриваемых средних скоростей заметно меньше "пульсационных" U_j при $\varepsilon \to 0$. На формирование тензора эффективной диффузии в рассматриваемой задаче окажут влияние только компоненты пульсационной скорости $U_j (j = 1, 2)$, поэтому выделять среднюю скорость по оси z (по z далее будет проведено осреднение) нет необходимости. В окончательный результат (см. ниже (3.6)) войдут только $\langle v_x \rangle$ и $\langle v_y \rangle$. В каналах традиционно [1, 7] среднюю скорость течения исключают переходом в движущуюся с этой скоростью систему координат. В пленочных течениях проекция вектора средней скорости на плоскость x, y может менять направление, поэтому такой прием приводит к некоторым неудобствам.

Предложенный выбор масштаба скоростей обусловлен как опытом построения уравнений эффективной диффузии [1, 2], так и общими соображениями построения диффузионных уравнений из интегрального уравнения Колмогорова [17, 18], когда безразмерный средний квадрат пульсационной составляющей перемещения (коэффициент диффузии) по порядку величины совпадает с безразмерным средним смещением (коэффициент сноса) диффундирующей частицы.

Так как H – медленно меняющаяся функция, в безразмерных координатах имеем $H = H_*[1 + \varepsilon h(x, y, t)]$, где $h = O(1)$. Используя это и соотношения (2.2), (2.5), запишем граничные условия (1.3), (1.4) в безразмерном виде

$$z = 0\colon u_z = 0, \quad z = 1 + \varepsilon h(x, y, t)\colon \varepsilon\left[\varepsilon\left(\frac{1}{\mathrm{Pe}}\frac{\partial h}{\partial t} + \langle v_i \rangle \frac{\partial h}{\partial x_i}\right) + u_i \frac{\partial h}{\partial x_i}\right] - u_z = 0 \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} &z = 0\colon D_{zz}\frac{\partial C}{\partial z} + \varepsilon D_{iz}\frac{\partial C}{\partial x_i} = 0 \\ &z = 1 + \varepsilon h(x, y, t)\colon D_{zz}\frac{\partial C}{\partial z} + \varepsilon D_{iz}\frac{\partial C}{\partial x_i} - \varepsilon D_{iz}\frac{\partial h}{\partial x_i}\frac{\partial C}{\partial z} - \varepsilon^2 \frac{\partial h}{\partial x_i} D_{ij}\frac{\partial C}{\partial x_j} = 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

При выводе второго соотношения (2.7) использовано представление вектора единичной нормали к поверхности $z = 1 + \varepsilon h(x, y, t)$ в виде

$$n_x = -\varepsilon\lambda \partial h/\partial x, \quad n_y = -\varepsilon\lambda \partial h/\partial y, \quad n_z = \lambda, \quad \lambda = \{1 + \varepsilon^2[(\partial h/\partial x)^2 + (\partial h/\partial y)^2]\}^{-1/2}$$

В силу однородности условия (1.4) параметр λ выпал из выражения (2.7).

В рамках рассматриваемых ниже приближений по малому параметру ε, для формулировки уравнения эффективной диффузии будет достаточно главного приближения уравнения неразрывности (2.3) и граничного условия (2.6). Главную роль играют граничные условия диффузионной задачи (2.7).

Масштаб времени в (2.4) выбран в соответствии с тем, что будет выводится уравнение эффективной диффузии только с двумя пространственными координатами x и y, поэтому формула для t вполне естественна. Условия (1.5), (1.6) сохраняют свою форму в безразмерных переменных (2.2).

3. Построение асимптотического разложения. При распространении вещества в тонком слое $\varepsilon \ll 1$, поэтому решение задачи (2.4), (1.5), (1.6), (2.7) ищем в виде разложения [19]

$$C = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j C_j(x, y, z, t) \tag{3.1}$$

Подставляя (3.1) в (2.4) и (2.7), получаем после группировки слагаемых одинакового порядка по ε последовательность задач

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial z}\left(D_{zz}\frac{\partial C_0}{\partial z}\right) = 0, \quad z = 0;\, 1\colon D_{zz}\frac{\partial C_0}{\partial z} = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial z}\left(D_{zz}\frac{\partial C_1}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_{iz}\frac{\partial C_0}{\partial x_i}\right) = \mathrm{Pe}\, u_\mu \frac{\partial C_0}{\partial x_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_{iz}\frac{\partial C_0}{\partial z}\right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$z = 0: \left(D_{zz}\frac{\partial C_1}{\partial z} + D_{iz}\frac{\partial C_0}{\partial x_i}\right) = 0$$

$$z = 1: \left[D_{zz}\frac{\partial C_1}{\partial z} + D_{iz}\frac{\partial C_0}{\partial x_i} - D_{iz}\frac{\partial h}{\partial x_i}\frac{\partial C_0}{\partial z} + h\frac{\partial}{\partial z}\left(D_{zz}\frac{\partial C_0}{\partial z}\right)\right] = 0 \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(D_{zz}\frac{\partial C_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_{iz}\frac{\partial C_1}{\partial x_i}\right) = \mathrm{Pe}u_\mu\frac{\partial C_1}{\partial x_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_{iz}\frac{\partial C_1}{\partial z}\right) + \frac{\partial C_0}{\partial t} +$$

$$+ \mathrm{Pe}\langle v_j\rangle\frac{\partial C_0}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_{ij}\frac{\partial C_0}{\partial x_j}\right)$$

$$z = 0: \left(D_{zz}\frac{\partial C_2}{\partial z} + D_{iz}\frac{\partial C_1}{\partial x_i}\right) = 0$$

$$z = 1: \left[D_{zz}\frac{\partial C_2}{\partial z} + D_{iz}\frac{\partial C_1}{\partial x_i} - D_{iz}\frac{\partial h}{\partial x_i}\frac{\partial C_1}{\partial z} + h\frac{\partial}{\partial z}\left(D_{iz}\frac{\partial C_0}{\partial x_i}\right) - \right. \tag{3.4}$$

$$\left. - h\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}D_{iz}\frac{\partial C_0}{\partial z}\right) + h\frac{\partial}{\partial z}\left(D_{zz}\frac{\partial C_1}{\partial z}\right) - \frac{\partial h}{\partial x_i}D_{ij}\frac{\partial C_0}{\partial x_j} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(D_{zz}\frac{\partial C_0}{\partial z}\right)\right]$$

и т.д. Выписаны только необходимые для построения главного приближения уравнения.

Интегрирование уравнения (3.2) при учете граничных условий и неравенства $D_{zz} > 0$ приводит к выводу о независимости переменной C_0 от координаты z. Обозначим $C_0 =$ $= G(x, y, t)$. С учетом этого и граничных условий (3.3) проинтегрируем уравнение (3.3), получим

$$C_1 = C_1^0(x, y, t) - \frac{\partial G}{\partial x_i}\int_0^z dz\frac{D_{iz}}{D_{zz}} + \mathrm{Pe}\frac{\partial G}{\partial x_i}\int_0^z \frac{d\zeta}{D_{zz}}\int_0^\zeta U_i(x, y, \eta, t)d\eta \tag{3.5}$$

где $C_1^0(x, y, t)$ – некоторая не определенная в рамках данного приближения функция указанных переменных. Можно проверить, что функция C_1 (3.5) удовлетворяет граничному условию (3.3) при $z = 1$, для чего необходимо привлечь уравнение неразрывности (2.3) при $\varepsilon \to 0$.

Для вывода уравнения дисперсии проинтегрируем по z в пределах (0, 1) (усредним) уравнение (3.4). После выкладок, учитывающих граничные условия (3.4), уравнение неразрывности (2.3) при $\varepsilon \to 0$ и соотношение (3.5), приходим к уравнению

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \mathrm{Pe}\langle v_j\rangle\frac{\partial G}{\partial x_j} + \frac{\partial G}{\partial x_j}\left(\mathrm{Pe}hu_j - \frac{\partial h}{\partial x_i}D_{ij}^0\right)\Bigg|_{z=1} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left([D_{ij}^0 + \mathrm{Pe}^2D_{ij}^1]\frac{\partial G}{\partial x_j}\right) \tag{3.6}$$

$$D_{ij}^0 = \left\langle\frac{D_{ij}D_{zz} - D_{zj}D_{iz}}{D_{zz}}\right\rangle, \quad D_{ij}^1 = \left\langle\frac{\Phi_i\Phi_j}{D_{zz}}\right\rangle, \quad \Phi_i = \int_0^z U_i(x, y, z, t)dz \tag{3.7}$$

В (3.6), чтобы отметить родственное происхождение с тензором D_{ij}^0, величину D_{ij} – $D_{zj}D_{iz}/D_{zz}$ при $z = 1$ условно обозначили как $D_{ij}^0(z = 1)$. Для тензора D_{ij}^1 можно получить также выражение

$$D_{ij}^1 = -\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1|F(z) - F(\zeta)|U_i(z)U_j(\zeta)dzd\zeta, \quad F(\zeta) = \int_0^\zeta\frac{dz}{D_{zz}(x, y, z, t)} \tag{3.8}$$

где для краткости у функций F и U_j под знаком интеграла в качестве аргументов оставлены только переменные интегрирования (поперечная слою координата).

В уравнение (3.6) входят два тензора эффективной диффузии D^0_{ij} и D^1_{ij}. Первый встречался в задаче теплопроводности для слоя [20]. Фактически результирующее уравнение [20] получается из (3.6) при Pe = 0 (отсутствие течения) и $h = 0$ (как в [20]). Матрица тензора D^0_{ij} положительно определена и симметрична $D^0_{ij} = D^0_{ji}$ [20], т.е. тензор D^0_{ij} можно рассматривать как тензор диффузии.

Второй тензор эффективной диффузии D^1_{ij} аналогичен рассмотренному в [10], где коэффициент диффузии принимался постоянным, однако исследование проводилось в слое, образованном координатными поверхностями ортогональной системы координат общего вида. Тензор D^1_{ij} является обобщением тейлоровского коэффициента дисперсии [1, 2] на более высокую тензорную размерность. Из (3.7), (3.8) видно, что в его определении присутствуют как характеристика поля скорости (пульсационная скорость U_j), так и диагональная компонента D_{zz} тензора диффузии, относящаяся к поперечной слою координате. Как и тензор, D^0_{ij} данный тензор имеет положительно определенную квадратную матрицу. Неотрицательность диагональных членов D^1_{ij} очевидна из (3.7), поскольку $D_{zz} > 0$. Возможно обращение в нуль отдельных компонент тензора D^1_{ij} (см. разд. 4). Неотрицательность определителя матрицы D^1_{ij}

$$D^1_{xx}D^1_{yy} - (D^1_{xy})^2 = \left\langle\left(\frac{\Phi_x}{D^{1/2}_{zz}}\right)^2\right\rangle\left\langle\left(\frac{\Phi_y}{D^{1/2}_{zz}}\right)^2\right\rangle - \left\langle\frac{\Phi_x\Phi_y}{D_{zz}}\right\rangle^2 \geq 0$$

в соответствии с определением среднего значения (2.1) есть не что иное, как интегральное неравенство Коши–Буняковского [21]. Таким образом, матрица D^1_{ij}, как и D^0_{ij}, удовлетворяет требованиям неравновесной термодинамики [12] и может служить матрицей диффузии. Сумма $D^s_{ij} = D^0_{ij} + \mathrm{Pe}^2 D^1_{ij}$ образует симметричную, положительно определенную матрицу, так как матрицы D^0_{ij} и D^1_{ij} можно одновременно привести к диагональным матрицам [21], при этом диагональные элементы D^s_{ij} будут положительными, а значит, данная матрица положительно определена.

В отличие от задач [10, 20], где граничными поверхностями слоя являются координатные поверхности, отклонение от координатной поверхности $z = 1$ приводит к новому эффекту – появлению дополнительного конвективного слагаемого

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x_j}\left(\mathrm{Pe}\,hu_j - D^0_{ij}\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)\right|_{z=1}$$

в уравнении дисперсии (3.6). Его образуют при $z = 1$ два независимых источника: гидродинамический $\mathrm{Pe}\,hu_j$ и диффузионный $D^0_{ij}\,\partial h/\partial x_i$.

Начальное условие для уравнения (3.6) можно получить аналогично [10, 16] путем построения разложения с "растянутым" временем t/ε^2 и сращиванием с решением уравнения (3.6). На необходимость подобной процедуры указывает отсутствие производных по времени от искомых функций в уравнениях (3.2)–(3.4). Окончательная формула имеет вид

$$t = 0: G = \langle C_n(x, y) \rangle \tag{3.9}$$

т.е. соответствует осреднению условия (1.6) в безразмерных координатах (2.2).

При решении нелинейных проблем физики и механики (в частности, гидродинамики) нередко прибегают к аппроксимации искомых функций отрезками ряда Фурье [22] с удержанием в выражениях определенного числа гармоник. В рассматриваемой задаче, когда поле скоростей предполагается известным, подобная (ограниченная) информация о нем позволит получить соответствующее приближение для эффективных диффузионных характеристик переноса в данном поле скорости. Структура зависимостей (3.7) предполагает в качестве весовой функции в рядах Фурье использовать величину $1/D_{zz}$. Однако чаще всего применяют ряды по синусам и косинусам, поэтому в иллюстративных целях ограничимся случаем $D_{zz} = \text{const} = 1$, а поле скоростей возьмем разложенным в ряд Фурье вида

$$U_j = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{jk}\cos(\pi kz), \quad \alpha_{jk} = 2\int_0^1 U_j(x, y, z, t)\cos(\pi kz)dz; \; j = 1, 2; \; k = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.10}$$

где в силу выбора пульсационной составляющей скорости U_j постоянная составляющая (отвечающая $k = 0$ в (3.10)) отсутствует. Коэффициенты Фурье тензора $D_{\mu\nu}$ будем обозначать так:

$$\lambda_{\mu\nu}^0 = \int_0^1 D_{\mu\nu}dz, \quad \lambda_{\mu\nu}^k = 2\int_0^1 D_{\mu\nu}\cos(\pi kz)dz; \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.11}$$

Подстановка (3.10), (3.11) в (3.7) приводит к выражениям

$$D_{ij}^0 = \lambda_{ij}^0 - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{iz}^k \lambda_{jz}^k, \quad D_{ij}^1 = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{iz}\alpha_{jz}}{k^2}; \; (i, j = 1, 2) \tag{3.12}$$

На основе (3.12) можно получить и выражение для полного тензора эффективной диффузии D_{ij}^s.

4. Предельная форма уравнения (3.6) при больших значениях Pe. Уже в первых работах [1–3] по теории дисперсии было отмечено, что обычно конвективная часть коэффициента дисперсии заметно превышает молекулярную составляющую в сумме типа $D_{ij}^0 + \text{Pe}^2 D_{ij}^1$ (в [3] приведена формула, где тензоры типа D_{ij}^0, D_{ij}^1 кратны единичному). Но если при постоянных значениях компонент D_{ij}^0 и D_{ij}^1 можно просто не учитывать значение D_{ij}^0 как малое по сравнению с $\text{Pe}^2 D_{ij}^1$, то в случае переменности этих величин может возникнуть необходимость учета D_{ij}^0, по крайней мере в некоторых областях пространства. Дело в том, что на отдельных линиях в плоскости x, y функции U_j (хотя бы одна) могут обращаться в нуль при любых значениях z. Как следствие этого в нуль обратятся и функции Φ_j, а значит, и отдельные компоненты тензора D_{ij}^1. Возможны и другие варианты, когда некоторые компоненты тензора D_{ij}^1 обращаются в нуль. В таком случае эффективный диффузионный перенос будет происходить только за счет тензора D^0_{ij}. Это означает, что в некоторой окрестности линий, где $U_j = 0$ при достаточно больших значениях Pe можно использовать локальное (погранслойное) описание, выделив главную часть тензора D^1_{ij} как функцию нормальной к отмеченной линии координаты. Для простоты иллюстрации примем, что одна из компонент $U_j = 0$ на координатной линии x, т.е. $U_y = 0$ при $y = 0$. Если данная линия жидкая, т.е. представляет собой границу раздела циркуляционных зон, каверн и т.п., типа ячеек Бенара, Тейлора [23] или зон постоянной завихренности [24], то функция U_y имеет на данной линии нуль первого порядка. При этом, как следует из (3.7), (3.8), компонента тензора D^1_{yy} имеет нуль второго порядка по y и в общем случае, когда на рассматриваемой линии $\mathbf{U} \neq \mathbf{0}$, компонента D^1_{xy} ($D^1_{xy} = D^1_{yx}$) имеет нуль первого порядка, а D^1_{xx} в нуль при $y = 0$ не обращается. Таким образом, главные слагаемые в окрестности линии $y = 0$ имеют вид $D^1_{yy} = K_{yy}(x, t)y^2$, $D^1_{xy} = K_{xy}(x, t)y$, $D^1_{xx} = K_{xx}(x, t)$, где K_{ij} – известные функции координаты x и времени. Введем следующие деформированные координаты:

$$\zeta = \mathrm{Pe}y, \quad \theta = t\mathrm{Pe}^2 \tag{4.1}$$

Подставив (4.1) в (3.6) и выполнив предельный переход Pe $\to \infty$, приходим к уравнению эффективной диффузии в приближении пограничного слоя

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial \theta} + \langle v_y \rangle \frac{\partial G}{\partial \zeta} + hu_y \frac{\partial G}{\partial \zeta}\bigg|_{z=1} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx}(x, \theta)\frac{\partial G}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xy}(x, \theta)\zeta\frac{\partial G}{\partial \zeta}\right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(K_{xy}(x, \theta)\zeta\frac{\partial G}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left([D^0_{yy}(x, 0, \theta) + K_{yy}(x, \theta)\zeta^2]\frac{\partial G}{\partial \zeta}\right)\end{aligned} \tag{4.2}$$

В общем случае, когда коэффициенты (4.2) зависят от x и t, вряд ли возможно найти аналитическое решение (4.2). В частных случаях при постоянных параметрах (4.2) допускает применение преобразования Лапласа по θ и Фурье по x. Результирующее уравнение сводится к известному уравнению для функций Лежандра.

При достаточно больших значениях числа Pe компоненты суммарного тензора D^s_{ij} ведут себя нерегулярным образом. В основной части пространства они являются слабоменяющимися функциями координат, тогда как в области, где компоненты D^1_{ij} близки к нулю, соответствующие компоненты D^s_{ij} резко уменьшаются по величине. Это приводит к тому, что линии, где D^1_{ij} обращаются в нуль, делят область массообмена на части (ячейки), причем внутри ячейки скорость обмена веществом между ее частями значительно выше, чем скорость обмена между ячейками.

Полученные уравнения позволят, при определенных условиях, вывести уравнения ячеечной модели для областей (ячеек) на которые естественным образом разбивается пространство.

5. Обобщение уравнения эффективной диффузии. Предложенный вывод уравнения эффективной диффузии (теплопроводности) естественным образом обобщается на наличие источников массы (тепла) в объеме слоя и притока массы (тепла) через его граничные поверхности. Если величины этих источников в безразмерных переменных (2.2), имеют порядок ε^2, то в правую часть уравнения (2.4) войдет слагаемое – $\varepsilon^2 W(C, x, y, z)$, а граничные условия (2.7) примут вид

$$z = 0: D_{zz}\frac{\partial C}{\partial z} + \varepsilon D_{iz}\frac{\partial C}{\partial x_i} + \varepsilon^2 W_0(C, x, y) = 0$$

$$z = 1 + \varepsilon h(x, y, t): D_{zz}\frac{\partial C}{\partial z} + \varepsilon D_{iz}\frac{\partial C}{\partial x_i} - \varepsilon D_{iz}\frac{\partial h}{\partial x_i}\frac{\partial C}{\partial z} - \varepsilon^2\frac{\partial h}{\partial x_i}D_{ij}\frac{\partial C}{\partial x_j} = \varepsilon^2 W_1(C, x, y)$$

Тогда уравнение эффективной диффузии (теплопроводности) заменится уравнением (можно также учесть и влияние вдува массы через границы [16])

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \mathrm{Pe}\langle v_j\rangle\frac{\partial G}{\partial x_j} + \frac{\partial G}{\partial x_j}\left(\mathrm{Pe}hu_j - \frac{\partial h}{\partial x_i}D_{ij}^0\right)\bigg|_{z=1} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_{ij}^s\frac{\partial G}{\partial x_j}\right) - \\ - \langle W(G, x, y)\rangle - W_0(G, x, y) - W_1(G, x, y) \qquad (5.1)$$

с той же матрицей коэффициентов эффективной диффузии D_{ij}^s (температуропроводности), что и найдено ранее. Осредненный источник массы (тепла) W будет зависеть только от функции G и координат x, y. Эти аргументы и оставлены в функции источника массы (тепла) в приведенном уравнении. Начальным условием к (5.1) служит (3.9).

По ходу построения новых уравнений просматривается иерархический набор моделей. Наиболее сложная модель, дающая самое детальное описание процесса массообмена – это исходное уравнение (2.4). Далее при достаточно больших значениях времени получаем модель эффективной диффузии (3.6), которая по отношению к исходной носит асимптотический характер (на частных точных решениях в [25, 26] показано, что модель Тейлора [1–4] асимптотически вытекает из исходного уравнения конвективной диффузии). Можно сказать, что (3.6) – своеобразное асимптотически обоснованное осреднение (2.4). При этом коэффициенты (3.6) представляют собой величины, в которых выражено в совокупности влияние диффузионных и гидродинамических явлений.

Заключение. Предложено асимптотически обоснованное при $\varepsilon \to 0$ сведение полного уравнения переноса вещества к уравнению для средней по сечению пленки концентрации примеси (3.6). В исходном уравнении основные параметры – вектор скорости **V** и анизотропный тензор диффузии **D*** в общем случае функции трех пространственных координат, тогда как в эффективное уравнение диффузии (3.6) входит тензор коэффициентов дисперсии D_{ij}^s, зависящий только от двух координат вдоль слоя. В качестве области конвективного переноса массы (тепла) взята тонкая пленка жидкости со слабо меняющейся толщиной. Для определения тензора коэффициентов эффективной диффузии D_{ij}^s предложены зависимости (3.7), (3.8), (3.12). Начальное условие (3.9) для уравнения (3.6) получается осреднением по толщине пленки начального условия исходной задачи. Получено уравнение эффективной диффузии в приближении пограничного слоя в окрестности поверхностей с резким изменением тензора коэффициентов эффективной диффузии (4.2). Отмечена возможность обобщения уравнения (3.6) на случай наличия источников массы (тепла) как в объеме, так и на границах пленки. В результате в общем случае получается нелинейное уравнение эффективной диффузии (теплопроводности) (5.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Taylor G.* Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1953. V. 219. № 1137. P. 186–203.

2. *Taylor G.* Condition under which dispersion of a solute in stream of solvent can be used to measure molecular diffusion // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1954. V. 225. № 1163. P. 473–477.
3. *Aris R.* On the dispersion of a solute in a fluid flowing through a tube // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1956. V. 235. № 1200. P. 67–77.
4. *Фикс В.Б.* О влиянии конвекции на диффузию // Журн. техн. физики. 1957. Т. 27. № 6. С. 1282–1288.
5. *Gill W.N., Sankarasubramanian R.* Exact analysis of unsteady convective diffusion // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1970. V. 316. № 1526. P. 341–350.
6. *Марон В.И.* Распространение примеси в ламинарном потоке в круглой трубе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 3. С. 97–103.
7. *Дильман В.В., Кронберг А.Е.* О продольной дисперсии при ламинарном движении жидкости в круглой трубе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 1. С. 81–86.
8. *Smith R.* Longitudinal dispersion coefficients for varying channels // J. Fluid Mech. 1983. V. 130. P. 299–314.
9. *Smith R.* Shear dispersion along a rotating axle in a closely fitting shaft // J. Fluid Mech. 1990. V. 219. P. 647–658.
10. *Мошинский А.И.* Дисперсия примеси в неодномерных потоках // ПМТФ. 1990. № 4. С. 104–111.
11. *Луговцов Б.А.* О движении турбулентного вихревого кольца и переносе им пассивной примеси // Некоторые проблемы математики и механики. Л.: Наука, 1970. С. 182–189.
12. *Де Грот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.
13. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч. 1. М.: Наука, 1965. 639 с.
14. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 246 с.
15. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.
16. *Мошинский А.И.* Асимптотическая форма уравнения переноса примеси при течении в каналах в случае анизотропного тензора диффузии // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 2. С. 110–123.
17. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. М.: Наука, 1986. 526 с.
18. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М.: Физматгиз, 1961. 406 с.
19. *Коул Дж.Д.* Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.
20. *Мошинский А.И.* Предельная форма уравнения анизотропной теплопроводности в слое // Инж.-физ. журн. 1999. Т. 72. № 5. С. 855–861.
21. *Гельфанд И.М.* Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1966. 280 с.
22. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Наука, 1992. 540 с.
23. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
24. *Batchelor G.K.* On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number // J. Fluid Mech. 1956. V. 1. Pt 2. P. 177–190.
25. *Уфлянд Я.С.* Точное решение задачи нестационарной конвективной диффузии в цилиндре // Журн. техн. физики. 1987. Т. 57. № 2. С. 398–400.
26. *Уфлянд Я.С.* Точное решение задачи нестационарного конвективного теплообмена в плоском канале // Инж.-физ. журн. 1988. Т. 54. № 6. С. 1006–1009.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
25.XII.2002