

УДК 532.517.013.4

© 2004 г. В. К. АНДРЕЕВ, В. Б. БЕКЕЖАНОВА

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ В МОДЕЛИ МИКРОКОНВЕКЦИИ

Методом малых возмущений исследована устойчивость стационарного течения в модели микроконвекции в вертикальной щели. Возникающая здесь спектральная задача не является самосопряженной. Установлена устойчивость течения относительно длинноволновых возмущений. Показано, что при малом параметре Буссинеска спектр этой задачи аппроксимирует спектры соответствующих задач для вязкой теплопроводной жидкости или тепловой гравитационной конвекции, когда число Рэлея конечно. Численные расчеты позволяют сделать вывод о том, что в модели микроконвекции неустойчивость наступает при меньших волновых числах.

*Ключевые слова:* микроконвекция, течение, устойчивость, нейтральная кривая.

**1. Основное стационарное движение.** Одна из основных моделей изотермического движения жидкости – модель Обербека – Буссинеска (см. [1] и литературу, указанную в ней). Если  $\eta = gl_*^3 / \nu\chi < 1$ , где  $l_*$  – характерный размер,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $\nu > 0$ ,  $\chi > 0$  – кинематическая вязкость и температуропроводность жидкости, то упомянутая модель не является адекватной реальности. Для описания конвективных движений, возникающих под действием микроускорений или в микромасштабах (параметр  $\eta$  имеет порядок единицы) в [2] была предложена другая модель изотермически несжимаемой жидкости с уравнением состояния

$$\rho = \rho_1(1 + \beta\theta)^{-1} \quad (1.1)$$

где  $\rho_1, \beta$  – положительные постоянные. Если  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ,  $p(\mathbf{x}, t)$  – истинные вектор скорости и давление в жидкости, то замена [2]

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \beta\chi\nabla\theta, \quad q = \rho_1^{-1}(p - \lambda\operatorname{div}\mathbf{u}) - \beta(\nu - \chi)\chi\Delta\theta \quad (1.2)$$

где  $\lambda$  – коэффициент второй вязкости, приводит к системе уравнений [2]

$$\operatorname{div}\mathbf{w} = 0 \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_t + \mathbf{w}\nabla\mathbf{w} + \beta\chi(\nabla\theta\nabla\mathbf{w} - \nabla\mathbf{w}\nabla\theta) + \beta^2\chi^2(\Delta\theta\nabla\theta - \nabla|\nabla\theta|^2/2) = \\ = (1 + \beta\theta)(-\nabla q + \nu\Delta\mathbf{w}) + \mathbf{g} \end{aligned} \quad (1.4)$$

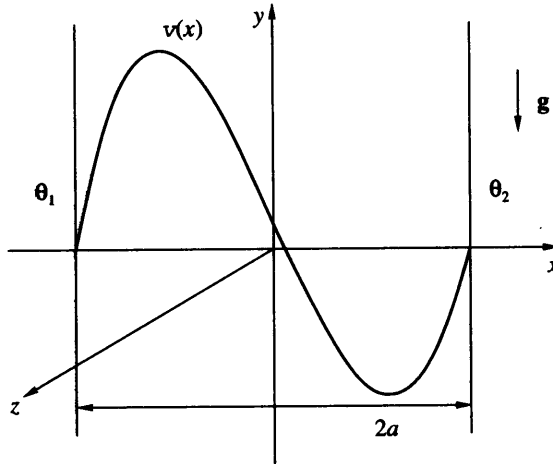
$$\theta_t + \mathbf{w}\nabla\theta + \beta\chi|\nabla\theta|^2 = (1 + \beta\theta)\chi\Delta\theta$$

Уравнение импульса (1.4) можно записать в иной форме. Действительно,

$$\nabla\theta\nabla\mathbf{w} - \nabla\mathbf{w}\nabla\theta = \nabla\theta\nabla\mathbf{w} - \nabla\theta(\nabla\mathbf{w})^* = \operatorname{rot}\mathbf{w} \times \nabla\theta$$

Далее  $\nabla|\nabla\theta|^2/2 = \nabla\theta\nabla(\nabla\theta)$ , поэтому

$$\Delta\theta\nabla\theta - \nabla|\nabla\theta|^2/2 = \left[ \operatorname{div}(\nabla\theta)\mathbf{I} - \frac{\partial(\nabla\theta)}{\partial(\mathbf{x})} \right] \nabla\theta = \operatorname{div}[\nabla\theta \otimes \nabla\theta - |\nabla\theta|^2\mathbf{I}]$$



Фиг. 1. Схема течения:  $\theta_1, \theta_2$  – температура на стенках  $x = -a$  и  $x = a$  соответственно,  $v(x)$  – профиль вертикальной скорости. Вектор  $\mathbf{g}$  имеет координаты  $(0, -g, 0)$

где  $\mathbf{I}$  – единичный тензор,  $\otimes$  – тензорное произведение. С учетом этих формул (1.4) переписывается так:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_t + \mathbf{w} \nabla \mathbf{w} + \beta \chi \operatorname{rot} \mathbf{w} \times \nabla \theta + \beta^2 \chi^2 \operatorname{div} [\nabla \theta \otimes \nabla \theta - |\nabla \theta|^2 \mathbf{I}] = \\ = (1 + \beta \theta)(-\nabla q + \nu \Delta \mathbf{w}) + \mathbf{g} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Система (1.3) – (1.5) обычно называется моделью микроконвекции, а  $\eta$  – параметром микроконвекции.

Будем рассматривать решение системы (1.3) – (1.5) в вертикальном слое  $-a < x < a$ ,  $-\infty < y < \infty$ ,  $-\infty < z < \infty$  с твердыми стенками  $x = \pm a$ . Тогда граничные условия запишутся в виде

$$\mathbf{w} + \beta \chi \nabla \theta = 0, \quad \theta = \theta_{cm}(\mathbf{x}, t) \quad (1.6)$$

Первое условие есть условие прилипания  $\mathbf{u} = 0$  на неподвижной твердой стенке. Второе – задает температуру на стенках. Полагаем, что стенки  $x = -a$  и  $x = a$  нагреты до температур  $\theta_1$  и  $\theta_2$  соответственно. Не ограничивая общности, считаем  $\theta_1 > \theta_2$ .

Стационарное решение поставленной задачи ищем в виде

$$\mathbf{w} = (u_0, v(x), 0), \quad \theta = \theta_0 - u_0 x / \beta \chi, \quad q = (\varphi - g)y \quad (1.7)$$

$$u_0 = \beta \chi (\theta_1 - \theta_2) / 2a, \quad \theta_0 = (\theta_1 + \theta_2) / 2 \quad (1.8)$$

где  $u_0, \theta_0, \varphi$  – постоянные ( $l_* = a$ ). Имея в виду интерпретацию решения (1.7), как приближенно описывающего конвекцию в центральной части конечной, но достаточно длинной по сравнению с шириной  $2a$  замкнутой полости, наложим на это решение условие нулевого массового расхода жидкости через любое поперечное сечение полости  $y = \text{const}$ . На основании (1.1) данное условие запишется в виде

$$\int_{-a}^a \frac{v(x)}{1 + \beta \theta(x)} dx = 0 \quad (1.9)$$

Для (1.7) истинный вектор скорости  $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \beta\chi\nabla\theta = (0, v(x), 0)$ , т. е. движение происходит вдоль оси  $y$ . Решение (1.7) также можно интерпретировать как стационарное течение в вертикальной щели при заданных одинаковых потоках тепла на твердых стенках:  $\theta_x = -u_0/\beta\chi \equiv -d/k$ ,  $k$  – коэффициент теплопроводности,  $d$  – поток тепла; отсюда  $u_0 = \beta\chi d/k$ .

Итак, происходит конвективная циркуляция – жидкость поднимается у нагретой стенки  $x = -a$  и опускается у холодной  $x = a$ . Течение состоит из двух встречных конвективных потоков; температура изменяется по закону

$$\theta = \theta_0 - \theta_* x/a, \quad \theta_* = (\theta_1 - \theta_2)/2 \quad (1.10)$$

Подстановка формул (1.7) в уравнения (1.3) – (1.5) приводит к представлению функции  $v(x)$  [3]

$$v = \frac{1}{\nu} \left\{ (\varphi - g) \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 + \frac{g\chi^2}{u_0^2} (1 + \beta\theta) [\ln(1 + \beta\theta) - 1] \right\}$$

где постоянные  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\varphi$  определяются из условий прилипания и замкнутости потока (1.9), рис. 1.

В дальнейшем будем проводить сравнение с результатами, полученными для модели Обербека – Буссинеска в такой же ситуации [4, стр. 301, 302]. Там положено  $\theta_2 = -\theta_1$ , так что  $\theta_0 = 0$ , а  $\theta_* = \theta_1$ . Поэтому ниже  $\theta = -\theta_* x/a = -\theta_1 x/a$ .

Возьмем в качестве безразмерной скорости  $\chi/a$  и обозначим через  $\varepsilon = \beta\theta_* = \beta\theta_1$  – параметр Буссинеска. После некоторых вычислений получим ( $x \leftrightarrow x/a$  – безразмерная переменная).

$$v = \frac{\chi}{a} \bar{v}(x) = \frac{\chi}{2a} R \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} f_3(\varepsilon)(1 - x^2) + \frac{1}{\varepsilon^3} [f_1(\varepsilon)x - f_2(\varepsilon) + 2(1 - \varepsilon x)(\ln(1 - \varepsilon x) - 1)] \right\} \quad (1.11)$$

$$R = \frac{g\beta\theta_1 a^3}{\nu\chi} = \varepsilon\eta$$

$$f_1(\varepsilon) = (1 + \varepsilon)\ln(1 + \varepsilon) - (1 - \varepsilon)\ln(1 - \varepsilon) - 2\varepsilon$$

$$f_2(\varepsilon) = (1 + \varepsilon)\ln(1 + \varepsilon) + (1 - \varepsilon)\ln(1 - \varepsilon) - 2 \quad (1.12)$$

$$f_3(\varepsilon) = \frac{4\varepsilon^2 - (1 - \varepsilon^2)[\ln(1 - \varepsilon) - \ln(1 + \varepsilon)]^2}{2\varepsilon + (1 - \varepsilon^2)[\ln(1 - \varepsilon) - \ln(1 + \varepsilon)]}$$

Здесь  $R$  – число Рэлея.

Пользуясь (1.12) для  $f_1(\varepsilon)$ ,  $f_2(\varepsilon)$ ,  $f_3(\varepsilon)$ , можно показать, что

$$v(x) = \frac{\chi R}{6a} (x^3 - x + O(\varepsilon)) = v_b(x) + \frac{\chi R}{6a} O(\varepsilon) \quad (1.13)$$

когда число Рэлея остается конечным при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В (1.13)  $v_b(x)$  – скорость вдоль слоя в модели Обербека – Буссинеска, т.е. решение (1.7) аппроксимирует при  $\varepsilon \rightarrow 0$  известное решение [4, стр. 302]

$$v_b = \frac{\chi R}{6a} (x^3 - x), \quad p = \bar{p} - \rho_1 g a y, \quad y \leftrightarrow \frac{y}{a}, \quad \theta = -\theta_1 x \quad (1.14)$$

где  $\bar{p} = \text{const}$  – превышение давления над гидростатическим. Профиль скорости  $u(x)$  (1.11) не является нечетной функцией по  $x$  в отличие от классического  $v_b(x)$  из (1.14).

Если параметр  $\eta$  не очень велик, то при  $\varepsilon \rightarrow 0$  как профиль скорости (1.11), так и  $v_b(x)$  стремятся к нулю, т.е. к положению равновесия в модели вязкой теплопроводной жидкости

$$u \equiv w = 0, \quad p = \bar{p} - \rho_1 g a y, \quad \theta = -\theta_1 x \quad (1.15)$$

Течение (1.7) сопровождается конвективным переносом тепла вдоль слоя, и поток этого тепла на единицу длины по оси  $y$  равен

$$Q = \rho_1 c_p \int_{-a}^a u(x') \theta(x') dx' = -\frac{1}{2} \rho_1 c_p \theta_1 \chi R \int_{-1}^1 \bar{v}(x) x dx = \frac{1}{2} \rho_1 c_p \theta_1 \chi R F(\varepsilon)$$

$$F(\varepsilon) = -\frac{1}{3\varepsilon^3} \left[ \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right) \ln \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right) + \frac{2\varepsilon}{3} - \frac{2}{\varepsilon} \right]$$

где  $\bar{v}(x)$  определяется формулой (1.11), а  $c_p$  есть удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Можно проверить, что  $F(\varepsilon) \rightarrow 4/45$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , значит,  $Q \rightarrow Q_b = 2\rho_1 c_p \theta_1 \chi R/45$  [4].

**2. Уравнения малых возмущений.** Пусть  $\mathbf{W} = (U, V)$ ,  $T, Q$  – возмущения основного движения (1.7), (1.8), (1.10). Используем уравнения малых возмущений из [5], имея в виду, что  $u = u_0 = \text{const}$ ,  $v = v(x)$ ,  $w = 0$ ,  $q_y = \phi - g$ . Получим систему

$$U_t + u_0 U_x + v U_y - \beta \chi v_x T_y + \beta^2 \chi^2 \theta_x T_{yy} = (1 + \beta \theta)(-Q_x + \nu \Delta U)$$

$$V_t + u_0 V_x + v V_y + v_x U + \beta \chi [\theta_x (V_x - U_y) + v_x T_x] - \beta^2 \chi^2 \theta_x T_{xy} =$$

$$= (1 + \beta \theta)(-Q_y + \nu \Delta V) + \beta T(g - \phi + \nu v_{xx}) \quad (2.1)$$

$$U_x + V_y = 0$$

$$T_t + u_0 T_x + v T_y + \theta_x U + 2\beta \chi \theta_x T_x = (1 + \beta \theta) \chi \Delta T \quad (2.2)$$

$$-a < x < a, \quad -\infty < y < \infty$$

$$\mathbf{W} + \beta \chi \nabla T = 0, \quad T = 0, \quad |x| = a$$

Введем безразмерные переменные

$$t' = \frac{t \chi}{a^2}, \quad x' = \frac{x}{a}, \quad \mathbf{W}' = \frac{\mathbf{W} a}{\chi} \quad (2.3)$$

$$T' = \frac{T}{\theta_*}, \quad Q' = \frac{Q a^2}{\nu \chi}, \quad \theta = \frac{\theta}{\theta_*}, \quad \bar{v} = \frac{v a}{\chi}$$

Подставляя (2.3) в (2.1), (2.2) и опуская “штрихи”, приходим к задаче

$$U_t + \varepsilon U_x + \bar{v} U_y - \varepsilon \bar{v}_x T_y + \varepsilon^2 \bar{\theta}_x T_{yy} = (1 + \varepsilon \bar{\theta})(-Q_x + \Delta U) \text{Pr}$$

$$V_t + \varepsilon V_x + \bar{v} V_y + \bar{v}_x U + \varepsilon [\bar{\theta}_x (V_x - U_y) + \bar{v}_x T_x] - \varepsilon^2 \bar{\theta}_x T_{xy} =$$

$$= (1 + \varepsilon \bar{\theta})(-Q_y + \Delta V) \text{Pr} + \frac{\text{Gr} T}{1 + \varepsilon \bar{\theta}} \quad (2.4)$$

$$U_x + V_y = 0$$

$$T_t + \varepsilon T_x + \bar{v} T_y + \bar{\theta}_x U + 2\varepsilon \bar{\theta}_x T_x = (1 + \varepsilon \bar{\theta}) \Delta T$$

$$-1 < x < 1, \quad -\infty < y < \infty, \quad -\infty < z < \infty$$

$$W + \varepsilon \nabla T = 0, \quad T = 0, \quad |x| = 1 \quad (2.5)$$

$$\varepsilon = \beta \theta_*, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\chi}, \quad \text{Gr} = \frac{\beta \theta_* g a^3}{\chi^2} = \varepsilon \eta \text{Pr}, \quad \eta = \frac{a^3 g}{\nu \chi}$$

где  $\varepsilon$  – параметр Буссинеска,  $\text{Pr}$  – число Прандтля,  $\text{Gr}$  – число Грассгофа,  $\eta$  – параметр микроконвекции. При преобразовании системы (2.1) учтена формула (1.8) для  $u_0$  и соотношение

$$\nu v_{xx} - \phi + g = g/(1 + \beta \theta)$$

Поскольку из (1.10)  $\bar{\theta} = \theta_0/\theta_* - x$  в безразмерных переменных, то  $\bar{\theta}_x = -1$ .

Ищем решение краевой задачи (2.4), (2.5) в виде нормальных волн

$$(W, Q, T) = (W(x), Q(x), T(x)) \exp[i(\alpha y - Ct)] \quad (2.6)$$

где  $\alpha$  – волновое число вдоль оси  $y$ ,  $C$  – комплексный декремент. Подстановка (2.6) в (2.4), (2.5) приводит к спектральной задаче

$$[i(\alpha \bar{v} - C) + (1 + \varepsilon \bar{\theta}) \alpha^2 \text{Pr}] U + \varepsilon U' + (\varepsilon^2 \alpha^2 - \varepsilon \alpha i \bar{v}_x) T = (1 + \varepsilon \bar{\theta}) \text{Pr} (-Q' + U'')$$

$$[i(\alpha \bar{v} - C) + (1 + \varepsilon \bar{\theta}) \alpha^2 \text{Pr}] V + (\bar{v}_x + \varepsilon i \alpha) U + (\varepsilon \bar{v}_x + \varepsilon^2 i \alpha) T = \quad (2.7)$$

$$= (1 + \varepsilon \bar{\theta}) (V'' - i \alpha Q) \text{Pr} + \frac{\text{Gr} T}{1 + \varepsilon \bar{\theta}}$$

$$U' + i \alpha V = 0$$

$$[i(\alpha \bar{v} - C) + \alpha^2 (1 + \varepsilon \bar{\theta})] T - \varepsilon T' - U = (1 + \varepsilon \bar{\theta}) T'' \quad (2.8)$$

$$-1 < x < 1$$

$$U + \varepsilon T = 0, \quad V = 0, \quad T = 0, \quad |x| = 1$$

**3. Длинноволновые возмущения.** Положим, учитывая уравнение сохранения массы,

$$U = \alpha U_0 + \alpha^2 U_1 + \dots, \quad V = V_0 + \alpha V_1 + \dots$$

$$Q = Q_0 + \alpha Q_1 + \dots, \quad T = \alpha T_0 + \alpha^2 T_1 + \dots \quad (3.1)$$

$$C = C_0 + \alpha C_1 + \dots$$

Подстановка в первое уравнение системы (2.7) дает  $Q_0 = \text{const}$ . Не ограничивая общности, можно положить  $Q_0 = 0$ . Остальные функции нулевого приближения удовлетворяют краевой задаче

$$U_0' + i V_0 = 0 \quad (3.2)$$

$$-i C_0 V_0 = (1 + \varepsilon \bar{\theta}) \text{Pr} V_0''$$

$$-i C_0 T_0 - \varepsilon T_0' - U_0 = (1 + \varepsilon \bar{\theta}) T_0'', \quad -1 < x < 1 \quad (3.3)$$

$$T_0 = V_0 = 0, \quad U_0 + \varepsilon T_0' = 0, \quad |x| = 1$$

Из (3.2) видно, что  $C_0$  находится из решения задачи

$$V_0'' + \frac{iC_0}{\text{Pr}(1 + \varepsilon\bar{\theta})} V_0 = 0, \quad V_0(\pm 1) = 0 \quad (3.4)$$

Ясно, что  $C_0$  – чисто мнимое,  $C_0 = iC_{0i}$ ,

$$C_{0i} = -\frac{\text{Pr}\varepsilon^2 \tau_n^2}{4(1 + \varepsilon)} < 0, \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.5)$$

где  $\tau_n$  – корень уравнения

$$J_1(\tau)Y_1(\lambda_0\tau) - J_1(\lambda_0\tau)Y_1(\tau) = 0, \quad \lambda_0 = \sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) имеет счетное число вещественных корней. Так как  $C_{0i} < 0$ , то длинноволновые возмущения затухают монотонно.

Уравнения первого приближения таковы:

$$-C_0 U_0 + \varepsilon U_0' = \text{Pr}(1 + \varepsilon\bar{\theta})(U_0'' - Q_1') \quad (3.7)$$

$$V_1'' + \frac{iC_0}{\text{Pr}(1 + \varepsilon\bar{\theta})} V_1 = \frac{1}{\text{Pr}(1 + \varepsilon\bar{\theta})} \left[ i(\bar{v} - C_1)V_0 + \bar{v}'(U_0 + \varepsilon T_0') - \frac{\text{Gr}T_0}{1 + \varepsilon\bar{\theta}} \right]$$

$$(1 + \varepsilon\bar{\theta})T_1'' + iC_0 T_1 + \varepsilon T_1' = i(\bar{v} - C_1)T_0 - U_1, \quad -1 < x < 1 \quad (3.8)$$

$$V_1 = T_1 = 0, \quad U_1 + \varepsilon T_1 = 0, \quad x = \pm 1$$

Поэтому первая поправка к комплексному декременту определяется из условия разрешимости краевой задачи для функции  $V_1$

$$iC_1 = \left\{ i \int_{-1}^1 \frac{\bar{v}|V_0|^2}{1 + \varepsilon\bar{\theta}} dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + \varepsilon\bar{\theta}} \left[ \bar{v}'(U_0 + \varepsilon T_0') - \frac{\text{Gr}T_0}{1 + \varepsilon\bar{\theta}} \right] V_0^* dx \right\} \left[ \int_{-1}^1 \frac{|V_0|^2}{1 + \varepsilon\bar{\theta}} dx \right]^{-1} \quad (3.9)$$

где  $V_0^*$  – комплексно-сопряженное решение однородной задачи (1.4).

В частности, для модели Обербека – Буссинеска ( $\varepsilon = 0$ ,  $\text{Gr} > 0$ ) с учетом граничных условий (3.3) имеем

$$U_0 = \frac{ia}{\mu} [\cos \mu(x+1) - 1], \quad V_0 = a \sin \mu(x+1), \quad Q_0 = 0 \quad (3.10)$$

$$a = \text{const}, \quad \mu = n\pi, \quad iC_0 = \text{Pr}n^2\pi^2, \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.11)$$

$$\text{Pr} \neq 1: T_0 = \frac{ia}{\mu^3} \left[ \frac{1}{\text{Pr}} + \frac{\cos \mu(x+1)}{1 - \text{Pr}} - \frac{2 \text{tg}(\mu\sqrt{\text{Pr}}) \sin(x+1)}{\text{Pr}(1 - \text{Pr})} - \frac{2 \cos(\mu\sqrt{\text{Pr}})(x+1)}{\text{Pr}(1 - \text{Pr})} \right] \quad (3.12)$$

$$\text{Pr} = 1: T_0 = \frac{ia}{2\mu^2} \left[ \frac{2}{\mu} - (x+1) \sin \mu(x+1) - \frac{2}{\mu} \cos \mu(x+1) \right] \quad (3.13)$$

Подстановка (3.10) – (3.13) в (3.9) приводит к представлению для  $C_1$  (напомним, что  $\bar{v}_b = R(x^3 - x)/6$ ):

$$\text{Pr} \neq 1: C_1 = -\frac{2\text{Gr}}{\mu^4 \text{Pr}(1 - \text{Pr})^2} \left[ \frac{\cos(2\mu\sqrt{\text{Pr}})\cos\mu(2 + \sqrt{\text{Pr}})}{\cos(\mu\sqrt{\text{Pr}})} + \right. \\ \left. + 2\sqrt{\text{Pr}}\sin(\mu\sqrt{\text{Pr}})\cos\mu(2 + \sqrt{\text{Pr}}) - 1 \right], \quad \mu = n\pi, \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.14)$$

$$\text{Pr} = 1: C_1 = \frac{\text{Gr}}{2\mu^2} \quad (3.15)$$

Итак, при  $\alpha \rightarrow 0$  в этом случае

$$C = -i\text{Pr}\mu^2 + \alpha C_1 \quad (3.16)$$

где  $C_1$  определяется по формуле (3.14), (3.15) соответственно.

**4. Численное решение задачи на собственные значения.** Для отыскания численного решения методом ортогонализации [6] приведем систему (2.7) к виду  $y' = Ay$ , где  $y(\xi)$  – вектор неизвестных,  $A(\xi)$  – матрица коэффициентов,  $0 \leq \xi \leq 1$ . Для этого осуществим замену

$$\xi = x/2 + 1/2, \quad y_1 = V, \quad y_2 = V', \quad y_3 = V'' \\ y_4 = U, \quad y_5 = T, \quad y_6 = T' \quad (4.1)$$

Исключая  $Q$  из (2.7), получим следующую систему уравнений:

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = y_3, \quad y_4' = -2i\alpha y_1, \quad y_5' = y_6 \\ y_3' = (8i\alpha h_1 + 8\alpha^2 h_4)y_1 + (4i\alpha h_2 + 4\alpha^2)y_2 + \left(8i\alpha h_3 + \frac{8i\alpha h_6}{1 + \varepsilon\bar{\theta}}\right)y_4 + \\ + \left\{8i\alpha h_6 \left[\frac{i(\alpha\bar{v} - C)}{1 + \varepsilon\bar{\theta}} + \alpha^2\right] - 8i\alpha h_7\right\}y_5 + \left(4i\alpha h_5 - \frac{4i\alpha h_6\varepsilon}{1 + \varepsilon\bar{\theta}}\right)y_6 \\ y_6' = -\frac{4}{1 + \varepsilon\bar{\theta}}y_4 + 4\left[\frac{i(\alpha\bar{v} - C)}{1 + \varepsilon\bar{\theta}} + \alpha^2\right]y_5 - \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon\bar{\theta}}y_6 \\ h_1 = \frac{\alpha\bar{v}_\xi(1 + \varepsilon\bar{\theta}) + (\alpha\bar{v} - C)\varepsilon\bar{\theta}_\xi}{\text{Pr}\alpha(1 + \varepsilon\bar{\theta})^2}, \quad h_2 = \frac{(\alpha\bar{v} - C)}{\text{Pr}\alpha(1 + \varepsilon\bar{\theta})} - i\alpha \\ h_3 = -\frac{i\bar{v}_{\xi\xi}(1 + \varepsilon\bar{\theta}) - i\bar{v}_\xi\varepsilon\bar{\theta}_\xi}{\text{Pr}\alpha(1 + \varepsilon\bar{\theta})^2} - \frac{\varepsilon^2\bar{\theta}_\xi}{\text{Pr}(1 + \varepsilon\bar{\theta})^2} - \frac{i(\alpha\bar{v} - C)}{\text{Pr}(1 + \varepsilon\bar{\theta})} - \alpha^2 \\ h_4 = -\frac{i\bar{v}_\xi}{\text{Pr}\alpha(1 + \varepsilon\bar{\theta})} \\ h_5 = -\frac{\varepsilon i\bar{v}_{\xi\xi}(1 + \varepsilon\bar{\theta}) - \varepsilon^2 i\bar{v}_\xi\bar{\theta}_\xi}{\text{Pr}\alpha(1 + \varepsilon\bar{\theta})^2} - \frac{\varepsilon^3\bar{\theta}_\xi}{\text{Pr}(1 + \varepsilon\bar{\theta})^2} + \frac{iR}{\alpha(1 + \varepsilon\bar{\theta})^2} \quad (4.2)$$

$$h_6 = -\frac{\varepsilon i \bar{v}_\xi}{\text{Pr} \alpha (1 + \varepsilon \bar{\theta})} + \frac{\varepsilon^2}{\text{Pr} (1 + \varepsilon \bar{\theta})}, \quad h_7 = \frac{\varepsilon^2 \alpha^2 - \varepsilon \alpha i \bar{v}_\xi}{\text{Pr} (1 + \varepsilon \bar{\theta})} + \frac{2i \text{Re} \bar{\theta}_\xi}{\alpha (1 + \varepsilon \bar{\theta})^3}$$

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}(\xi) = \frac{\theta_0}{\theta_*} - (2\xi - 1), \quad \bar{\theta}_\xi = -1$$

$$\bar{v} = \bar{v}(\xi) = \frac{\text{R}}{2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} f_3(\varepsilon) (-4\xi^2 + 4\xi) + \frac{1}{\varepsilon^3} [f_1(\varepsilon)(2\xi - 1) - f_2(\varepsilon) + \right. \\ \left. + 2(1 - \varepsilon(2\xi - 1))(\ln(1 - \varepsilon(2\xi - 1)) - 1)] \right\}$$

$$\bar{v}_\xi = \text{R} \left\{ -\frac{2}{\varepsilon^2} f_3(\varepsilon)(2\xi - 1) + \frac{1}{\varepsilon^3} [f_1(\varepsilon) - 2\varepsilon \ln(1 - \varepsilon(2\xi - 1))] \right\}$$

$$\bar{v}_{\xi\xi} = \text{R} \left\{ -\frac{4}{\varepsilon^2} f_3(\varepsilon) + \frac{4}{\varepsilon(1 - \varepsilon(2\xi - 1))} \right\}$$

где  $f_1(\varepsilon), f_2(\varepsilon), f_3(\varepsilon)$  определяются из (1.12). Граничные условия (2.8) примут, в силу замены (4.1), вид

$$y_1 = 0, \quad y_4 + \varepsilon y_6 = 0, \quad y_5 = 0, \quad (\xi = 0, \xi = 1) \quad (4.3)$$

Таким образом, решается система вида  $y' = A(\xi)y$  с краевыми условиями, заданными при  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$ ,  $By(0) = 0$  и  $Dy(1) = 0$  соответственно.

Матрицы  $B$  и  $D$  размерности  $3 \times 6$  совпадают, и их элементы имеют следующие значения:

$$b_{11} = d_{11} = b_{24} = d_{24} = b_{35} = d_{35} = 1, \quad b_{26} = d_{26} = \varepsilon$$

а остальные элементы обеих матриц равны нулю.

Решение ищется в виде

$$y = \sum_{j=1}^3 p_j y^j \quad (4.4)$$

где коэффициенты  $p_j$  находятся из системы  $Dy(1) = 0$ , а  $y^1, y^2, y^3$  – линейно-независимые векторы такие, что

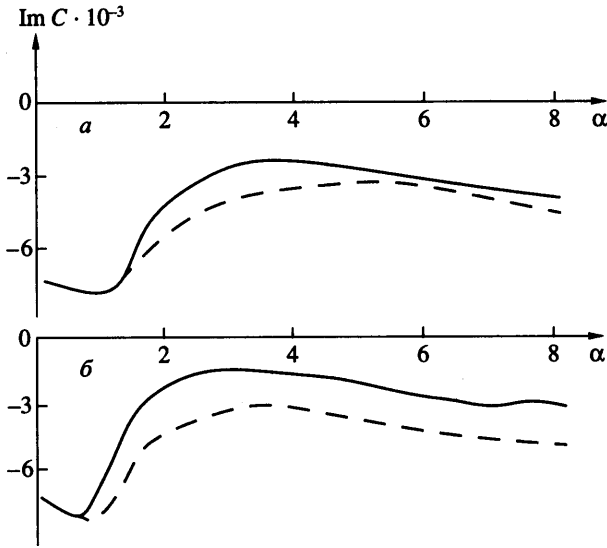
$$y^1(0) = (0, 0, 0, -\varepsilon, 0, 1), \quad y^2(0) = (0, 1, 0, 0, 0, 0), \quad y^3(0) = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

Для нахождения собственного значения  $C$  необходимо два начальных приближения  $C_0$  и  $C_1$ , которые выбираются из условия (3.5), (3.14).

Исследовалась устойчивость слоя с твердыми стенками для расплава кремния  $\text{SiO}_2$ . При этом были взяты следующие значения параметров:

$$\nu = 2.65 \cdot 10^{-3}, \quad \chi = 0.49, \quad \beta = 0.75 \cdot 10^{-5}, \quad \text{Pr} = 5.41 \cdot 10^{-3}$$



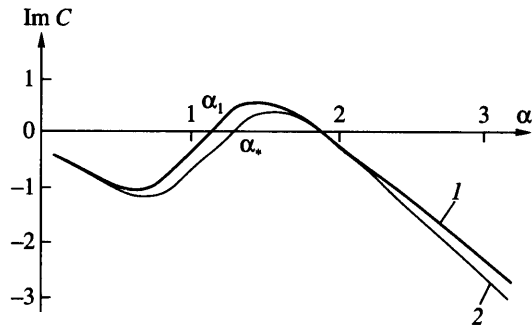


Фиг. 2. Зависимости мнимой части комплексного декремента  $\text{Im } C$  от волнового числа  $\alpha$ : *a* – для масштаба длины  $a = 0.025$  см (штриховая) и  $a = 0.05$  см (сплошная) при разнице температур на стенках  $10^\circ\text{C}$  ( $\varepsilon = 3.75 \cdot 10^{-5}$ ); *б* –  $a = 0.025$  см (штриховая),  $a = 0.05$  см (сплошная) при  $\Delta\theta = 100^\circ\text{C}$  ( $\varepsilon = 3.75 \cdot 10^{-4}$ )

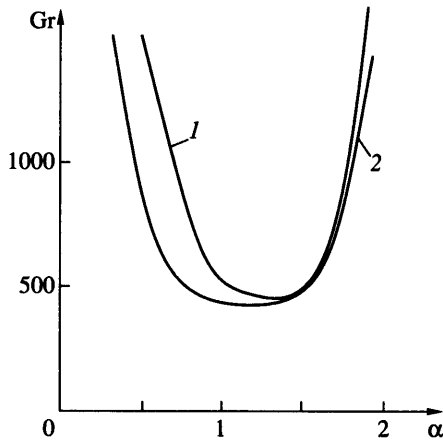
Расчеты проводились для модуля разницы температур  $|\theta_1 - \theta_2|$  на стенках 10 и  $100^\circ$ . Это означает изменение безразмерного параметра  $\varepsilon = \beta|\theta_1 - \theta_2|/2$ . Линейный размер слоя выбирался таким, чтобы выполнялось неравенство  $\eta = (2a)^3 g/\nu\chi < 1$ , которое является критерием применимости рассматриваемой модели микроконвекции [2]. Малость параметра  $\eta$  может достигаться как за счет уменьшения масштаба длины, так и за счет малости ускорения силы тяжести  $g$  (например, в условиях невесомости, когда  $g$  имеет порядок  $10^{-2} - 10^{-3} g_0$ , где  $g_0 = 981 \text{ см}/\text{с}^2$  – ускорение силы тяжести вблизи Земли). В данных расчетах рассматривается  $g \sim 10^{-3} g_0$ , т.е.  $2a < 0.11$  см. При указанных значениях  $a, \beta, \chi, \nu$  найдена зависимость мнимой  $\text{Im } C$  и вещественной части  $\text{Re } C$  от волнового числа  $\alpha$ .

На фиг. 2 изображены кривые  $\text{Im } C(\alpha)$  для различных значений  $\varepsilon$  и  $a$ . Более медленное изменение кривых  $\text{Im } C(\alpha)$ , соответствующих меньшим значениям характерного размера  $a$ , позволяет говорить о стабилизирующем влиянии вязкости. Значения  $\text{Re } C$  для указанных значений параметров не превосходят  $10^{-12}$ . Таким образом, для любых  $\alpha$  имеем  $\text{Im } C < 0$ , т.е. движение устойчиво.

Было проведено сравнение результатов решения задачи Обербека – Буссинеска с численным решением спектральной задачи (2.7) для случая, когда число Грассгофа  $\text{Gr} = \varepsilon\eta\text{Pr}$  конечно при  $\varepsilon \ll 1$ . Расчеты проводились для расплава кремния с теми же физическими параметрами и  $\theta_2 - \theta_1 = 100^\circ\text{C}$ , фиг. 3. С увеличением  $\eta$  кривая  $\text{Im } C$  приближается к оси  $\text{Im } C = 0$  и впервые пересечет эту ось при  $\alpha = \alpha_1 = 1.14$ , когда  $\eta_1 = 2.32409 \cdot 10^8$ . При  $\alpha_1 < \alpha < 1.80 = \alpha_2$  кривая  $\text{Im } C$  принимает положительные значения, вновь обращаясь в нуль в точке  $\alpha_2$  и убывая с ростом  $\alpha$ . В этом случае число Грассгофа  $\text{Gr}_1 = \varepsilon\eta_1\text{Pr} = 471.34 < \text{Gr}_*$ , где  $\text{Gr}_* = 495.6$  (при  $\alpha_* = 1.34$ ) – критическое число Грассгофа для классической задачи ([4, стр. 321]). Толщина слоя в этом случае  $2a = 33.7$  см для  $g = 10^{-3} g_0$ . Таким образом, в модели микроконвекции неустойчивость движения возникает при меньших волновых числах, что, по-видимому, связано с несоленоидальностью поля скоростей.



Фиг. 3. Зависимости комплексного декремента  $\text{Im } C$  от волнового числа  $\alpha$ : кривая 1 – для модели микроконвекции ( $\alpha_1 = 1.14$ ), 2 – для модели Обербека – Буссинеска ( $\alpha_* = 1.34$ )



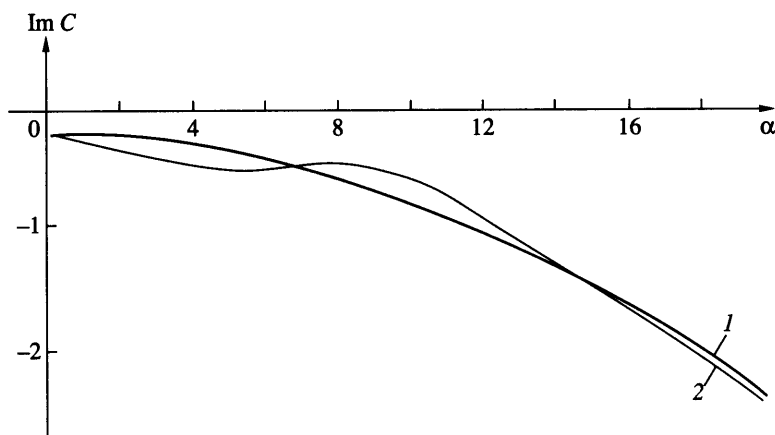
Фиг. 4. Нейтральные кривые: 1 – для модели Обербека – Буссинеска, 2 – для модели микроконвекции

Также проведено сравнение нейтральных кривых фиг. 4. Заметим, что минимум кривой 2 (обозначим его  $\text{Gr}_{1*}$ ) смещен влево по оси  $\alpha$ , т.е. неустойчивость возникает при меньших волновых числах, что также связано с несоленоидальностью поля скоростей.

В разделе 1 было показано, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  решения как (1.11), так и (1.14) аппроксимируют положение равновесия слоя (1.15) вязкой теплопроводной жидкости. Поэтому представляет интерес изучение устойчивости состояния покоя (1.15). Для этого достаточно в задаче (2.7), (2.8) положить  $\varepsilon = 0$ ,  $\text{Gr} = 0$ . Получим задачу

$$\begin{aligned} (-iC + \alpha^2 \text{Pr})U &= \text{Pr}(U'' - Q'), & U' + i\alpha V &= 0 \\ (-iC + \alpha^2 \text{Pr})V &= \text{Pr}(V'' - i\alpha Q) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} (-iC + \alpha^2)T - U &= T'', & -1 < x < 1 \\ U = V = T &= 0, & |x| = 1 \end{aligned} \quad (4.6)$$



Фиг. 5. Зависимости комплексного декремента  $\text{Im } C$  от волнового числа  $\alpha$ . Кривая 1 получена аналитически для вязкой теплопроводной жидкости ( $\epsilon = 0$ ), 2 – посредством численного интегрирования для модели микроконвекции ( $\epsilon = 10^{-7}$ )

Эта спектральная задача может быть решена в явном виде. Вывод об устойчивости равновесия (1.15) легко сделать на основании интегрального тождества, справедливого для задачи (4.5), (4.6)

$$\left(\alpha^2 - \frac{iC}{\text{Pr}}\right) \int_{-1}^1 (\alpha^2 |U|^2 + |V|^2) dx + \int_{-1}^1 (\alpha^2 |U|^2 + |V|^2) dx = 0$$

откуда  $-iC$  – вещественное и  $-iC < 0$ , что и означает устойчивость.

На фиг. 5 приведены мнимые части комплексного декремента  $\text{Im } C$ . Таким образом, спектр задачи об устойчивости в модели микроконвекции аппроксимирует соответствующий спектр для модели вязкой теплопроводной жидкости.

**Заключение.** Результаты исследования устойчивости течения в вертикальном слое в модели микроконвекции отличаются от результатов для аналогичного течения в классической модели Обербека – Буссинеска. Здесь всегда имеются колебательные возмущения. Если параметр Буссинеска  $\epsilon \rightarrow 0$ , а параметр микроконвекции  $\eta$  имеет порядок единицы, то течение всегда устойчиво. Просто в этом случае оно близко к равновесию в модели вязкой теплопроводной жидкости, которое, как показано выше, всегда устойчиво. При больших  $\eta$  и  $R = \epsilon\eta \rightarrow R_0 < \infty$ , когда  $\epsilon \rightarrow 0$ , значения декрементов затухания (или инкрементов нарастания) возмущений близки к соответствующим значениям  $\text{Im } C$ , вычисленных для модели Обербека – Буссинеска.

Построены нейтральные кривые и найдено критическое число Грассгофа  $\text{Gr}_{1*}$ , причем оказалось, что  $\text{Gr}_{1*} < \text{Gr}_*$ , где  $\text{Gr}_*$  – критическое число для модели Обербека – Буссинеска.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 02-01-00934) и интеграционного гранта СО РАН (№ 131).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 638 с.
2. Пухначев В.В. Модель конвективного движения при пониженной гравитации // Моделирование в механике. 1992. Т. 6, № 4. С. 47–56.

3. Бекежанова В.Б. Об одном стационарном решении уравнений микроконвекции в вертикальном слое // ПМТФ. 2001. Т. 42. № 3. С. 63–71.
4. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
5. Андреев В.К., Бекежанова В.Б. Возникновение микроконвекции в плоском слое. Препринт № 1-01. Красноярск: ИВМ СО РАН, 2001. 38 с.
6. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16. Вып. 3. С. 171–174.

Красноярск

Поступила в редакцию  
23.VI.2003