

УДК 532.5.013.4:532.529.2:534.23

© 2004 г. Д. В. ЛЮБИМОВ, Т. П. ЛЮБИМОВА, С. В. ШКЛЯЕВ

## ВЛИЯНИЕ СТОЯЧЕЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ НА ВОЗНИКНОВЕНИЕ КРУПНОМАСШТАБНОЙ КОНВЕКЦИИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ

Исследуется влияние стоячей звуковой волны на развитие длинноволновых конвективных возмущений в горизонтальном слое с теплоизолированными границами. Определено основное двумерное течение, для исследования его устойчивости и вторичных конвективных течений вблизи порога получено нелинейное амплитудное уравнение с пространственно-периодическими коэффициентами. Интенсивность звукового поля предполагается малой. Показано, что акустическое воздействие приводит к дестабилизации слоя. При больших числах Прандтля критическими являются плоские возмущения, при малых числах – трехмерные возмущения. Получены нелинейные одномерные стационарные решения амплитудного уравнения и исследована их устойчивость.

*Ключевые слова:* конвекция, звуковая волна, граница устойчивости, трехмерные возмущения.

Исследование тепловой конвекции в горизонтальном слое жидкости берет начало с классической работы Рэлея [1]. Подробный обзор основных результатов в этой области можно найти в монографии [2]. В частности, известно, что в слое с теплоизолированными границами (теплопроводность границ слоя значительно меньше теплопроводности жидкости) наиболее опасными являются возмущения, длина волны которых много больше толщины слоя.

Слабо-нелинейное исследование данной задачи проведено в [3]. Получено амплитудное уравнение, описывающее поведение системы вблизи порога устойчивости. Обнаружено, что выше критического числа Рэлея, существует класс периодических решений, неустойчивых относительно возмущений с большей длиной волны.

Исследование термоакустической конвекции в горизонтальном слое с теплоизолированными границами начато в [4]. В линейной постановке рассмотрено влияние бегущей звуковой волны, показано, что акустическое воздействие подавляет развитие плоских возмущений. Однако для спиральных возмущений критическое число Рэлея не меняется; аналогичный результат известен для устойчивости широкого класса плоскопараллельных течений в подогреваемом снизу горизонтальном слое [2].

Интересным представляется изучить влияние стоячей акустической волны на возникновение конвекции в горизонтальном слое. В этом случае возникает осредненное двумерное пространственно-периодическое течение (период вдвое меньше длины звуковой волны [5]). Можно ожидать, что при определенных условиях такое течение будет резонансным образом взаимодействовать с конвективными возмущениями.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается влияние стоячей звуковой волны на возникновение конвекции в горизонтальном слое, подогреваемом снизу. Толщина слоя  $2h$ ; на его границах поддерживается постоянный тепловой поток. В жидкости возбуждена стоячая акустическая волна, поле скорости которой имеет вид:

$$w_x = a\omega \cos q_* x \cos \omega t, \quad w_y = 0, \quad w_z = 0 \quad (1.1)$$

ось  $z$  направлена вертикально вверх, плоскость  $x - y$  находится на середине слоя. Здесь  $\omega$  и  $q_* = \omega/c$  – частота и волновое число звуковой волны,  $c$  – скорость звука. Длина зву-

ковой волны предполагается большой, а амплитуда смещения жидких частиц  $a$  малой по сравнению с толщиной слоя.

В силу того, что характерные конвективные времена велики по сравнению с периодом акустических колебаний, для решения данной задачи применимо осредненное описание. Система осредненных уравнений термоакустической конвекции имеет вид [6]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} + g \beta T \gamma + \frac{\bar{E}}{\rho} \beta \nabla T \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T = \chi \Delta T, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.3)$$

$$E = \rho w^2 / 2 + \bar{p}^2 / 2 \rho c^2$$

Здесь  $E$  – плотность звуковой энергии ( $p'$  – пульсационная часть давления), которой и определяются осредненные объемные эффекты, связанные с распространением в жидкости звуковой волны<sup>1</sup>. Чертой обозначается осреднение по периоду акустических колебаний.

Средняя по времени плотность энергии плоской стоячей волны однородна по пространству, т.е. термоакустическое слагаемое в уравнении баланса импульса имеет градиентный вид, а значит, приводит лишь к перенормировке давления. Таким образом, в данном случае распространение акустической волны не приводит к возникновению осредненных массовых сил. Все влияние звуковой волны сводится к генерации в динамическом пограничном слое осредненной завихренности и диффузии последней в основной объем жидкости – формируется так называемое акустическое течение ([5], см. также обзор [7]). Этот процесс можно учесть с помощью эффективных граничных условий на внешней границе пограничного слоя или, в силу малой толщины последнего, непосредственно на твердой стенке [8, 9]. Несложно убедиться, что для пульсационного поля (1.1) осредненная скорость жидкости на границе примет вид:

$$\frac{3a^2 \omega^2}{8c} \sin 2q_* x = U \sin 2q_* x \quad (1.4)$$

Таким образом, термоакустическая конвекция в данной задаче описывается обычными уравнениями тепловой конвекции в приближении Буссинеска

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\operatorname{Pr}} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + \operatorname{Ra} T \gamma \quad (1.5)$$

$$\operatorname{Pr} \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T = \Delta T, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.6)$$

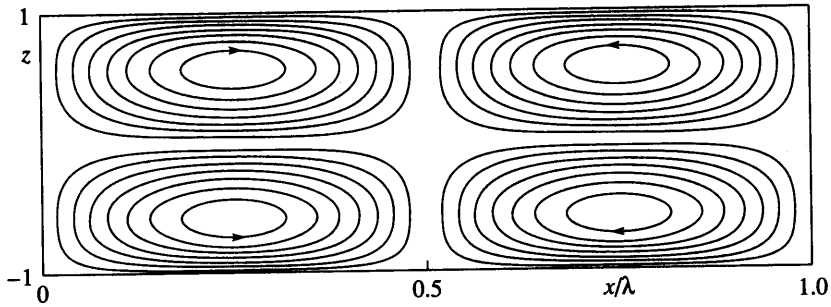
с граничными условиями:

$$z = \pm 1: \frac{\partial T}{\partial z} = -1, \quad v_x = \operatorname{Pe} \sin qx, \quad v_y = v_z = 0 \quad (1.7)$$

$$\operatorname{Ra} = \frac{g \beta A h^4}{\nu \chi}, \quad \operatorname{Pr} = \frac{\nu}{\chi}, \quad \operatorname{Pe} = \frac{U h}{\chi}, \quad q = 2q_* h$$

Задача (1.5)–(1.7) записана в безразмерном виде, в качестве единиц измерения расстояния, времени, скорости, температуры и давления выбраны  $h$ ,  $h^2/\nu$ ,  $\chi/h$ ,  $Ah$ ,  $\rho \nu \chi / h^2$  соответственно. Уравнения (1.5)–(1.6) и граничные условия (1.7) содержат четыре без-

<sup>1</sup> В работе [6] опущено последнее слагаемое в выражении для плотности энергии звуковой волны.



Фиг. 1. Основное течение

размерных параметра: число Рэлея  $Ra$ , число Прандтля  $Pr$ , число Пекле  $Pe$  и  $q$ , который вследствие сделанных предположений является малым. Наряду с волновым числом  $q$  будет также использоваться параметр  $\lambda = 2\pi/q$ , равный половине длины акустической волны и совпадающий с периодом акустического течения вблизи границы (1.4).

**2. Основное течение.** Определим основное стационарное течение, возникающее в слое. С точностью до слагаемых первого порядка по малому  $q$  (тригонометрические функции по  $q$  не раскладываются) имеем:

$$\begin{aligned} v_0 &= Pe(U_0(z)\sin qx + qPeU_1(z)\sin 2qx, 0, -3qV_0(z)\cos qx) \\ T_0 &= -z + 3qPe\Theta_0(z)\cos qx \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$U_0 = \frac{1}{2}(3z^2 - 1), \quad U_1 = \frac{1}{560}(7z^6 - 9z^2 + 2), \quad V_0 = \frac{1}{6}(z^3 - z) \quad (2.2)$$

$$\Theta_0 = \frac{1}{360}(3z^5 - 10z^3 + 15z)$$

Линии тока течения, определяемого формулами (2.1)–(2.2), показаны на фиг. 1. Основное течение представляет собой систему крупномасштабных вихрей; вертикальная компонента скорости мала по сравнению с продольной, добавка к линейному распределению температуры также является малой. Вблизи узлов и пучностей пульсационного поля скорости (1.1) горизонтальная компонента скорости мала, образуются застойные зоны.

Отметим, что распределение скорости совпадает с акустическим течением в изотермической жидкости [5]; влияние тепловой конвекции мало.

**3. Амплитудное уравнение.** Проведем исследование устойчивости основного течения (2.1), (2.2) относительно пространственных крупномасштабных возмущений для случая малых чисел Пекле. Применяя метод многих масштабов [10], раскладываем возмущенные поля, производные по времени и продольным координатам в ряды по малому параметру  $q$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= q\mathbf{v}_0 + q(\mathbf{u}_1 + \dots) + \gamma q^2(w_2 + \dots), \\ T &= T_0 + \vartheta(x, y) + qT_1 + \dots, \quad p = p_0 + qp_1 + \dots \\ \frac{\partial}{\partial t} &= q\frac{\partial}{\partial t_1} + q^2\frac{\partial}{\partial t_2} + \dots, \quad \frac{\partial}{\partial x} = q\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots, \quad \frac{\partial}{\partial y} = q\frac{\partial}{\partial y_1} + \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$Pe = qP_1 + \dots, \quad R = R_0 + q^2R_2 + \dots$$

Здесь  $\mathbf{u}$  – двумерный вектор возмущения скорости в плоскости  $x - y$ ,  $R_0 = 45$  – критическое число Рэлея для возникновения крупномасштабной конвекции в горизонтальном слое с теплоизолированными границами [2]. Параметр  $P_1 = 3a^2\omega/16\nu$  характеризует интенсивность акустического воздействия и пропорционален квадрату отношения амплитуды вибраций к толщине вязкого погранслоя. Главная (независящая от вертикальной координаты) часть возмущения температуры  $\vartheta(x, y)$  является конечной (не малой) величиной, в то время как градиент возмущения температуры мал.

С точностью до второго порядка малости получим для полей возмущений:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= 45 V_0(z) \nabla_2 \vartheta, \quad w_2 = -45 W_0(z) \Delta_2 \vartheta \\ T_2 &= \frac{1}{16} (z^6 - 5z^4 + 7z^2) \Delta_2 \vartheta + 3P_1 W_0(z) \sin x_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + 45 \Theta_0(z) (\nabla_2 \vartheta)^2 \\ W_0 &= \frac{1}{24} (z^2 - 1)^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь  $\nabla_2$  – оператор дифференцирования по переменным  $x_1, y_1$ ;  $\Delta_2 = \nabla_2^2$ . Вертикальная компонента скорости является малой по сравнению с продольными. В главном порядке за счет возникающего в жидкости продольного перепада поля температуры генерируется течение с кубическим профилем, направленное параллельно градиенту температуры – адвективное течение [11] с переменной вдоль слоя интенсивностью.

Условия разрешимости в четвертом порядке малости позволяют получить нелинейное амплитудное уравнение с периодическими коэффициентами. Изменяя подходящим образом масштабы времени, длины и амплитуды возмущения, это уравнение можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \vartheta_t + r \Delta \vartheta + \Delta^2 \vartheta &= \operatorname{div}[(\nabla \vartheta)^2 \nabla \vartheta] + b P^2 (\sin^2 x \vartheta_x)_x + \\ &+ P[(\cos x \vartheta_x)_x + a(\sin x \Delta \vartheta)_x + d \cos x \vartheta_{yy}] \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$r = \frac{77R_2}{510}, \quad P = \frac{77P_1}{170}, \quad a = \frac{5 - 6\operatorname{Pr}}{7\operatorname{Pr}}, \quad b = \frac{340}{539}, \quad d = \frac{13}{7}$$

Здесь и далее индексы у переменных  $x_1, y_1, t_4$  и у дифференциальных операторов опускаются; частные производные по соответствующим координатам обозначаются индексами у переменной  $\vartheta$ .

Параметр  $r$  пропорционален отклонению числа Рэлея от его критического значения в отсутствие звуковой волны,  $P$  характеризует интенсивность внешнего воздействия.

В плоской постановке, когда возмущение температуры не зависит от  $y$ , для стационарных решений можно понизить порядок амплитудного уравнения до второго:

$$N'' + rN = N^3 + P[\cos x N + a \sin x N'] + b P^2 \sin^2 x N \quad (3.4)$$

Здесь  $N = \vartheta'$  – горизонтальный тепловой поток; штрихом обозначается производная по продольной координате  $x$ . Постоянная интегрирования должна быть выбрана равной нулю, так как отсутствует внешний продольный нагрев слоя. При  $P = 0$  уравнение (3.4) совпадает с уравнением, изученным в [3].

**4. Линеинная задача устойчивости, плоские возмущения.** Рассмотрим влияние акустической волны на возникновение двумерной крупномасштабной конвекции в линейном приближении.

В случае слабого акустического воздействия решение представляется в виде рядов по малому параметру  $P$ . Добавка к критическому числу Рэлея имеет вид:

$$r_0 = 1/2 P^2 (a + b - 1) \quad (4.1)$$

Учитывая явный вид коэффициентов  $a$  и  $b$ , получаем, что слабое акустическое воздействие приводит к повышению критического числа Рэлея при малых числах Прандтля ( $Pr < 385/661 \approx 0.5824$ ) и понижению для больших. Наиболее опасными являются длинноволновые возмущения (характерный размер конвективного вала значительно больше длины акустической волны).

В противоположном предельном случае сильного акустического воздействия ( $P \rightarrow \infty$ ) для изучения линеаризованной задачи (3.4) применялся метод Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна [10]. Решение мало всюду, за исключением нулей  $\sin x$ , а вблизи точек  $x_n = \pi n$  возникают пограничные слои. При этом возможны два типа решений: для первого пограничные слои возникают вблизи узлов пульсационной скорости  $x_{2n+1}$ , а для второго – вблизи пучностей  $x_{2n}$ .

В первом случае вдали от точки  $x_{2n+1}$  решение асимптотически мало:

$$N = c \exp(-2\beta P(1 + \cos x)), \quad \beta = 1/4(a + \sqrt{a^2 + 4b}) \quad (4.2)$$

и быстро меняется вблизи узлов пульсационной скорости (1.1)  $x_{2n+1}$ . Вводя “быструю” координату  $\xi = \sqrt{P}(x - x_{2n+1})$ , получим следующее уравнение, справедливое внутри пограничного слоя (штрихами обозначены производные по  $\xi$ ):

$$N'' + a\xi N' + \left(\frac{r}{P} + 1 - b\xi^2\right)N = 0 \quad (4.3)$$

Уравнение (4.3) с помощью простого преобразования можно привести к уравнению Шредингера для квантового осциллятора [12], его решение, соответствующее наиболее опасным возмущениям и добавка к критическому числу Рэлея имеют вид:

$$N = c \exp(-\beta\xi^2) \quad (4.4)$$

$$r_0 = (2\beta - 1)P \quad (4.5)$$

Легко показать, что выражения  $2\beta - 1$  и  $a + b - 1$  имеют одинаковые знаки. Таким образом, как и для слабого акустического воздействия,  $r_0 > 0$  при  $Pr < 0.5824$  и  $r_0 < 0$  в противоположном случае.

Учет слагаемых следующего (нулевого) порядка по  $P$  дает поправку к (4.5)  $(1/2 - \beta)/\sqrt{a^2 + 4b}$ , уменьшающую по абсолютной величине отклонение критического числа Рэлея.

Во втором случае температура практически постоянна ( $N$  мало) вдали от пучностей скорости  $x_{2n} = 2\pi n$ :

$$N = c \exp(-2\alpha P(1 - \cos x)), \quad \alpha = 1/4(\sqrt{a^2 + 4b} - a) \quad (4.6)$$

и резко изменяется вблизи  $x_{2n}$ . В пограничном слое справедливо следующее уравнение, описывающее изменение  $N$  с “быстрой” координатой  $\zeta = \sqrt{P}(x - x_{2n})$ .

$$N'' - a\zeta N' + \left(\frac{r}{P} - 1 - b\zeta^2\right)N = 0 \quad (4.7)$$

Убывающее на бесконечности решение уравнения (4.7) и добавка к критическому числу Рэлея имеют вид:

$$N = c \exp(-\alpha\zeta^2) \quad (4.8)$$

$$r_0 = (1 + 2\alpha)(P - 1/2(a^2 + 4b)^{-1/2}) \quad (4.9)$$

Возмущения этого типа более опасны при  $\text{Pr} < 0.25$ . Нетрудно заметить, что  $r_0 > 0$ , т.е. при малых числах Прандтля наблюдается подавление двумерной конвекции акустическим воздействием.

При конечных значениях параметра  $P$  исследование линейной задачи проводилось численно, с использованием теории Флоке-Блоха и разложения в ряды Фурье:

$$N = \exp(ikx) \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{inx} \quad (4.10)$$

Квазиволновое число  $k$  может быть взято из первой зоны Бриллюэна:  $0 \leq k \leq 1/2$ . Постоянное слагаемое в разложении  $N$  не обязательно обращается в нуль, при этом рассматривается центральная часть слоя, продольные размеры которого велики по сравнению с длиной звуковой волны. В этом случае пространственно-однородный градиент температуры обязан своим существованием конвективному вихрю, продольный размер которого определяется длиной слоя.

В ходе расчетов удерживалось от 20 до 200 членов ряда (при больших  $P$ ). Показано, что наиболее опасными плоскими возмущениями всегда являются возмущения целого типа ( $k = 0$ ), для которых  $N$  является четной функцией координаты  $x$ . Таким образом, критические возмущения температуры  $\vartheta$  – нечетные (аддитивная постоянная в  $\vartheta$  несущественна). Кривые устойчивости  $r_0(P)$  для различных чисел Прандтля приведены на фиг. 2. Эти кривые достаточно хорошо описываются асимптотической зависимостью (4.5) (с учетом независимой от  $P$  поправки) уже при  $P \approx 1$ .

При больших  $P$ , когда справедливы соотношения (4.4)–(4.6), добавка к критическому числу Рэлея практически не меняется в пределах зоны Бриллюэна – зона вырождается в уровень. Схожее явление наблюдается в физике твердого тела при представлении блоховской волновой функции в виде суперпозиции локализованных атомных волновых функций – так называемый метод сильной связи [13].

Собственные функции  $\vartheta$  в пограничном слое вблизи точки  $x_{2n+1}$  имеют вид:

$$\vartheta = \vartheta_n + \frac{c_n}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta} \xi)$$

между двумя пограничными слоями температура остается практически постоянной:

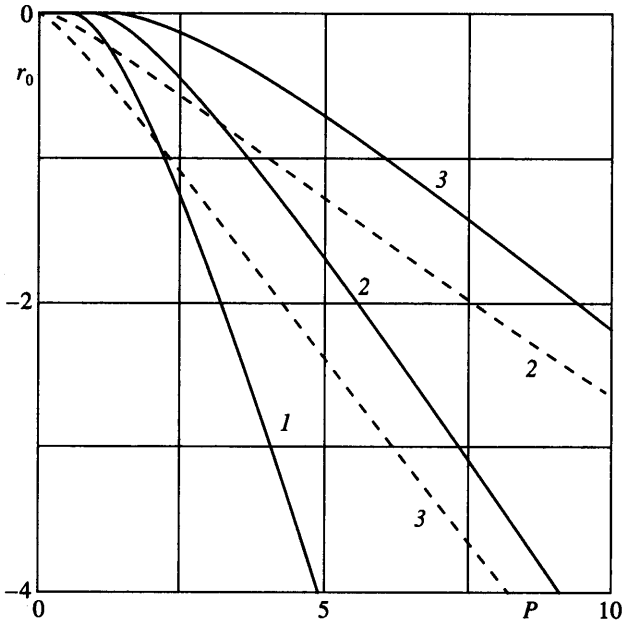
$$\vartheta = \vartheta_n + \frac{c_n}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \operatorname{sign}(x - x_{2n+1}) + A$$

где  $A$  – экспоненциально малые по  $P$  члены. Таким образом, взаимодействие между двумя пограничными слоями слабое, что и приводит к вырождению зоны Бриллюэна в уровень. Это вырождение означает, что  $c_n$  обладает своим фазовым множителем в  $n$ -м пограничном слое; постоянные  $\vartheta_n$  связаны очевидными соотношениями:  $\vartheta_n - c_n = \vartheta_{n-1} + c_{n-1}$ . Таким образом, распределение температуры имеет вид ступенчатых функций, а пограничные слои играют роль своеобразных теплоизоляторов.

**5. Учет пространственных возмущений.** При анализе пространственных возмущений обнаружено, что эффект подавления тепловой конвекции звуковой волной отсутствует. Нетрудно показать, что возмущения вида

$$\vartheta = \exp(iky - \lambda t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{inx}$$

при  $k \rightarrow 0$  (условно называемые ниже спиральными длинноволновыми) нечувствительны к акустическому воздействию: поправка к критическому числу Рэлея для этой моды равна нулю для любых  $P$ .



Фиг. 2. Кривые устойчивости  $r_0(P)$ . Сплошные линии – спиральные возмущения, штриховые – плоские. Кривые 1, 2, 3 соответствуют  $Pr = 0.01, 1, 10$

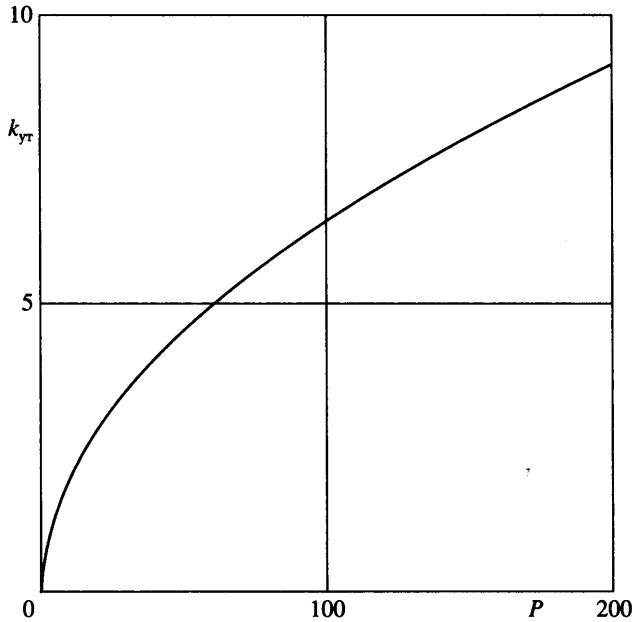
Однако спиральные длинноволновые возмущения более опасны, чем ячеистые (с конечными  $k$ ), лишь при достаточно малых числах Пекле. При  $P > P_c(Pr)$  длинноволновый минимум нейтральной кривой  $r(k)$  сменяется максимумом. Критическое значение  $P_c$  определялось численно: с ростом  $Pr$  от нуля до 0.0513  $P_c$  уменьшается от 0.5385 до 0.5327, а затем плавно возрастает, достигая значения 1.418 при бесконечном  $Pr$ . Таким образом, спиральные длинноволновые возмущения реализуют минимум нейтральной кривой только при достаточно слабом акустическом воздействии.

Дальнейшее увеличение  $P$  приводит к быстрому росту критического волнового числа (фиг. 3). Аналогично плоской моде неустойчивости возникают пограничные слои, локализованные вблизи узлов пульсационной скорости. Однако вне пограничных слоев интенсивность течения затухает менее быстро (по степенному закону, а не по экспоненциальному). Анализ собственных функций показал, что указанная мода неустойчивости является четной ( $\vartheta$  – четная функция координаты  $x$ ).

Кривые устойчивости течения относительно спиральных возмущений показаны на фиг. 2 сплошными линиями. Как видно, спиральные возмущения приводят к заметной дестабилизации течения при малых числах Прандтля. При  $Pr = 1$  наблюдается конкуренция плоских и спиральных возмущений (линии 2), а при больших числах Прандтля (линии 3) более опасны плоские. Численное исследование устойчивости течения показало, что произвольные пространственные возмущения (с двумерным квазиволновым вектором  $k$ ) менее опасны.

Таким образом, спиральные возмущения являются наиболее опасными при малых числах Прандтля. Акустическое течение слабой интенсивности оказывает лишь ориентирующее действие (развиваются модулированные валы, оси которых направлены вдоль оси  $x$ ), критическое число Рейля для возникновения крупномасштабной конвекции не меняется.

С увеличением  $P$  критическими становятся спиральные ячеистые возмущения, по отношению к которым наблюдается сильная дестабилизация. При стремлении  $P$  к



Фиг. 3. Зависимость критического волнового числа для спиральных возмущений от числа Пекле.  $Pr = 1$

бесконечности критические возмущения локализуются вблизи узлов пульсационной скорости (застойных точек акустического течения) – возникают пограничные слои.

При умеренных числах Прандтля наблюдается конкуренция спиральных и плоских возмущений, а при больших  $Pr$  – дестабилизация течения относительно плоских возмущений. При достаточно больших  $P$  развиваются возмущения в виде пограничных слоев, локализованных вблизи узлов пульсационной скорости. Другой тип пограничных решений (4.6), (4.8) не является критическим.

**6. Случай малых чисел Прандтля.** В пределе  $Pr \rightarrow 0$  коэффициент  $a$  в амплитудном уравнении обращается в бесконечность. В уравнении появляется малый параметр, что позволяет искать решение в виде разложений по обратным степеням  $a$ . Ввиду того, что малый параметр появляется при старшей производной, а главное слагаемое  $(\sin x \Delta \vartheta)_x$  содержит периодический знакпеременный коэффициент, следует ожидать появления погранслоевых решений.

Как было показано в п. 4,5 при малых числах Прандтля наиболее опасны спиральные возмущения четного типа. Вдали от пограничного слоя решение имеет вид:

$$\vartheta^{(o)} = \text{ch} kx + a^{-1} f_1(x) \quad (|x| < \pi) \quad (6.1)$$

Функция  $f_1(x)$  имеет следующую асимптотику вблизи  $x = \pi$ :

$$f_1(x) \approx k \text{sh} \pi k \left( 1 - \frac{dk^2}{1+k^2} \right) (\pi - x) \ln(\pi - x) \quad (6.2)$$

В пограничном слое вблизи  $x = \pi$ , вводя “быструю” координату  $\xi = \sqrt{a}(\pi - x)$ , получаем:

$$\vartheta^{(i)} = b_0 \left( 1 + \frac{k^2 \xi^2}{2a} \right) + \frac{b_1}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{\pi}{2P}} \int_0^{\xi} \text{erf} \left( \sqrt{\frac{P}{2}} \eta \right) d\eta + \frac{f_2(\xi)}{a^{3/2}} \quad (6.3)$$



Асимптотическое поведение  $f_2(\xi)$  при больших  $\xi$  описывается формулой:

$$f_2(\xi) = b_1 \left( k^2 \frac{\xi^3}{6} + \frac{k^2 - r - P}{P} \xi \ln \xi \right) \quad (6.4)$$

Срачивая разложения (6.1), (6.3) (с точностью до  $a^{-2}$ ), получим:

$$b_0 = \text{ch} \pi k, \quad b_1 = -k \text{sh} \pi k$$

Учитывая формулы (6.2), (6.4), можно найти нейтральную кривую при малых числах Прандтля:

$$r = k^2 \left( 1 - \frac{Pd}{1+k^2} \right) \quad (6.5)$$

Минимизируя выражение (6.5), определяем волновое число  $k_m$  и добавку к критическому числу Рэлея  $r_0$ :

$$k_m^2 = \sqrt{Pd} - 1, \quad r_0 = -k_m^4 \quad (6.6)$$

Как видно из (6.6), ячеистые возмущения наиболее опасны при  $P > 7/13$ , т.е. при  $P > 0.5385$  (см. п. 5), при этом наблюдается дестабилизация равновесия с помощью стоячей звуковой волны. При больших  $P$  справедлив линейный закон зависимости для добавки к критическому числу Рэлея:  $r_0 = -k_m^4 = -13P/7$ .

Асимптотические формулы (6.5), (6.6) достаточно хорошо описывают ситуацию при  $\text{Pr} \leq 0.01$ , в том числе линию 1 на фиг. 2.

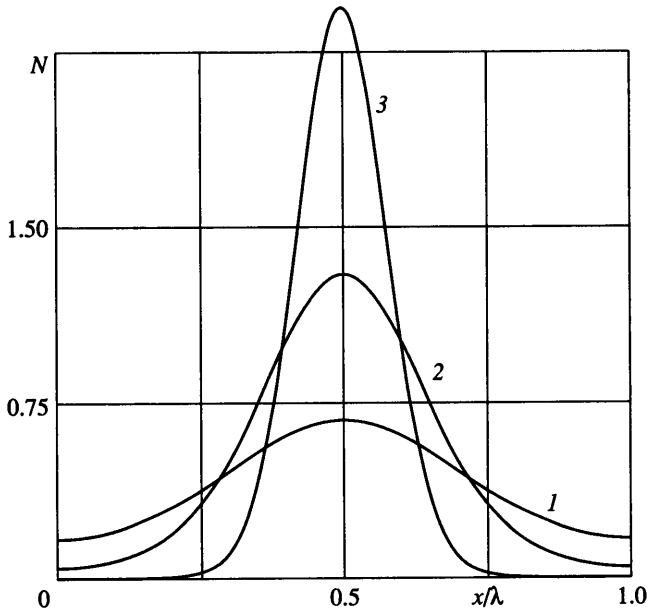
**7. Надкритические режимы и их устойчивость.** На основе уравнения (3.4) с помощью разложений в ряды Фурье (4.10) изучены одномерные решения, соответствующие плоским конвективным течениям. Рассматривались числа Прандтля, для которых критическими являются плоские возмущения целого типа ( $k = 0$ ). Показано, что решение отвечает мягко, вблизи порога устойчивости справедлив корневой закон (при малых  $P$  это легко показать аналитически). Для слабого акустического воздействия наибольший вклад в решение вносит нулевая гармоника, развивается крупномасштабный (по сравнению с длиной звуковой волны) конвективный вихрь. С увеличением  $P$  растет вклад высших гармоник.

При достаточно большой надкритичности для продольного теплового потока справедливо выражение:

$$r \rightarrow \infty: N \approx \sqrt{r} \left( 1 - \frac{1}{2r} (P \cos x + bP^2 \sin^2 x) \right) \quad (7.1)$$

В этом случае амплитуда возмущений растет пропорционально  $\sqrt{r}$ ; звуковая волна оказывает малое воздействие на интенсивное конвективное течение. Первое слагаемое описывает поле температуры в центре крупномасштабного (по сравнению с длиной звуковой волны) вихря и может быть получено из результатов работы [3].

Зависимость  $N$  от горизонтальной координаты показана на фиг. 4 для  $\text{Pr} = 10$ . При достаточно больших  $P$  решение отлично от нуля лишь в узком переходном слое. Линии тока конвективного течения, соответствующие тем же значениям  $P$  и  $\text{Pr}$ , показаны на фиг. 5. При малой интенсивности звуковой волны возникает крупномасштабный конвективный вихрь, на фоне которого развиваются вихри, генерируемые акустическим течением (фиг. 5.1). С увеличением  $P$  интенсивность "акустических" вихрей растет, а крупномасштабный вихрь становится практически незаметным (фиг. 5.2). В дальнейшем образуется система изолированных вихрей, локализованных вблизи точек  $x_{2n+1} = (2n+1)\pi$  (фиг. 5.3).



Фиг. 4. Профили горизонтального теплопотока  $N$  для двумерного надкритического течения:  $r = 0$ ,  $Pr = 10$ . Кривые 1, 2, 3 –  $P = 1, 3, 10$

Перейдем к обсуждению задачи устойчивости надкритического течения относительно пространственных возмущений. Для нормальных возмущений вида

$$\vartheta_p = f(x) \exp(-\lambda t + ik_x x + ik_y y)$$

где  $f(x) = f(x + 2\pi)$ , получим уравнение

$$\begin{aligned} -\lambda f = & -r\Delta f - \Delta^2 f + 3D(N_0^2 Df) - k_y^2 N_0^2 f + bP^2 D(\sin^2 x Df) + \\ & + P[D(\cos x Df) + aD(\sin x Df) - dk_y^2 \cos x f] \end{aligned} \quad (7.2)$$

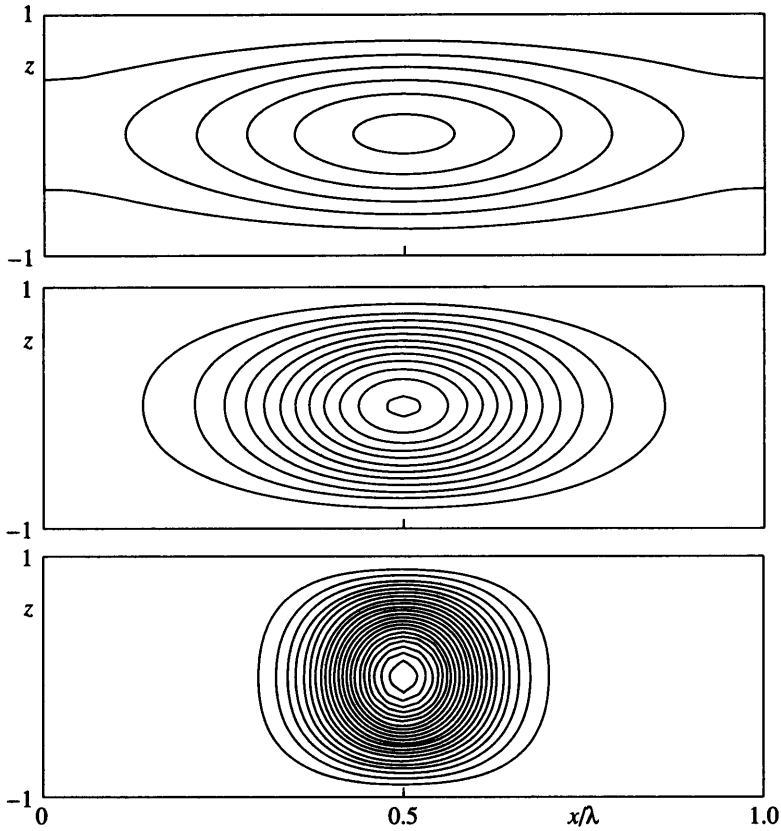
$$Df = f' + ik_x f, \quad \Delta f = D^2 f - k_y^2 f$$

Задача (7.2) решалась численно с помощью разложений в ряды Фурье. Показано, что наиболее опасными являются возмущения целого типа ( $\text{с } k_x = 0$ ).

Среди пространственных возмущений важную роль играют спиральные длинноволновые ( $k_y \rightarrow 0$ ). Можно показать, что критерий устойчивости вторичного течения по отношению к этой моде выглядит следующим образом:

$$\langle N_0^2 \rangle - r > 0 \quad \text{или} \quad A_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 - r > 0 \quad (7.3)$$

Угловыми скобками обозначается осреднение по периоду основного течения  $\lambda$ . При  $Pr > 0.5824$  двумерные возмущения возникают при  $r_0 < 0$  (дестабилизирующее действие акустической волны), т.е. вблизи порога условие (7.3) заведомо выполнено. Легко убедиться, что при достаточно больших надкритичностях, когда справедливо выражение (7.1), условие устойчивости (7.3) нарушается, т.е. диапазон значений параметра  $r$ , при котором основное решение  $N_0$  является устойчивым относительно спиральной длинноволновой моды, ограничен сверху.



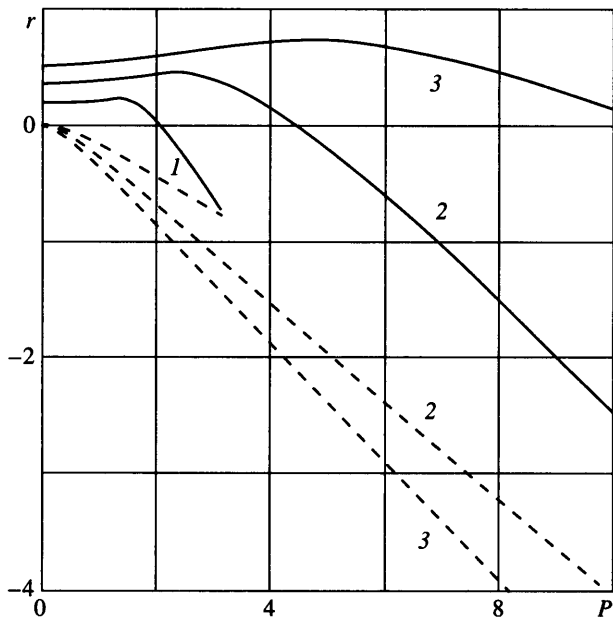
Фиг. 5. Линии тока вторичного течения для того же набора параметров, что и на фиг. 4. Изолинии проведены через 0.2

Однако по мере увеличения интенсивности звуковой волны возрастает роль спиральных ячеистых возмущений, обладающих конечными значениями  $k_y$ . Длинноволновый минимум сменяется максимумом, критическое волновое число  $k_y$  быстро растет с  $P$ .

Границы области устойчивости для разных чисел Прандтля показаны на фиг. 6. Нижний набор кривых соответствует линейной границе устойчивости основного течения  $r_0(P)$  (см. разд. 4–5 и фиг. 2), верхние кривые определяются из условия устойчивости вторичного течения относительно спиральных возмущений. Переход от спиральной длинноволновой к спиральной ячеистой моде происходит плавно вблизи максимумов кривых  $r(P)$ . Область устойчивости плоского вторичного течения находится между соответствующими кривыми. Как видно, с ростом интенсивности акустического воздействия область устойчивости увеличивается. Решения  $N_0$ , показанные на фиг. 4, являются устойчивыми.

Слабо-нелинейное исследование (при  $r - r_0 \ll 1$ ) продольных модулированных валов (спиральных возмущений) показало мягкий характер их ветвления. Вблизи порога периодические по обоим продольным координатам вторичные течения являются устойчивыми.

**Заключение.** Рассмотрено влияние стоячей звуковой волны на возникновение крупномасштабной тепловой конвекции в горизонтальном слое с теплоизолированными границами. В длинноволновом приближении определено основное течение и



Фиг. 6. Кривые устойчивости плоского вторичного течения. Линии 1–3 проведены для  $Pr = 1, 2, 10$ ; сплошные линии – спиральные возмущения, штриховые – плоские

сформулировано амплитудное уравнение, описывающее крупномасштабную тепловую конвекцию в слое.

Показано, что звуковая волна приводит к дестабилизации слоя – критическое число Рэлея уменьшается с увеличением интенсивности внешнего воздействия. При малых числах Прандтля наиболее опасными являются модулированные продольные конвективные вали, при больших числах Прандтля – плоские возмущения. В обоих случаях критическими являются возмущения целого типа, период которых совпадает с периодом акустического течения. При увеличении интенсивности звукового воздействия возмущения локализируются вблизи узлов пульсационной скорости. Соседние вихри слабо взаимодействуют друг с другом, между ними жидкость практически неподвижна.

Вблизи порога устойчивости изучены плоские и спиральные вторичные конвективные течения. Показан мягкий характер ветвления и устойчивость регулярных вторичных течений при малых надкритичностях. Численные исследования двумерных вторичных течений показали, что с ростом надкритичности они теряют устойчивость относительно поперечной модуляции.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке из средств гранта PE-009-0 Американского фонда гражданских исследований и развития (АФГИР), грантов 00-01-00450 и 01-01-06122(мас) Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1981.2003.1).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rayleigh, Lord.* On the convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the underside // *Phil. Mag.* 1916. Ser. 6. V. 32, P. 529–546.
2. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

3. *Непомнящий А.А.* Об устойчивости пространственно-периодических конвективных движений в горизонтальном слое с теплоизолированными границами // Гидродинамика: сб. науч. тр. Пермь: Пермск. пед. ин-т, 1976. Вып. 9. С. 53–59.
4. *Любимов Д.В., Шкляев С.В.* Влияние продольного течения на возникновение конвекции в подогреваемом снизу горизонтальном слое // 11-я Междунар. зимняя школа по механике сплошных сред. Тез. докл. Пермь, 1997. Т. 2. С. 201.
5. *Rayleigh, Lord.* Theory of Sound. v. 2. N.Y.: Dover, 1945. Перевод: Стрэтт Дж. (Лорд Рэлей). Теория звука. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1944. 476 с.
6. *Любимов Д.В.* О тепловой конвекции в акустическом поле // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 2. С. 28–36.
7. *Ниборг В.* Акустические течения. // Физическая акустика / Под ред. У. Мэсона. М.: Мир, 1969. Т. 2. Ч. Б. С. 302–377.
8. *Longuet-Higgins M.S.* Mass transport in water waves // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1953. V. 245. № 903. P. 535–581.
9. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
10. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
11. *Бирих Р.В.* О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. 1966. № 3. С. 69–72.
12. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. М.: Физматлит, 2001. 803 с.
13. *Займан Дж.* Принципы теории твердого тела. М.: Мир, 1974. 472 с.

Пермь

Поступила в редакцию  
17.VII.2003