

УДК 533.6.011.72

© 2004 г. Н. А. ОСТАПЕНКО, А. М. СИМОНЕНКО

АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТОНКИХ ЗВЕЗДООБРАЗНЫХ ТЕЛ СО СВЕРХЗВУКОВЫМИ ПЕРЕДНИМИ КРОМКАМИ

Построена теория обтекания тонких конических тел со звездообразным поперечным сечением на режимах с присоединенными ударными волнами к передним кромкам. С использованием суперпозиции решений линейных задач обтекания V -образного крыла – цикла звездообразного тела под углами атаки и скольжения со сверхзвуковыми передними кромками найдены аэродинамические характеристики тонкого звездообразного тела при различном числе отражений от консолей крыла возмущений, идущих с передних кромок циклов.

Ключевые слова: тонкие пирамидальные тела со звездообразным поперечным сечением, сверхзвуковое обтекание, линейная теория, аэродинамические характеристики.

Результаты теоретических и экспериментальных исследований тел минимального сопротивления при сверхзвуковых скоростях свидетельствуют, что значительного снижения сопротивления в некотором диапазоне изменения удлинения λ можно достичь лишь при замене тела вращения эквивалентным телом пространственной формы: с некруговым поперечным сечением [1–6].

Простейшим классом пространственных тел с заданным удлинением, в котором при сверх- и гиперзвуковых скоростях может быть выбрано тело с аэродинамическим сопротивлением, близким к минимальному, является класс пирамидальных тел со звездообразным поперечным сечением. Однако эксперименты [5] и оценки [7] указывали на отсутствие у конических звездообразных тел с равномерным распределением массы по объему положительного запаса статической устойчивости в наиболее интересном для практических приложений интервале изменения λ . Поэтому для обеспечения запаса статической устойчивости таких тел возникла необходимость создания дополнительных стабилизирующих устройств, которые, как правило, приводят к значительному увеличению сопротивления. Указанные обстоятельства снижали интерес к звездообразным телам.

Тела со звездообразным поперечным сечением стали рассматриваться как перспективные летательные аппараты малого сопротивления и высокого аэродинамического качества K для сверх- и гиперзвуковых полетов, когда в результате решения вариационной задачи были построены [8] и затем экспериментально апробированы [6] звездообразные тела со специальной формой задней кромки, обеспечивающей положительный запас статической устойчивости без потерь в аэродинамическом сопротивлении.

В частности, было установлено [6], что у тел со специальной формой задней кромки производная нормальной силы по эффективному углу атаки на интервале линейной зависимости $C_n(\alpha)$ близка к C_n^α у звездообразных тел, имеющих плоский донный срез и те же определяющие геометрические параметры λ , r , n , а также в несколько раз превышает C_n^α у эквивалентных тел вращения. Здесь $\lambda = L/2R_0$ – удлинение эквивалентного тела вращения с длиной L и радиусом донного среза R_0 . $r = r_1/R_0$ и n – соот-

ответственно относительный минимальный радиус донного среза (параметр формы) и целое число симметричных циклов звездообразного тела.

Высокие несущие свойства и малое сопротивление звездообразных тел определяют их важные баллистические свойства, создающие новые преимущества по сравнению с эквивалентными телами вращения [9–11]. В частности, эффективное демпфирование колебаний тела соответствующей формы около центра масс в свободном полете обеспечивают высокие производные C_n^α и $K^\alpha = C_n^\alpha / C_x - 1$ (C_x – коэффициент сопротивления тела). Таким образом, знание указанных аэродинамических характеристик или способов их оценки важно при проектировании летательных аппаратов звездообразной формы.

Экспериментальные данные о коэффициенте нормальной силы звездообразных тел весьма ограничены. Они относятся либо к телам малого удлинения $\lambda = 1.3$ [5], либо к большим числам Маха $M = 6$ [6]. Такое положение обусловлено развитием исследований аэродинамики пространственных тел минимального сопротивления. В экспериментальных исследованиях из всех аэродинамических характеристик главное внимание уделялось сопротивлению [1–4]. Имеющиеся теоретические данные [12], полученные в рамках теории [13], относятся к весьма умеренным сверхзвуковым скоростям и режимам обтекания с отошедшей ударной волной на передних кромках, тогда как указанные выше преимущества звездообразных тел реализуются в полной мере на режимах обтекания с присоединенной ударной волной на передних кромках [1–6].

Ниже построена линейная теория тонких пирамидальных тел со звездообразным поперечным сечением на режимах обтекания с присоединенными ударными волнами на передних кромках. Основу теории составляет решение линейной задачи о V -образном крыле со сверхзвуковыми передними кромками под малыми углами атаки и скольжения [14]. Аэродинамические характеристики тонкого звездообразного тела находятся в результате суперпозиции решений линейных задач обтекания V -образных крыльев – циклов тела. Получены выражения для векторов главной силы и момента, действующих на звездообразное тело при различном числе отражений возмущений, идущих с передних кромок, от поверхности тела. Установлено, что главная сила компланарна плоскости, содержащей ось тела и вектор скорости невозмущенного потока, а продольная компонента момента равна нулю.

1. Постановка задачи и основные предположения. Пирамидальное тело со звездообразным поперечным сечением состоит из целого числа n симметричных циклов, геометрия которых, как и тела в целом, определяется тремя безразмерными параметрами (фиг. 1, a):

$$n, r_1/L, R_1/L \quad (1.1)$$

В (1.1) r_1 и R_1 – соответственно минимальный и максимальный размеры донного сечения тела, L – длина тела. На фиг. 1, a R_0 – радиус донного среза эквивалентного по длине и площади миделевого сечения тела вращения.

Поскольку для решения задачи сверхзвукового обтекания тонкого звездообразного тела будет использована теория малых возмущений (линейная теория), причем малы будут предполагаться возмущения параметров набегающего однородного потока с числом Маха $M > 1$, геометрические параметры (1.1) и их связи должны удовлетворять следующим оценкам:

$$\frac{r_1}{L} \equiv \frac{r}{2\lambda} \equiv \operatorname{tg} \xi \ll 1, \quad \frac{r_1}{R_1} \equiv \rho = \frac{\operatorname{tg} \xi}{\operatorname{tg} \beta_k} \ll 1, \quad \operatorname{tg} \beta_k \equiv \frac{R_1}{L} \quad (1.2)$$

Оба условия в (1.2) – это условия тонкости пространственного циклически-симметричного конического тела, из которых второе в главном члене с точностью до множи-

тела ответственно за угол заострения передней кромки звездообразного тела. Действительно, соотношение для α_k – полуугла заострения передней кромки с углом стреловидности $\pi/2 - \beta_k$:

$$\operatorname{tg} \alpha_k = \frac{\rho \sin \gamma_n}{[1 - \rho \cos \gamma_n] \cos \beta_k}, \quad \gamma_n = \frac{\pi}{n} \quad (1.3)$$

Ниже таким режимам обтекания отвечает условие, накладываемое на угол β_k , согласно которому передние кромки тела располагаются вне конуса Маха невозмущенного потока с вершиной, совпадающей с носиком тела:

$$\operatorname{tg} \beta_k > (M^2 - 1)^{-1/2} \quad (1.4)$$

К неравенствам (1.2) и (1.4), определяющим малые параметры линейной теории обтекания тонкого звездообразного тела и режимы обтекания, следует добавить условия малости углов атаки α и скольжения ϑ (фиг. 1, а): $\alpha \ll 1$, $\vartheta \ll 1$.

Пусть для определенности плоскость симметрии произвольного цикла звездообразного тела совпадает с плоскостью (X, Y) .

Так как при наличии условия (1.4) каждый из n циклов звездообразного тела обтекается независимо, достаточно найти общее решение задачи обтекания V -образного крыла – цикла звездообразного тела. Крыло должно иметь сверхзвуковые передние кромки и быть ориентированным относительно скорости невозмущенного потока под произвольными малыми углами атаки α_i и скольжения ϑ_i (фиг. 1, б), определяемыми через геометрические параметры звездообразного тела (1.1) и его углы атаки и скольжения (α , ϑ).

После вычисления действующих на V -образное крыло силы и момента могут быть определены аэродинамические характеристики звездообразного тела в целом путем суперпозиции решений для каждого из циклов.

Вместо совокупности безразмерных параметров (1.1), определяющих геометрию звездообразного тела, удобно ввести следующие три параметра: n , r , λ , обуславливающие его отличие и связь с эквивалентным по удлинению λ телом вращения. Эти параметры и углы между осью тела и его передними кромками – β_k , а также между осью тела и центральными хордами циклов – ξ связаны соотношениями

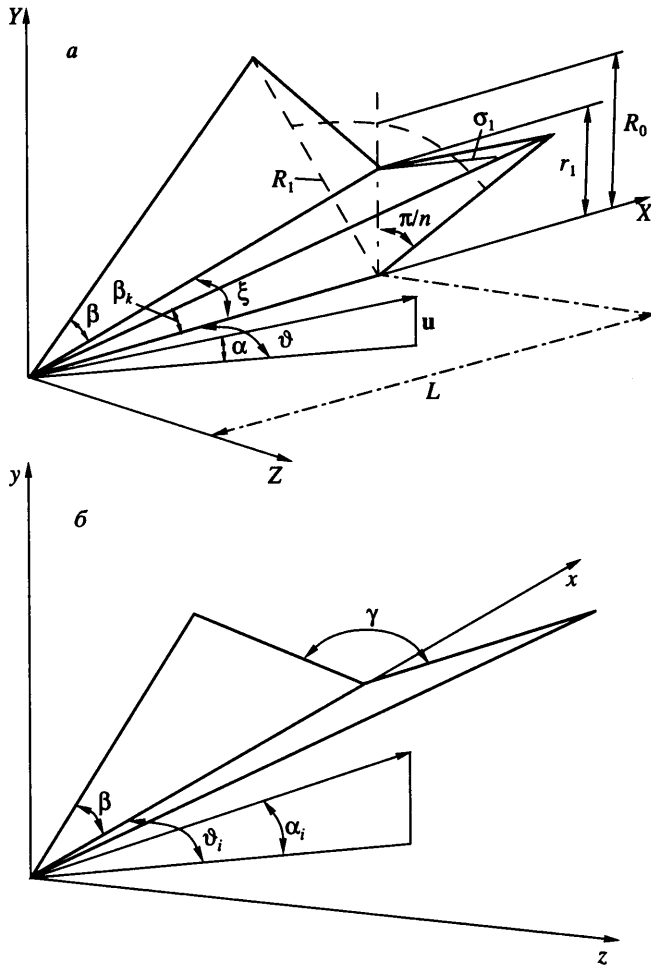
$$\frac{2}{\gamma_n} \sin \gamma_n r \lambda \operatorname{tg} \beta_k = 1, \quad r = 2\lambda \operatorname{tg} \xi \quad (1.5)$$

Задание величин n , r , λ , с учетом формул (1.5) полностью определяет форму пирамидального тела со звездообразным поперечным сечением. Геометрические параметры V -образного крыла – цикла звездообразного тела (фиг. 1, б) могут быть найдены при заданных параметрах n , r , λ , из соотношений

$$\operatorname{tg} \beta \cos(\gamma/2) = \frac{\operatorname{tg} \beta_k \cos \gamma_n - \operatorname{tg} \xi}{1 + \operatorname{tg} \xi \operatorname{tg} \beta_k \cos \gamma_n}$$

$$\operatorname{tg} \beta \sin(\gamma/2) = \frac{2 \operatorname{tg} \beta_k \sin \gamma_n}{2 + \sin(2\xi)[\operatorname{tg} \beta_k \cos \gamma_n - \operatorname{tg} \xi]}$$

Для установления связи между углами атаки α и скольжения ϑ пирамидального тела и углами атаки α_i и скольжения ϑ_i V -образного крыла (фиг. 1) введем нумерацию циклов ($i \in [1, n]$) таким образом, что $i = 1$ соответствует цикл, изображенный на фиг. 1, а. Плоскости симметрии циклов с номерами $1 < i \leq n$ повернуты против часовой стрелки на угол $2(i - 1)\gamma_n$. Тогда между ортами $\mathbf{i}_i, \mathbf{j}_i, \mathbf{k}_i$ системы координат, связанной с V -образ-



Фиг. 1

ным крылом – i -тым циклом звездообразного тела (фиг. 1, a), и ортами \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} системы координат, связанной с телом (фиг. 1, b), будут справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_i &= \cos \xi \mathbf{i} + \sin \xi (\cos [2\gamma_n(i-1)] \mathbf{j} - \sin [2\gamma_n(i-1)] \mathbf{k}) \\ \mathbf{j}_i &= -\sin \xi \mathbf{i} + \cos \xi (\cos [2\gamma_n(i-1)] \mathbf{j} - \sin [2\gamma_n(i-1)] \mathbf{k}) \\ \mathbf{k}_i &= \sin [2\gamma_n(i-1)] \mathbf{j} + \cos [2\gamma_n(i-1)] \mathbf{k} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь соответствующие члены не линеаризованы по малому углу $\xi = \arctg(r_1/L)$ (фиг. 1, a).

Так как для единичного вектора скорости невозмущенного потока в линеаризованном виде эквивалентны представления $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \alpha \mathbf{j} + \vartheta \mathbf{k}$ и $\mathbf{u} = \mathbf{i}_i + \alpha_i \mathbf{j}_i + \vartheta_i \mathbf{k}_i$, с использованием (1.6) найдем связи между малыми углами атаки и скольжения V -образного крыла и звездообразного тела:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= -\sin \xi + \cos \xi \{ \alpha \cos [2\gamma_n(i-1)] - \vartheta \sin [2\gamma_n(i-1)] \} \\ \vartheta_i &= \alpha \sin [2\gamma_n(i-1)] + \vartheta \cos [2\gamma_n(i-1)] \end{aligned} \quad (1.7)$$

В соответствии с линейной теорией обтекания V-образного крыла со сверхзвуковыми передними кромками [14] коэффициент давления Cp_i на правой (верхний знак) и левой (нижний знак) консолях (фиг. 1, б) в эллиптической области конического течения при j -отражениях от поверхности крыла характеристик, идущих с передних кромок, определяется по формуле

$$Cp_i = j(Cp_{Li} + Cp_{Ri}) + Cp_j f_1(R) + \frac{2}{\pi}(Cp_{Ri} - Cp_{Li})f_{2,3}(j, R)$$

$$f_1(R) = \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \arctg \left[\operatorname{ctg} \varphi_C \frac{(1 - R^{2\sigma})}{(1 + R^{2\sigma})} \right] \right\}$$

$$f_{2,3}(j, R) = \arctg \left[\operatorname{tg} \left((-1)^j \frac{\varphi_C}{2} + j \frac{\pi}{2} \right) \frac{(1 \pm R^\sigma)}{(1 \mp R^\sigma)} \right]$$

(1.8)

$$j\pi \leq \varphi_C = \sigma \arcsin \left(\frac{\sqrt{M^2 \sin^2 \beta - 1}}{\sin \beta \sqrt{M^2 - 1}} \right) \leq (1 + j)\pi, \quad \sigma = \frac{\pi}{\gamma}$$

$$R \in [0, 1], \quad \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{x} = \frac{2R}{(1 + R^2)\sqrt{M^2 - 1}}$$

$$Cp_j = Cp_{Li}, \quad j = 2k; \quad Cp_j = Cp_{Ri}, \quad j = 2k + 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь индексы у $f_{2,3}$ отвечают соответственно верхнему и нижнему знакам. Коэффициенты давления на левой Cp_{Li} и правой Cp_{Ri} консолях крыла в областях однородных потоков за присоединенными к передним кромкам крыла волнами сжатия или расширения вычисляются по формуле Аккерета:

$$Cp_{L,Ri} = \frac{2u_n^2}{\sqrt{M_n^2 - 1}} \alpha_{L,Ri}, \quad u_n = \sin \beta, \quad M_n = M \sin \beta \quad (1.9)$$

Здесь u_n и M_n – главные члены нормальной к передним кромкам составляющей скорости невозмущенного потока u и соответствующее число Маха; $\alpha_{L,Ri}$ – углы атаки консолей крыла по отношению к составляющим скорости u в плоскостях, перпендикулярных соответственно левой и правой передним кромкам, вычисляемые по формуле

$$\alpha_{L,Ri} = -\frac{1}{\sin \beta} \left[\alpha_i \sin \left(\frac{\gamma}{2} \right) \pm \vartheta_i \cos \left(\frac{\gamma}{2} \right) \right] \quad (1.10)$$

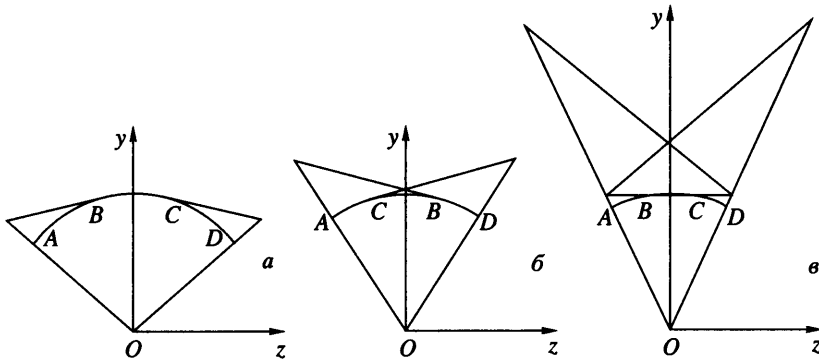
Здесь верхний знак относится к левой, а нижний – к правой передней кромке крыла (фиг. 1, б).

Принимая во внимание выражения (1.7) и (1.10), найдем формулы, определяющие углы атаки α_{Li} и α_{Ri} через углы атаки и скольжения звездообразного тела:

$$\alpha_{L,Ri} = \frac{1}{\sin \beta} \left\{ \sin \xi \sin \left(\frac{\gamma}{2} \right) \mp \alpha \sin \left[2\gamma_n(i-1) \pm \frac{\gamma}{2} \right] \mp \vartheta \cos \left[2\gamma_n(i-1) \pm \frac{\gamma}{2} \right] \right\} \quad (1.11)$$

Нетрудно установить, что при углах α и ϑ , равных нулю, соотношение (1.11) в главных членах определяет угол α_k цикла звездообразного тела (1.3). Так как в теории малых возмущений α_{Li} и α_{Ri} должны быть малыми, то должно выполняться и асимптотическое неравенство $\sin \xi \sin(\gamma/2)/\sin \beta \ll 1$.

Таким образом, соотношения (1.8), (1.9) и (1.11) полностью определяют распределение давления по поверхности произвольного цикла тонкого звездообразного тела со сверхзвуковыми передними кромками.



Фиг. 2

На фиг. 2 приведены возможные картины характеристических линий около V-образного крыла в плоскости $x = \text{const}$ в случаях отсутствия отражений характеристик, идущих с передних кромок, от поверхности консолей $j = 0$ (а, б) и в случае одного отражения $-j = 1$ (в). На рисунках ABCD – дуги конуса Маха, которых в точках B и C касаются либо характеристики, присоединенные к передним кромкам крыла (а, б), либо характеристики, отраженные от поверхности крыла (в).

2. Аэродинамические характеристики тонких звездообразных тел. Располагая формулой для распределения коэффициента давления по поверхности V-образного крыла в эллиптической области конического течения (1.8) и в областях однородных потоков, ограниченных характеристическими поверхностями и конусом Маха, можно вычислить главную силу и момент, действующий на звездообразное тело относительно начала связанной с телом системы координат X, Y, Z (фиг. 1, а). Если характеристические плоскости, идущие с передних кромок, отражаются от консолей крыла (фиг. 2, в), то положение линий их отражения, задающих границы областей однородных потоков с различным постоянным давлением в них, определяется выражением

$$\text{tg } \varphi_m = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1} \cos(\varphi_c / \sigma - m\gamma)}, \quad m = 0, 1, \dots, j, \quad j \leq \frac{\varphi_c}{\pi} \quad (2.1)$$

Здесь j , как и в разд. 1, – количество отражений, т.е. максимальное целое число, удовлетворяющее выписанному неравенству; m – номер отражения; $m = 1$ – первое отражение характеристической плоскости, присоединенной к передней кромке, от консоли крыла; φ_m – полярный угол, отсчитываемый от центральной хорды в плоскости консоли крыла; $m = 0$ – отражения отсутствуют (фиг. 2 а, б), $\varphi_0 = \beta$ – угол при вершине консоли.

При $\varphi_c \leq \pi$, что отвечает структурам характеристических линий в отсутствие отражения возмущений от консолей крыла – цикла звездообразного тела (фиг. 2, а, б), формула для коэффициентов нормальных сил, действующих на правую и левую грани произвольного i -го цикла звездообразного тела имеет вид

$$C_{n_{L, Ri}} = \frac{1}{S_M} \int_S C p_i dS = \frac{L^2}{2S_M} \left\{ \int_0^b \frac{C p_i(\varphi) d(\text{tg } \varphi)}{(1 - \text{tg } \sigma_1 \text{tg } \varphi)^2} + \frac{(c - b) C p_{L, Ri}}{(1 - b \text{tg } \sigma_1)(1 - c \text{tg } \sigma_1)} \right\}$$

$$\frac{1}{L^2} dS = \frac{d(\text{tg } \varphi)}{2(1 - \text{tg } \sigma_1 \text{tg } \varphi)^2}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}, \quad c = \text{tg } \beta \quad (2.2)$$

$$\text{tg } \sigma_1 = \frac{1}{\sin \beta} \sqrt{\sin^2 \beta_k [1 - 2\rho \cos \gamma_n + \rho^2] - \sin^2 \beta}$$

Силы (2.2) действуют в направлениях, противоположных внешним единичным векторам, нормальным к левой (L) и правой (R) консолям каждого из n циклов тела. В базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, указанные векторы определяются соотношениями

$$\mathbf{n}_{Li} = \{0, \sin(\gamma/2), \cos(\gamma/2)\}, \quad \mathbf{n}_{Ri} = \{0, \sin(\gamma/2), -\cos(\gamma/2)\}$$

С использованием связей (1.9) получим следующие представления для этих векторов в базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{L, Ri} &= -\sin\xi \sin(\gamma/2)\mathbf{i} \pm \sin\xi \mathbf{j} \pm \cos\xi \mathbf{k} \\ \xi &= [2\gamma_n(i-1) \pm \gamma/2] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Выражение (2.3) выписано в приближении $\cos\xi = 1 + O(\xi^2)$. Верхний и нижний знаки соответствуют левой (L) и правой (R) консолям крыла. Оставлен нелинеаризованным множитель $\sin\xi$.

В (2.2) Cp_i и $Cp_{L, Ri}$ определяются по формулам (1.8) и (1.9), σ_1 – угол стреловидности задней кромки грани тонкого звездобразного тела, являющийся малой величиной. Линейные члены относительно угла σ_1 оставлены, так как после определения распределения давления в циклах звездобразного тела (разд. 1), его аэродинамические характеристики могут быть вычислены с большей точностью. Ниже это будет сделано с сохранением малых линейных членов теории тонкого звездобразного тела по сравнению с единицей.

Принимая во внимание (1.8), (1.9) и (2.2), найдем

$$\begin{aligned} Cn_{L, Ri} &= \frac{4\lambda^2}{\pi} \frac{\sin^2\beta}{\sqrt{M^2 \sin^2\beta - 1}} \left\{ \frac{(c-b)}{(1-btg\sigma_1)(1-ctg\sigma_1)} \alpha_{L, Ri} + \right. \\ &\quad \left. + 2b \left[(I_1 + 4btg\sigma_1 I_4) \alpha_{Li} + (I_{3,2} + 4btg\sigma_1 I_{6,5}) (\alpha_{Ri} - \alpha_{Li}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$I_1 = \int_0^1 f_1(R) u(R) dR, \quad I_{2,3} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_{2,3}(j=0, R) u(R) dR$$

$$I_4 = \int_0^1 f_1(R) v(R) dR, \quad I_{5,6} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_{2,3}(j=0, R) v(R) dR$$

$$u(R) = \frac{1-R^2}{(1+R^2)^2}, \quad v(R) = \frac{R(1-R^2)}{(1+R^2)^3}$$

Интегралы являются двухпараметрическими функциями φ_C и σ , обладающими следующими свойствами:

$$\begin{aligned} I_{1,4}(\varphi_C \pm \pi l) &= I_{1,4}(\varphi_C), \quad I_{2,3,5,6}(\varphi_C \pm 2\pi l) = I_{2,3,5,6}(\varphi_C) \\ I_{2,3,5,6}(-\varphi_C) &= -I_{2,3,5,6}(\varphi_C) \\ [I_{2,5}(\varphi_C \pm \pi l) - I_{3,6}(\varphi_C \pm \pi l)] &= -[I_{2,5}(\varphi_C) - I_{3,6}(\varphi_C)] \\ I_{2,5}(\varphi_C \pm 2\pi l) - I_{3,6}(\varphi_C \pm 2\pi l) &= I_{2,5}(\varphi_C) - I_{3,6}(\varphi_C), \quad l = 1, 2, \dots \\ I_{1,4} - I_{2,5} - I_{3,6} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Коэффициент главной силы, действующей на звездообразное тело, без учета донного сопротивления запишем в форме

$$C_F = - \left[\sum_{Li=1}^n (Cn_{Li} \mathbf{n}_{Li} + Cn_{Ri} \mathbf{n}_{Ri}) \right] \quad (2.6)$$

Принимая во внимание выражения (2.3), (2.4), (2.6), а также известные значения сумм тригонометрических функций при $n > 2$ [15]:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k\gamma_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(2k\gamma_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(4k\gamma_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(4k\gamma_n) = 0$$

найдем векторы

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\alpha_{Li} \mathbf{n}_{Li} + \alpha_{Ri} \mathbf{n}_{Ri}) &= -\frac{n}{\sin\beta} \left\{ 2 \sin^2 \xi \sin^2 \left(\frac{\gamma}{2} \right), \alpha, \vartheta \right\} \\ \sum_{i=1}^n \alpha_{Li} (\mathbf{n}_{Li} + \mathbf{n}_{Ri}) &= -\frac{n}{\sin\beta} \sin^2 \left(\frac{\gamma}{2} \right) \left\{ 2 \sin^2 \xi, \left[\alpha + \vartheta \operatorname{ctg} \left(\frac{\gamma}{2} \right) \right], \left[-\alpha \operatorname{ctg} \left(\frac{\gamma}{2} \right) + \vartheta \right] \right\} \\ \sum_{i=1}^n (\alpha_{Ri} - \alpha_{Li}) \mathbf{n}_{Ri} &= -\frac{n}{\sin\beta} \cos^2 \left(\frac{\gamma}{2} \right) \left\{ 0, \left[\alpha - \vartheta \operatorname{tg} \left(\frac{\gamma}{2} \right) \right], \left[\alpha \operatorname{tg} \left(\frac{\gamma}{2} \right) + \vartheta \right] \right\} \\ \sum_{i=1}^n (\alpha_{Ri} - \alpha_{Li}) \mathbf{n}_{Li} &= \frac{n}{\sin\beta} \cos^2 \left(\frac{\gamma}{2} \right) \left\{ 0, \left[\alpha + \vartheta \operatorname{tg} \left(\frac{\gamma}{2} \right) \right], \left[-\alpha \operatorname{tg} \left(\frac{\gamma}{2} \right) + \vartheta \right] \right\} \quad (2.7) \\ \sum_{i=1}^n (\alpha_{Li} \mathbf{n}_{Ri} + \alpha_{Ri} \mathbf{n}_{Li}) &= -\frac{n}{\sin\beta} \left\{ 2 \sin^2 \xi \sin^2 \left(\frac{\gamma}{2} \right), -\alpha \cos \gamma, -\vartheta \cos \gamma \right\} \\ \sum_{i=1}^n (\alpha_{Li} + \alpha_{Ri}) (\mathbf{n}_{Li} + \mathbf{n}_{Ri}) &= -\frac{2n}{\sin\beta} \sin^2 \left(\frac{\gamma}{2} \right) \{ 2 \sin^2 \xi, \alpha, \vartheta \} \\ \sum_{i=1}^n \alpha_{Ri} (\mathbf{n}_{Li} + \mathbf{n}_{Ri}) &= -\frac{n}{\sin\beta} \sin^2 \left(\frac{\gamma}{2} \right) \left\{ 2 \sin^2 \xi, \alpha - \vartheta \operatorname{ctg} \left(\frac{\gamma}{2} \right), \alpha \operatorname{ctg} \left(\frac{\gamma}{2} \right) + \vartheta \right\} \end{aligned}$$

Используя выражения (2.7) и последнее из свойств интегралов (2.5), получим соотношение для вектора главной силы (2.6) в базе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ в случае, когда характеристики, идущие от передних кромок тела, не отражаются от его поверхности (фиг. 2, а, б):

$$\begin{aligned} C_F &= \{ C_X, C_N^\alpha, C_N^\vartheta \} \\ C_X &= \frac{8\lambda^2 n \sin\beta \sin^2 \xi \sin^2 (\gamma/2)}{\pi \sqrt{M^2 \sin^2 \beta - 1}} \left\{ \frac{(c-b)}{(1-b \operatorname{tg} \sigma_1)(1-c \operatorname{tg} \sigma_1)} + 2b(I_1 + 4b \operatorname{tg} \sigma_1 I_4) \right\} \\ C_N^\alpha &= \frac{4\lambda^2 n \sin\beta}{\pi \sqrt{M^2 \sin^2 \beta - 1}} \left\{ \frac{(c-b)}{(1-b \operatorname{tg} \sigma_1)(1-c \operatorname{tg} \sigma_1)} + \right. \\ &\left. + 2 \sin^2 \left(\frac{\gamma}{2} \right) b(I_1 + 4b \operatorname{tg} \sigma_1 I_4) + 2 \cos^2 \left(\frac{\gamma}{2} \right) b[I_{23} + 4b \operatorname{tg} \sigma_1 I_{56}] \right\} \quad (2.8) \end{aligned}$$

В (2.8) C_N^α – производная коэффициента нормальной силы по эффективному углу атаки $\alpha_e = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Такой вывод и соответствующее обозначение приняты в связи с тем, что коэффициенты при углах атаки и скольжения в разложении по базису $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ одинаковы (2.8). Полученный результат свидетельствует, что вектор главной силы компланарен плоскости, содержащей ось звездообразного тела и вектор скорости невозмущенного потока, проходящий через носик тела. Это и должно иметь место в рамках линейной теории обтекания циклически-симметричных тел при $n > 2$ [6].

Как видно (2.8), компоненты вектора силы зависят от четырех интегралов: $I_1, I_{23} \equiv I_2 - I_3, I_4, I_{56} \equiv I_5 - I_6$. Эти интегралы как функции двух параметров (2.4) и в соответствии со свойствами (2.5) затабулированы для различных значений σ при изменении φ_C на интервале $[0, \pi]$ (фиг. 3). Интегралы $I_1(\varphi_C, \sigma), I_4(\varphi_C, \sigma)$ слабо зависят от σ . Кривые, соответствующие $\sigma = 2$ и 3 при $\varphi_C \in [0, \pi/2]$, располагаются между кривыми 1 и 2 и близки к кривой 2 при $\varphi_C \in [\pi/2, \pi]$ (фиг. 3, а).

Формулы для компонент главной силы C_F , действующей на звездообразное тело, при произвольном числе j отражений волн, идущих с передних кромок, от консолей V-образных крыльев – циклов тела запишем в виде

$$C_X = \frac{8\lambda^2 n \sin \beta \sin^2 \xi \sin^2(\gamma/2)}{\pi \sqrt{M^2 \sin^2 \beta - 1}} \left\{ \frac{(c-b)}{(1-b \operatorname{tg} \sigma_1)(1-c \operatorname{tg} \sigma_1)} + \right. \quad (2.9)$$

$$\left. + \sum_{l=1}^j \frac{2d_l}{(1-d_l \operatorname{tg} \sigma_1)} + 2b(I_1 + 4b \operatorname{tg} \sigma_1 I_4) \right\}$$

$$C_N^\alpha = \frac{4\lambda^2 n \sin \beta}{\pi \sqrt{M^2 \sin^2 \beta - 1}} \left\{ \frac{1}{(1-b \operatorname{tg} \sigma_1)} \left[\frac{(c-b)}{(1-c \operatorname{tg} \sigma_1)} + \right. \right. \quad (2.10)$$

$$\left. + \sum_{l=1}^j \frac{2(-1)^l (d_l - b) \cos^l \gamma}{(1-d_l \operatorname{tg} \sigma_1)} + 2jb \sin^2 \left(\frac{\gamma}{2} \right) \right] +$$

$$\left. + 2b \left[\sin^2 \left(\frac{\gamma}{2} \right) (I_1 + 4b \operatorname{tg} \sigma_1 I_4) + 2 \cos^2 \left(\frac{\gamma}{2} \right) [I_{23}(\varphi_{Cj}) + 4b \operatorname{tg} \sigma_1 I_{56}(\varphi_{Cj})] \right] \right\}$$

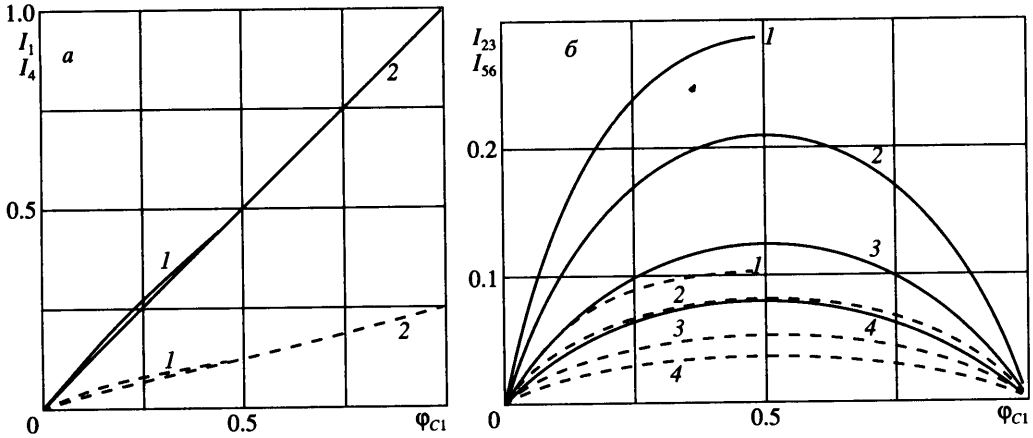
$$\varphi_{Cj} = (-1)^j \varphi_C + j\pi, \quad t = \frac{1}{2} [1 - (-1)^l]$$

Момент сил, действующих на левую и правую консоли, относительно носика крыла – i -го цикла звездообразного тела запишем в виде

$$\mathbf{M}_{L, Ri} = -\frac{1}{S_M^s} \int [\mathbf{r}_{L, Ri} \times \mathbf{n}_{L, Ri}] C p_i dS \quad (2.11)$$

$$\mathbf{r}_{L, Ri} = \frac{2L}{3(1 - \operatorname{tg} \sigma_1 \operatorname{tg} \varphi)} \left\{ 1, \operatorname{tg} \varphi \cos \left(\frac{\gamma}{2} \right), \mp \operatorname{tg} \varphi \sin \left(\frac{\gamma}{2} \right) \right\}$$

В (2.16) dS вычисляется по формуле (2.2), \mathbf{r} – радиус-вектор в базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, соединяющий вершину крыла с центром приложения равнодействующей давления на элементарную площадку dS консоли крыла. Момент в (2.11) определен с той же точностью, что и нормальная сила в (2.2).



Фиг. 3. Величины интегралов I_1, I_4 (а, сплошные и штриховые линии) при $\sigma = 1.5$ и 4 (кривые 1, 2) и I_{23}, I_{56} (б, сплошные и штриховые линии) при $\sigma = 1.5, 2, 3$ и 4 (кривые 1-4) в зависимости от $\varphi_{C1} = \varphi_C/\pi$

Интегрируя (2.11) с использованием (1.8), (1.9) при $j = 0$ (фиг. 2, а, б), найдем

$$M_{L, Ri} = \frac{8L\lambda^2}{3\pi} \frac{\sin^2 \beta}{\sqrt{M^2 \sin^2 \beta - 1}} \left\{ \pm \left[\frac{(c-b)}{(1-b\operatorname{tg}\sigma_1)(1-c\operatorname{tg}\sigma_1)} \left[\frac{b}{(1-b\operatorname{tg}\sigma_1)} + \frac{c}{(1-c\operatorname{tg}\sigma_1)} \right] \alpha_{L, Ri} + 4b^2 [(I_4 + 6b\operatorname{tg}\sigma_1 I_7) \alpha_{Li} + (I_{6,5} + 6b\operatorname{tg}\sigma_1 I_{9,8}) (\alpha_{Ri} - \alpha_{Li})] \right], \mp M_0 \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right), M_0 \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \right\} \quad (2.12)$$

$$M_0 = \frac{(c-b)}{2(1-b\operatorname{tg}\sigma_1)(1-c\operatorname{tg}\sigma_1)} \left[\frac{1}{(1-b\operatorname{tg}\sigma_1)} + \frac{1}{(1-c\operatorname{tg}\sigma_1)} \right] \alpha_{L, Ri} + 2b [(I_1 + 6b\operatorname{tg}\sigma_1 I_4) \alpha_{Li} + (I_{3,2} + 6b\operatorname{tg}\sigma_1 I_{6,5}) (\alpha_{Ri} - \alpha_{Li})]$$

$$I_7 = \int_0^1 f_1(R) w(R) dR, \quad I_{8,9} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_{2,3}(j=0, R) w(R) dR$$

$$w(R) = \frac{R}{1+R^2} v(R)$$

Интегралы $I_7, I_{8,9}$ (2.12) удовлетворяют тем же свойствам из (2.5), что и интегралы $I_{1,4}, I_{2,3,5,6}$ соответственно.

Суммируя $M_{R,L}$ по всем граням звездообразного тела с учетом (1.11) и свойств сумм тригонометрических функций [15], найдем момент, действующий на тело, в случае отсутствия отражений характеристик от поверхности его циклов:

$$M = \{0, -M_C \vartheta, M_C \alpha\},$$

$$\begin{aligned}
M_C = & \frac{8L\lambda^2}{3\pi} \frac{n \sin \beta}{\sqrt{M^2 \sin^2 \beta - 1}} \left\{ \frac{(c-b)}{2(1-b \operatorname{tg} \sigma_1)(1-c \operatorname{tg} \sigma_1)} \left[\frac{1}{(1-b \operatorname{tg} \sigma_1)} + \frac{1}{(1-c \operatorname{tg} \sigma_1)} \right] + \right. \\
& + 2b \left[\sin^2 \left(\frac{\gamma}{2} \right) (I_1 + 6b \operatorname{tg} \sigma_1 I_4) + \cos^2 \left(\frac{\gamma}{2} \right) (I_{23} + 6b \operatorname{tg} \sigma_1 I_{56}) - \sin \xi \cos \left(\frac{\gamma}{2} \right) \times \right. \\
& \left. \left. \times \left[\frac{c-b}{2(1-b \operatorname{tg} \sigma_1)(1-c \operatorname{tg} \sigma_1)} \left[\frac{b}{(1-b \operatorname{tg} \sigma_1)} + \frac{c}{(1-c \operatorname{tg} \sigma_1)} \right] + 4b^2 (I_{56} + 6b \operatorname{tg} \sigma_1 I_{89}) \right] \right\} \right. \quad (2.13)
\end{aligned}$$

$$I_{89} = I_8 - I_9$$

Согласно (2.8) и (2.13), векторы главной силы и момента взаимно перпендикулярны. Причем продольная (направленная по оси тела) компонента момента равна нулю, а производная модуля момента по эффективному углу атаки α_e , как показывает анализ,

$$M_C > \frac{2}{3} LC_N^\alpha \quad (2.14)$$

Неравенство (2.14) превращается в равенство, если в соотношениях (2.8), (2.13) отбросить члены, содержащие малые параметры линейной теории: угол стреловидности задней кромки цикла звездообразного тела σ_1 и угол ξ между центральной хордой цикла и осью тела.

Таким образом, согласно результатам линейной теории, главная сила, действующая на тонкое пирамидальное тело со звездообразным поперечным сечением, компланарна плоскости, содержащей ось тела и вектор скорости невозмущенного потока. Момент крена равен нулю, а поперечный момент в главных членах равен произведению нормальной силы на $2/3$ длины тела.

Формулу для производной момента по эффективному углу атаки M_{Cj} в случае произвольного числа отражений волн, идущих с передних кромок, от граней звездообразного тела запишем в форме

$$\begin{aligned}
M_{Cj} = & \frac{8L\lambda^2}{3\pi} \frac{n \sin \beta}{\sqrt{M^2 \sin^2 \beta - 1}} \left\{ \frac{(c-b)}{2(1-b \operatorname{tg} \sigma_1)(1-c \operatorname{tg} \sigma_1)} \left[\frac{1}{(1-b \operatorname{tg} \sigma_1)} + \frac{1}{(1-c \operatorname{tg} \sigma_1)} \right] - \right. \\
& - \sum_{i=1}^j \frac{(-1)^i (d_i - b) \cos^i \gamma}{(1-b \operatorname{tg} \sigma_1)(1-d_i \operatorname{tg} \sigma_1)} \left[\frac{1}{(1-b \operatorname{tg} \sigma_1)} + \frac{1}{(1-d_i \operatorname{tg} \sigma_1)} \right] + \frac{jb}{(1-b \operatorname{tg} \sigma_1)} \left(1 + \frac{1}{(1-b \operatorname{tg} \sigma_1)} \right) + \\
& + 2b \left[\sin^2 \left(\frac{\gamma}{2} \right) (I_1 + 6b \operatorname{tg} \sigma_1 I_4) + \cos^2 \left(\frac{\gamma}{2} \right) (I_{23}(\Phi_{Cj}) + 6b \operatorname{tg} \sigma_1 I_{56}(\Phi_{Cj})) \right] - \\
& - \sin \xi \cos \left(\frac{\gamma}{2} \right) \left[\frac{(c-b)}{2(1-b \operatorname{tg} \sigma_1)(1-c \operatorname{tg} \sigma_1)} \left[\frac{b}{(1-b \operatorname{tg} \sigma_1)} + \frac{c}{(1-c \operatorname{tg} \sigma_1)} \right] + \right. \\
& + \sum_{i=1}^j \frac{(-1)^i (d_i - b)}{(1-b \operatorname{tg} \sigma_1)(1-d_i \operatorname{tg} \sigma_1)} \left[\frac{b}{(1-b \operatorname{tg} \sigma_1)} + \frac{d_i}{(1-d_i \operatorname{tg} \sigma_1)} \right] + \\
& \left. \left. + 4b^2 (I_{56}(\Phi_{Cj}) + 6b \operatorname{tg} \sigma_1 I_{89}(\Phi_{Cj})) \right] \right\} \quad (2.15)
\end{aligned}$$

Величины интегралов I_7 и I_{89} в зависимости от $\Phi_{C1} = \Phi_C/\pi$ для $\sigma = 1.5; 2; 3$ и 4 (кривые 1–4) качественно соответствуют величинам I_1, I_4 и $I_{23, 56}$, представленным на фиг. 3.

Заключение. Построена линейная теория тонких пирамидальных тел со звездообразным поперечным сечением на режимах обтекания с присоединенными ударными волнами на передних кромках. Основу теории составляет решение линейной задачи о V-образном крыле со сверхзвуковыми передними кромками под малыми углами атаки и скольжения. Найдены конечные формулы для векторов главной силы и момента, действующих на звездообразное тело при различном числе отражений возмущений, идущих с передних кромок, от поверхности тела. Главная сила компланарна плоскости, содержащей ось тела и вектор скорости невозмущенного потока, а производная нормальной силы по углу атаки не зависит от угла крена звездообразного тела. Продольная компонента момента равна нулю, а поперечный момент относительно носика звездообразного тела в главных членах равен произведению нормальной силы на $2/3$ его длины. Таким образом, у тонкого звездообразного тела с числом циклов больше двух на режимах обтекания со сверхзвуковыми передними кромками при малых углах атаки и скольжения отсутствует момент крена. Для нахождения поперечного момента достаточно определить производную нормальной силы по эффективному углу атаки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№№ 00-01-00234, 03-01-00041).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гонор А.Л., Зубин М.А., Остапенко Н.А., Черный Г.Г., Швец А.И. Аэродинамика звездообразных тел при сверхзвуковых скоростях // Актуальные проблемы механики. М.: Изд-во МГУ, 1984. С. 30–38.
2. Остапенко Н.А. Аэродинамическое сопротивление пространственных тел со звездообразным поперечным сечением при сверхзвуковых скоростях и проблемы его расчета // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 1. С. 57–69.
3. Глазков В.М., Дуганов В.В., Зубин М.А., Остапенко Н.А. Экспериментальное исследование аэродинамического сопротивления пространственных тел со звездообразным поперечным сечением при сверх- и гиперзвуковых скоростях // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1997. № 1. С. 56–59.
4. Зубин М.А., Остапенко Н.А., Чулков А.А. Моделирование аэродинамического сопротивления пространственных тел со звездообразным поперечным сечением при гиперзвуковых скоростях // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 5. С. 69–79.
5. Гонор А.Л., Зубин М.А., Остапенко Н.А. Экспериментальное исследование аэродинамических характеристик звездообразных тел при сверхзвуковых скоростях // Неравновесные течения газа и оптимальные формы в сверхзвуковом потоке. М.: Изд-во МГУ, 1978. С. 28–39.
6. Зубин М.А., Остапенко Н.А. Аэродинамические характеристики и запас статической устойчивости конических звездообразных тел при сверхзвуковых скоростях // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 6. С. 142–150.
7. Остапенко Н.А. О центре давления конических тел // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 1. С. 99–104.
8. Остапенко Н.А. Конические тела со звездообразным поперечным сечением, обладающие запасом статической устойчивости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 6. С. 84–92.
9. Окунев Ю.М., Остапенко Н.А. О демпфировании колебаний летящего тела около центра масс в условиях квазистационарной модели аэродинамики // Математическое моделирование нестационарных задач механики сплошных сред. М.: Изд-во Машиностроительного ин-та, 1985. С. 67–78.
10. Садовничий В.А., Окунев Ю.М. Модельные динамические системы одной задачи внешней баллистики и их аналитические решения // Проблемы современной механики / Под ред. С.С. Григоряна. М.: Изд-во МГУ, 1998. С. 28–46.

11. *Остапенко Н.А.* Баллистика высокоскоростных тел с высокими несущими свойствами // Матер. докл. Междунар. научно-практической конф. "Вторые Окуневские чтения", СПб, 2000 г. СПб, 2000. С. 32–35.
12. *Фоллэ М.И.* Сохранение вектора равнодействующей силы в плоскости угла атаки при сверхзвуковом обтекании тонких звездообразных тел // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 6. С. 135–141.
13. *Ward G.N.* Supersonic flow past slender pointed bodies // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1949. V. 2. Pt 1. P. 75–97.
14. *Остапенко Н.А., Симоненко А.М.* V-образное крыло в сверхзвуковом потоке под углами атаки и скольжения // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 1. С. 97–109.
15. *Градиштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

Москва

Институт механики МГУ

E-mail: ostap@imec.msu.ru

simon@imec.msu.ru

Поступила в редакцию

10.I.2003