МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 2004

УДК 532.517+536.41

 Ан. Ю. ДЕМЬЯНОВ

ТЕЧЕНИЕ И ТЕПЛООБМЕН ПРИ СТАРТЕ ТЕЛА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ В ВЯЗКОМ, ТЕПЛОПРОВОДНОМ ГАЗЕ

Анализируется течение при старте тела произвольной формы в вязком, теплопроводном газе. Использован установленный факт несжимаемости при малых временах. Течение и теплообмен в окрестности каждой точки поверхности тела в нулевом приближении оказываются такими же, как на неограниченной пластине, совпадающей с касательной плоскостью в этой точке. Найдены поправки за счет кривизны поверхности тела. Для определения течений около цилиндров произвольной формы и сферических затуплений рассмотрены задачи старта круглого цилиндра и сферы. Указаны случаи обобщения результатов на реагирующие газы.

Ключевые слова: нестационарные течения, теплообмен, тело произвольной формы, уравнение Навье – Стокса, вязкость, теплопроводность, старт тела, число Струхаля, кратковременность, изохоричность.

Решение задач о нестационарных течениях, описываемых уравнениями Навье – Стокса, как правило, находятся численно (например [1–3]). Тем не менее, как для тестирования соответствующих программ, так и для получения обобщенных выводов большое значение имеют аналитические решения, например, задач о сильном взрыве [4] и гиперзвуковых течениях [5] при степенных зависимостях коэффициентов вязкости и теплопроводности от температуры. Сюда можно отнести и такие, где решения при малых временах находятся в виде рядов [6, 7], или где решения получены при малых или больших значениях параметров подобия [8]. Рассматриваемые ниже задачи относятся к случаю больших чисел Струхаля. Подобные задачи о течениях с одной компонентой скорости рассматривались в [8, 9].

1. Пусть тело произвольной формы с момента времени $t = 0$ начинает двигаться со скоростью $\mathbf{V}_\infty(t) = V_\infty(t)\mathbf{e}$ в неподвижном однородном газе с температурой T_0, плотностью ρ_0, давлением p_0. Примем, что направление единичного вектора $\mathbf{e}$ неизменно, l, m, n – его направляющие косинусы с осями абсолютной системы координат X_0, Y_0, Z_0 соответственно. Перейдем к относительной системе координат, совпадающей с абсолютной при $t = 0$, и относительной скорости:

$$x = x_0 - ls(t), \quad y = y_0 - ms(t), \quad z = z_0 - ns(t), \quad s = \int_0^t V_\infty(\tau)d\tau$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_a - V_\infty(t)\mathbf{e}$$

где $\mathbf{V}_a$ – вектор абсолютной скорости газа.

Уравнения неразрывности, энергии, Навье – Стокса [10] безразмерных переменных и функциях преобразуются к виду

$$\bar{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \frac{y}{L}, \quad \bar{z} = \frac{z}{L}$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0},\quad \bar{V}_X = \frac{V_X}{V_0},\quad \bar{V}_Y = \frac{V_Y}{V_0},\quad \bar{V}_Z = \frac{V_Z}{V_0},\quad \bar{V}_\infty = \frac{V_\infty}{V_0}$$

$$\bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0},\quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu_0},\quad \bar{T} = \frac{T}{T_0},\quad \bar{k} = \frac{k}{k_0},\quad \bar{p} = \frac{p}{R\rho_0 T_0}$$

$$\bar{c}_P = \frac{c_P}{c_{P0}}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{\mathrm{Sh}_0}\mathrm{div}(\rho V) = 0;\quad \rho c_p\frac{dT}{dt} - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{dp}{dt} = \frac{1}{\mathrm{P_r Sh_0 Re_0}}\mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}T) + Q \tag{1.1}$$

$$\rho\frac{dV_x}{dt} = -\rho l\frac{dV_\infty}{dt} - \frac{1}{M^2\mathrm{Sh}_0}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re_0Sh_0}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\mathrm{div}\mathbf{V} + 2\mu\frac{\partial V_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z}\right] \tag{1.2}$$

$$\rho\frac{dV_y}{dt} = -\rho m\frac{dV_\infty}{dt} - \frac{1}{M^2\mathrm{Sh}_0}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re_0Sh_0}}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\mathrm{div}\mathbf{V} + 2\mu\frac{\partial V_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z}\right] \tag{1.3}$$

$$\rho\frac{dV_z}{dt} = -\rho n\frac{dV_\infty}{dt} - \frac{1}{M^2\mathrm{Sh}_0}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\mathrm{Re_0Sh_0}}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\mathrm{div}\mathbf{V} + 2\mu\frac{\partial V_x}{\partial z}\right) + \frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y}\right] \tag{1.4}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_x\frac{\partial}{\partial x} + V_y\frac{\partial}{\partial y} + V_z\frac{\partial}{\partial z},\quad Q = K[\lambda(\mathrm{div}\mathbf{V})^2 + 2\mu Q_1 + \mu Q_2]$$

$$Q_1 = \left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^2;\quad Q_2 = \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\right)^2$$

$$p_{xy} = p_{yx} = \mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right);\ p_{xz} = p_{zx} = \mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\right);\ p_{yz} = p_{zy} = \mu\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\right)$$

Здесь $c_p(T)$ – теплоемкость при постоянном давлении, $k(T)$, $\mu(T)$, $\lambda(T)$ – коэффициент теплопроводности, 1-й и 2-й коэффициенты вязкости соответственно; V_0, t_0, L – характерные скорость, время, длина;

$$\mathrm{Sh}_0 = \frac{L}{V_0t_0},\quad K = \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{M^2}{\mathrm{Sh_0Re_0}},\quad \mathrm{Re}_0 = \frac{VL}{\upsilon_0},\quad M^2 = \frac{V^2}{p_0/\rho_0},\quad R = \frac{\gamma-1}{\gamma}c_p,\quad \mathrm{P_r} = \frac{\mu_0c_p}{k_0}$$

Черточки над буквами в уравнениях (1.1)–(1.5) и далее опущены. В рассматриваемых задачах t_0 мало и, как показано в [9], число Струхаля $\mathrm{Sh}_0 \gg 1$ во всей области течения. Из первого уравнения (1.1) и начального условия вытекает, что при $\mathrm{Sh}_0 \to \infty$, $\rho^0 = 1$, т.е. в нулевом приближении, газ ведет себя как несжимаемая жидкость, при этом $p^0 = T^0$. Заметим, что хотя $\rho^0 \equiv 1$, это не означает равенство нулю $\mathrm{div}\mathbf{V}^0$. Во втором уравнении (1.1) член Q, обусловленный работой вязких сил, за счет коэффициента K мал и им пренебрежем (выяснив далее, когда это возможно). Тогда это уравнение решается независимо от других.

При отсутствии разрыва начальных температур газа T_0 и поверхности тела T_{c0} нулевое приближение для температуры газа $T^0 = 1$, следовательно $p^0 = 1$. Тогда уравнения

Навье – Стокса для нулевого приближения соответствуют случаю течения несжимаемой жидкости без градиента давления при $\operatorname{div}(V^0) \neq 0$ [10]:

$\operatorname{div}(V^0) \neq 0$ [10]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}^0}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{V}_\infty}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{3}\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{V}^0) + \varepsilon\Delta^2\mathbf{V}^0, \quad \varepsilon = \frac{1}{\mathrm{Re}_0\mathrm{Sh}_0} = \frac{t_0 v_0}{L^2}$$

$$\Delta^2\mathbf{V}^2 = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{V}^0) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{V}^0), \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}^0}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{V}_\infty}{\partial t} + \frac{4}{3}\varepsilon\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{V}^0) - \varepsilon\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{V}^0)$$

Здесь обезразмеривание как в уравнениях (1.1)–(1.4). Параметр ε в рассматриваемой задаче мал. Полагая в (1.5) $\varepsilon = 0$, получаем $\mathbf{V}_1^0 \equiv -V_\infty$, т.е. невозмущенный поток не удовлетворяет условиям прилипания на поверхности. Влияние ε проявляется в узкой области около тела, где уравнение (1.5) может быть упрощено после перехода к системе координат, две криволинейные оси которой $q_1 = s_1$ и $q_2 = s_2$ взаимно перпендикулярны и проходят по поверхности (причем их радиусы кривизны $R_1(s_1, s_2)$, $R_2(s_1, s_2)$ являются главными), а ось $q_3 = n$ совпадает с нормалью. В пространственном случае аналогично плоскопараллельному [10] элемент длины Δl между двумя точками и коэффициенты Ламэ выражается формулами

$$(\Delta l)^2 \approx (\Delta n)^2 + \left(\frac{R_1+n}{R_1}\right)^2(\Delta s_1)^2 + \left(\frac{R_2+n}{R_2}\right)^2(\Delta s_2)^2, \; H_1 = 1 + \frac{n}{R_1}, \; H_2 = 1 + \frac{n}{R_2}, \; H_3 = 1$$

Уравнение (1.5) в проекциях на оси q_1, q_2, q_3 принимает вид

$$\frac{\partial V_1^0}{\partial t} = -\frac{\partial V_{\infty 1}}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial^2 V_1^0}{\partial n^2} + \frac{\varepsilon}{3}H_1^{-1}\frac{\partial^2 V_3^0}{\partial s_1 \partial n} + \varepsilon H_2^{-1}\frac{\partial V_1^0}{\partial n}\frac{\partial H_2}{\partial n} + \varepsilon H_2^{-1}\frac{\partial}{\partial n}\left[V_1^0 H_2 \frac{\partial \ln H_1}{\partial n}\right] + \varepsilon A_1 \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial V_2^0}{\partial t} = -\frac{\partial V_{\infty 2}}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial^2 V_2^0}{\partial n^2} + \frac{\varepsilon}{3}H_2^{-1}\frac{\partial^2 V_3^0}{\partial s_2 \partial n} + \varepsilon H_1^{-1}\frac{\partial V_2^0}{\partial n}\frac{\partial H_1}{\partial n} + \varepsilon H_1^{-1}\frac{\partial}{\partial n}\left[V_2^0 H_1 \frac{\partial \ln H_2}{\partial n}\right] + \varepsilon A_2 \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_3^0}{\partial t} &= -\frac{\partial V_{\infty 3}}{\partial t} + \frac{4}{3}\varepsilon\frac{\partial^2 V_3^0}{\partial n^2} + \frac{\varepsilon}{3}H_1^{-1}\frac{\partial^2 V_1^0}{\partial s_1 \partial n} + \\ &+ \frac{\varepsilon}{3}H_2^{-1}\frac{\partial^2 V_2^0}{\partial S_2 \partial n} + \frac{4}{3}\varepsilon H_2^{-1}\frac{\partial}{\partial n}\left[V_3^0 H_2 \frac{\partial \ln H_1 H_2}{\partial n}\right] + \varepsilon A_3\end{aligned} \tag{1.8}$$

Здесь буквами A_1, A_2, A_3 обозначены все члены (в A_1 и A_2 их 13), содержащие вторые производные по координатам s_1 и s_2 от проекций скоростей, а также произведение первых производных от проекций скоростей по координатам s_1 и s_2 на производные по s_1, s_2 и n от H_1^{-1}, H_2^{-1}, $\ln H_1$, $\ln H_2$.

Учитывая, что $V_i^0 \sim O(1)$, $V_i^0 = V_{i0}^0 + \varepsilon V_{i1}^0 + \ldots$ ($i = 1, 2, 3$), найдем предельную форму уравнений (1.6)–(1.8) после перехода к переменной $N = n/\sqrt{\varepsilon}$.

Уравнения для V_{i0} и V_{i1} таковы:

$$\frac{\partial V_{i0}^0}{\partial t} = -\frac{\partial V_{\infty i}}{\partial t} + \frac{\partial^2 V_{i0}^0}{\partial N^2}, \quad i = 1, 2; \quad \frac{\partial V_{30}^0}{\partial t} = -\frac{\partial V_{\infty 3}}{\partial t} + \frac{4}{3}\frac{\partial^2 V_{30}^0}{\partial N^2} \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial V_{j1}^0}{\partial t} = \frac{\partial^2 V_{j1}^0}{\partial N^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 V_{30}^0}{\partial s_j \partial N} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial V_{j1}}{\partial N}, \quad j = 1, 2 \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial V_{31}^0}{\partial t} = \frac{4}{3}\frac{\partial^2 V_{31}^0}{\partial N^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 V_{20}}{\partial s_2 \partial N} + \frac{\partial^2 V_{10}}{\partial s_1 \partial N}\right) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial V_{30}}{\partial N} \tag{1.11}$$

Уравнения (1.9) описывают движение около неограниченной пластины, нормаль которой совпадает с нормалью тела в данной точке.

Если направление проекции вектора $\mathbf{V}_\infty$ в касательной плоскости обозначить через τ, то течение в плоскостях $N = \mathrm{const}$ в нулевом приближении происходит только по этому направлению, причем для проекции $V_{\tau 0}^0$ уравнение аналогично первому в (1.9).

Если функция $V_\infty(t)$ представлена в виде степенного ряда по времени, то каждой его составляющей $B_n t^n$ (n – любое действительное число) в силу линейности (1.9) соответствуют решения

$$V_{\tau 0}^0 = B_n t^n \alpha f_1(z), \quad V_{n0}^0 = B_n t^n \beta f_2(z), \quad z = N/\sqrt{t} \tag{1.12}$$

где f_m, $m = 1, 2$ удовлетворяют краевым задачам

$$n(f_m + 1) - \frac{z}{2}f_m' = \gamma f_m''; \quad f_m(0) = 0; \quad f_m(\infty) = -1, \quad m = 1, 2, \quad \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = \frac{4}{3} \tag{1.13}$$

решения которых при n, кратных 1/2, известны [7]; α и β – косинусы углов между вектором $\mathbf{V}_\infty$ и направлениями τ и N соответственно.

2. Из уравнений (1.10) – (1.11) следует, что первое приближение зависит только от градиентов скорости $\mathbf{V}_0^0$ по направлениям s_1 и s_2 в данной точке и местных радиусов кривизны. Но тогда для определения течения около цилиндра произвольной формы сечения и сферического затупления достаточно найти соответствующие решения для круглого цилиндра и сферы.

Уравнение (1.5) в нулевом приближении при $T^0 \equiv 1$ для цилиндрического и сферического случаев в проекциях имеет вид [10]

$$\frac{\partial V_r^0}{\partial t} = -\frac{\partial V_{\infty r}^0}{\partial t} + \varepsilon\left[\frac{4}{3}\frac{\partial^2 V_r^0}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r^0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_r^0}{\partial z^2} + \frac{1}{3r}\frac{\partial^2 V_\theta^0}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 V_z^0}{\partial r \partial z} - \frac{7}{3r^2}\frac{\partial V_\theta^0}{\partial \theta} + \frac{4}{3r}\frac{\partial V_r^0}{\partial r} - \frac{4}{3}\frac{V_r^0}{r^2}\right] \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial V_\theta^0}{\partial t} = -\frac{\partial V_{\infty\vartheta}^0}{\partial t} + \varepsilon\left[\frac{\partial^2 V_\theta^0}{\partial r^2} + \frac{4}{3r^2}\frac{\partial^2 V_\theta^0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_\theta^0}{\partial z^2} + \frac{1}{3r}\frac{\partial^2 V_r^0}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{3r}\frac{\partial^2 V_z^0}{\partial \theta \partial z} + \frac{7}{3r^2}\frac{\partial V_r^0}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta^0}{\partial r} - \frac{V_\theta^0}{r^2}\right] \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial V_z^0}{\partial t} = -\frac{\partial V_{\infty z}^0}{\partial t} + \varepsilon\left[\frac{4}{3}\frac{\partial^2 V_z^0}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_z^0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z^0}{\partial r^2} + \frac{1}{3r}\frac{\partial^2 V_\theta^0}{\partial z \partial \theta} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 V_r^0}{\partial r \partial z} + \frac{1}{3}\frac{\partial V_r^0}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_z^0}{\partial r}\right] \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial V_r^0}{\partial t} = -\frac{\partial V_{\theta r}^0}{\partial r} + \varepsilon\left[\frac{4}{3}\frac{\partial^2 V_r^0}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r^0}{\partial \theta^2} + \frac{1}{3r}\frac{\partial^2 V_\theta^0}{\partial r \partial \theta} - \frac{7}{3r^2}\frac{\partial V_\theta^0}{\partial \theta} + \frac{8}{3r}\frac{\partial V_r^0}{\partial r} - \frac{8}{3}\frac{V_r^0}{r^2} + \frac{1}{3}\frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{r}\frac{\partial V_\theta^0}{\partial r} - \right.$$
$$\left. - \frac{7}{3}\frac{V_\theta^0 \mathrm{ctg}\,\theta}{r^2} + \frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{r^2}\frac{\partial V_r^0}{\partial \theta}\right] \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial V_\theta^0}{\partial t} = -\frac{\partial V_{\theta\vartheta}^0}{\partial t} +$$
$$+ \varepsilon\left[\frac{\partial^2 V_\theta^0}{\partial r^2} + \frac{4}{3r^2}\frac{\partial^2 V_\theta^0}{\partial \theta^2} + \frac{1}{3r}\frac{\partial^2 V_r^0}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r}\frac{\partial V_\theta^0}{\partial r} + \frac{4}{3}\frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{r}\frac{\partial V_\theta^0}{\partial \theta} - \frac{4}{3}\frac{V_\theta^0}{r^2 \sin^2\theta} + \frac{8}{3r^2}\frac{\partial V_r^0}{\partial \theta}\right] \quad (2.5)$$

Для случая обтекания сферы за счет совмещения луча $\theta = 0$ с направлением вектора $\mathbf{V}_\infty(t)$ учтено, что $V_\lambda \equiv 0$, $\partial/\partial\lambda = 0$.

Обозначая $V_{\infty z}(t)$, $V_{\infty r}(t)$, проекции вектора скорости цилиндра соответственно на направление z и перпендикулярное к нему и отсчитывая угол θ от направления, определяемого составляющей $V_{\infty n}(t)$, получим

$$V_{\infty r} = V_{\infty n}\cos\theta, \quad V_{\infty\theta} = -V_{\infty n}\sin\theta, \quad V_{\infty z} = V_{\infty z}(t)$$

Тогда можно убедиться, что решения системы (2.1)–(2.3) имеют вид

$$V_r^0 = \upsilon_r(r,t)\cos\theta, \quad V_\theta^0 = \upsilon_\theta(r,t)\sin\theta, \quad V_z^0 = V_z(r,t)$$

и определяют характер зависимости течения от угла.

Если функция $V_\infty(t)$ представлена в виде степенного ряда по времени, то решение системы уравнений для V_r, V_θ, V_z применительно к каждой составляющей $B_n t^n$ ищется в виде

$$\upsilon_\theta^0 = B_n t^n \cos\varphi_0[f_1(\zeta) + \tau\Phi_\theta(\zeta) + \ldots]; \quad \upsilon_z^0 = B_n t^n \sin\varphi_0[f_1(\zeta) + \tau\Phi_z(\zeta) + \ldots]$$

$$\upsilon_r^0 = B_n t^n \cos\varphi_0[f_{21}(\zeta) + \tau\Phi_r(\zeta) + \ldots]; \quad \zeta = \frac{r - r_0}{\sqrt{\upsilon t}}, \quad \tau = \frac{\sqrt{\upsilon t}}{r_0}$$

где φ_0 – угол между вектором скорости $\mathbf{V}_\infty$ и проекцией $V_{\infty n}$. Функции f_1, f_2 удовлетворяют уравнениям (1.13), что подтверждает вывод разд. 1. Функции Φ_θ, Φ_z, Φ_r удовлетворяют уравнениям

$$(n + 1/2)\Phi_\theta - 3/2\Phi_\theta' = \varepsilon(\Phi_\theta'' + f_1' - 1/3 f_2'), \quad (n + 1/2)\Phi_z - 3/2\Phi_z' = \varepsilon(\Phi_z'' + f_1')$$

$$(n + 1/2)\Phi_r - 3/2\Phi_r' = \varepsilon(4/3\Phi_r'' + 1/3 f_1' + 4/3 f_2')$$

с нулевыми граничными условиями при $\zeta = 0$, $\zeta = \infty$.

Оценить время, начиная с которого влияют эффекты первого приближения, можно по вкладу членов $\tau\Phi_\theta(\zeta)$, $\tau\Phi_r(\zeta)$, $\tau\Phi_z(\zeta)$ в $f_i(\zeta)$, $i = 1, 2, 3$.

Для сферы $V_{\infty r} = V_\infty(t)\cos\theta$, $V_{\infty\theta} = V_\infty(t)\sin\theta$, и убеждаемся, что $V_r^0 = \upsilon_r\cos\theta$, $V_\theta^0 = \upsilon_\theta\sin\theta$. Переходя снова к переменным ζ, τ и используя разложения υ_r, υ_θ по τ, убеждаемся, что нулевое приближение удовлетворяет уравнениям (1.13), а первое – позволяет оценить время, с которого проявляется эффект сферичности. Задание найденных полей потока в качестве начальных, как показывают исследования одномерных задач [8], повышает точность расчетов, особенно при переходе к "естественным" координатам z, τ.

3. Если температура T_0 не равна начальной температуре стенки T_{c0}, решение второго уравнения (1.1) необходимо проводить совместно с решением уравнения притока тепла в материале тела, которое в силу разд. 1 в каждой точке можно считать пластиной с условиями теплового контакта на границе с газом:

$$\frac{\partial T_c}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 T_c}{\partial y^2}, \quad \alpha^2 = \frac{a_c^2 t_0}{L_0^2}$$
$$T_c = T, \quad k\frac{\partial T}{\partial y} = k_c\frac{\partial T_c}{\partial y}, \quad y = 0 \tag{3.1}$$

Функции T_c и k_c обезразмерены, так же, как T и k. В силу кратковременности процесса пластинку можно считать полуограниченным телом. Тогда условия при $y \to \pm\infty$ совпадают с начальными. Методами размерностей и подобия [4] легко доказать (при $K = 0$), что $T^0 = f_0(z)$, $T_c = f_{c0}(z)$, $z = y/\sqrt{t}$. При этом второе уравнение (1.1) и (3.1) становятся обыкновенными, причем

$$\mu_0 = \mu(z), \quad \lambda_0 + 2\mu_0 = \frac{4}{3}\mu_0(z), \quad \frac{\partial p^0}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{t}}f_0'(z)$$

Решение для V_X^0 находится для каждой составляющей $B_n t^n$ в законе скорости $V_\infty(t)$, где $f_1(z)$ удовлетворяет уравнению и условиям

$$n(f_1+1) - \frac{z}{2}f_1' = \frac{1}{\mathrm{Re}_0\mathrm{Sh}_0}\frac{d}{dz}\left(\mu_0\frac{df_1}{dz}\right), \quad f_k(0) = 0, \quad f_k(\infty) = -1, \quad k = 1, 2$$

Решение для V_Y^0 при этом ищем в виде

$$V_y^0 = B_n(t)^n \sin\alpha f_2(z) + \sqrt{t}f_3(z)$$

где $f_2(z)$ и $f_3(z)$ удовлетворяют соответственно уравнениям и условиям:

$$n(f_2+1) - \frac{z}{2}f_2' = \frac{1}{\mathrm{Re}_0\mathrm{Sh}_0}\frac{d}{dz}\left(\frac{4}{3}\mu_0 f_2'\right), \quad f_2(0) = 0, \quad f_2(\infty) = -1$$

$$\frac{1}{2}f_3 - \frac{z}{2}f_3' = -\frac{1}{M^2\mathrm{Sh}_0}f_0' + \frac{1}{\mathrm{Re}_0\mathrm{Sh}_0}\frac{d}{dz}\left(\frac{4}{3}\mu_0\frac{\partial f_3}{dz}\right), \quad f_3(0) = f_3(\infty) = 0$$

При $0 \le n < 1/2$ основное влияние на составляющую V_y^0 оказывает скорость, при $n > 1/2$ – конвекция, при $n = 1/2$ вклад обоих факторов одинаков. Из вида решения следует, что пренебрежение во втором уравнении (1.1) членом Q справедливо при любых непрерывных движениях тела из состояния покоя. Когда

$$V_\infty(t) = V_{\infty 0} + \ldots, \quad V_{\infty 0} = \mathrm{const}, \quad K \sim O(1)$$

главными членами в разложениях будут

$$T_0 = f_0(z) + \ldots, \; T_c = f_{c0}(z) + \ldots, \; V_{X0} = V_{\infty 0}\cos\alpha f_1(z) + \ldots, \; V_{Y0} = V_{\infty 0}\sin\alpha f_2(z) + \ldots$$

Из-за неоднородности соответствующих уравнений $f_0(0) = f_{c0}(0) \neq 1$, т.е. имеет место скачкообразное увеличение температуры поверхности тела.

4. Нахождение следующего приближения начинаем с решения первого уравнения (1.1), из которого следует, что

$$\rho_\varepsilon = \frac{1}{\mathrm{Sh}_0}\rho^1 = -\frac{1}{\mathrm{Sh}_0}\int_0^t \frac{\partial V_{Y0}}{\partial y}dt; \quad \rho_\varepsilon = 1 - \rho \qquad (4.1)$$

Уравнение (4.1) дает оценку времени изохоричности процесса. Из второго уравнения (1.1) (при $K = 0$) с учетом уравнения состояния для случая равенства начальных температур газа и стенки получим

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\partial T^1}{\partial t} + \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{\partial V_Y^0}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{PrRe_0Sh_0}}\frac{\partial^2 T^1}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial V_Y^0}{\partial y} = \sum nB_n(t)^{n-1/2}\sin\alpha f_2'; \quad T_\varepsilon = \frac{1}{\mathrm{Sh}_0}T^1$$

Тогда

$$T^1 = T_0^1 + T_H^1, \quad T_H^1 = B_n(t)^{n+1/2}\sin\alpha f_{n+1/2}(z)$$

где T_0^1 – общее решение однородного уравнения, а $f_{n+1/2}(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\gamma}\left[(n+1/2)f_{n+1/2} - \frac{z}{2}f'_{n+1/2}\right] + \frac{\gamma - 1}{\gamma}f_2' = \frac{1}{\mathrm{PrRe_0Sh_0}}f''_{n+1/2}$$

При этом приращение температуры поверхности пластины $\Delta T \sim (t)^{n+1/2}$.

Результаты обобщаются на реагирующие газы в случаях равновесного протекания химических реакций; и когда время протекания реакции t_p, определяемое из условия $1/t_p \sim W^*$ (W^* – характерная скорость химической реакции), оказывается порядка t^0. Из [12] следует, что величина $W^* \gg RT^*/\upsilon^*$ и достаточно велика.

Заключение. При старте тела произвольной гладкой формы течение в главном приближении оказывается изохорическим и таким же, как около неограниченной пластины, у которой нормаль совпадает с нормалью в данной точке поверхности тела, а вектор скорости с вектором скорости в этой точке. В следующем приближении на течение влияют только градиенты скорости в данной точке и радиусы кривизны поверхности в ней.

Представлены зависимости параметров течений для круглого цилиндра и сферы от угловой координаты, которые использованы для определения потоков (с точностью до двух приближений) около произвольного цилиндра и сферического затупления. При различных начальных температурах тела и газа эффект теплообмена индуцирует поперечные течения со скоростями, пропорциональными $t^{1/2}$, которые оказываются превалирующими, если скорость движения тела $V_\infty(t) \sim t^n$ при $n > 1/2$.

Оценено время изохоричности течения и указаны случаи обобщения полученных результатов на реагирующие смеси.

Использование полученных результатов при численном решении соответствующих задач позволяет повысить точность соответствующих расчетов за счет правильного задания начальных данных (в особенности при переходе к новым переменным).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белоцерковский О.М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Физматлит, 1994. 442 с.
2. *Лапин Ю.В., Стрелец М.Х.* Внутренние течения газовых смесей. М.: Наука, 1989. 368 с.

3. *Ковеня В.М., Яненко Н.Н.* Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981. 304 с.
4. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977. 447 с.
5. *Сычев В.В.* О гиперзвуковых течениях вязкого теплопроводного газа // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 4. С. 600–610.
6. *Hanin M.* Unsteady flow of heat in gases // Applied Mechanics. Amsterdam; New York: Elsevier, 1962. P. 153–154.
7. *Демьянов Ю.А., Киреев В.Т.* К анализу одномерных нестационарных течений газа с учетом теплопроводности и вязкости // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 2. С. 3–10.
8. *Демьянов Ю.А., Секриеру Г.В., Игошин А.И. и др.* Одномерные нестационарные течения реального газа. Кишинев: Штинца, 1980. 188 с.
9. *Демьянов Ю.А.* К исследованию одномерных нестационарных течений реального газа (с учетом вязкости и теплопроводности) // Газовая и волновая динамика. М.: Изд-во МГУ, 1979. Вып. 3. С. 42–48.
10. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Т. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 612 с.
11. *Демьянов Ан.Ю., Демьянов Ю.А.* Закономерности воспламенения детонирующей газовой смеси // Докл. АН СССР. 1990. Т. 312. № 5. С. 1075–1080.

Москва

Поступила в редакцию
7.VI.2001