

УДК 532.528

© 2004 г. В. П. КАРЛИКОВ, С. Л. ТОЛОКОННИКОВ

О ВОЗМОЖНЫХ СХЕМАХ ЗАМЫКАНИЯ КАВИТАЦИОННЫХ ПОЛОСТЕЙ

Рассмотрены две новые схемы стационарного симметричного (бесциркуляционного) кавитационного обтекания тел потоком идеальной несжимаемой жидкости. Кавитационная полость в них замыкается на ограниченную замкнутой линией тока область течения, окружающую либо диполь, либо пару точечных вихрей с одинаковой по величине, но противоположной по знаку циркуляцией. Сравнительная оценка эффективности использования таких схем сделана для случая поперечного обтекания плоской пластины. В диапазоне чисел кавитации $0.01 \leq \sigma \leq 1.5$ сопоставлены найденные коэффициенты сопротивления, относительные диаметры и длины каверн с их значениями, вычисленными по схемам Рябушинского и Эфроса. При конкретном значении числа кавитации сравнивается также форма кавитационных полостей. Найденные решения обладают свойствами однолистности, замкнутости и удовлетворяют условиям Бриллюэна.

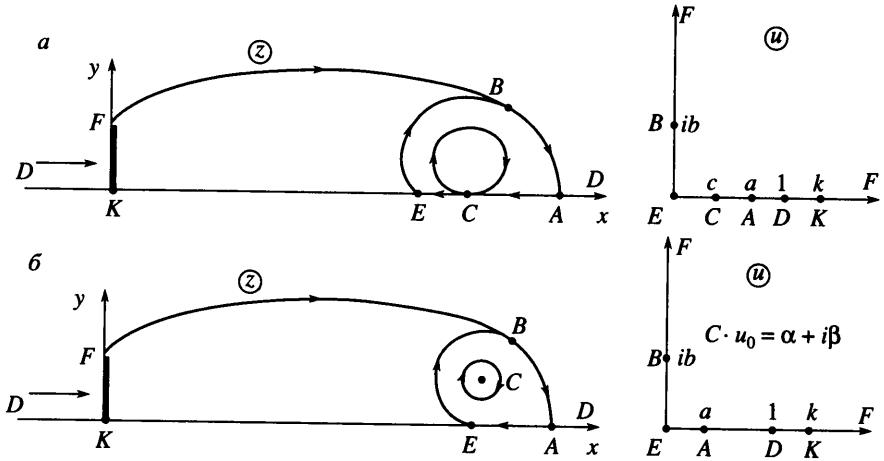
Ключевые слова: несжимаемая жидкость, кавитационное обтекание, диполь, вихрь.

Многочисленные математические модели симметричного и несимметричного обтекания тел с развитой кавитацией однородным безграничным стационарным потоком идеальной невесомой несжимаемой жидкости описаны в монографиях [1–3]. Эти модели отличаются друг от друга схематизацией течения в области замыкания кавитационной полости, где оно существенно нестационарно. В схеме Эфроса, например, здесь предполагается наличие стационарной возвратной струи, уходящей на второй лист римановой поверхности. В реальных течениях при некоторых режимах обтекания возвратная струя действительно наблюдается, но она является нестационарной. В ряде других схем в этой области размещаются либо фиктивные тела (схема Рябушинского), либо стенки бесконечно длинных каналов (схемы Жуковского, Кузнецова), либо математические особенности типа одиночных или двойных спиральных завитков (схемы Тулина) и т.п.

Сравнительный анализ результатов применения подобных схем свидетельствует о том, что несмотря на их основной недостаток, связанный с нереальностью вида течений в конце каверны, они позволяют найти основные геометрические и силовые характеристики, удовлетворительно согласующиеся с экспериментальными данными [2].

Выбор той или иной схемы при решении конкретных задач связан, как отмечено в [2], “с удобством расчета и в какой-то мере со вкусом и опытом авторов”. Этим объясняется появление новых и продолжающееся усовершенствование уже известных схем [4]. Однако при этом указывается также на необходимость развития и таких схем, которые учитывают “действительные процессы, выходящие за пределы модели стационарного потока идеальной жидкости”. Одна из возможных схем такого рода предложена в [3].

В случае использования модели идеальной несжимаемой жидкости представляются наиболее предпочтительными схемы, обладающие одновременно физически оправданными свойствами однолистности и замкнутости течения, предполагающей возможность охватить обтекаемое тело и каверну в физической плоскости непрерывной замкнутой линией. Из числа известных к таким схемам относятся лишь схемы Рябушинского и Лаврентьева.



Фиг. 1. Схемы течений и параметрические области для кавитационного обтекания пластины для схем с диполем (а) и вихрями (б)

В настоящей работе на примере кавитационного обтекания пластины рассмотрены две новые схемы, обладающие указанными свойствами. В этих схемах каверны замыкаются на “жидкие цилиндры”, представляющие собой “атмосферу” либо диполя, либо пары вихрей с равными по величине, но противоположными по знаку циркуляциями. Математическим обоснованием этих схем можно считать представленный в [5, 6] численно-параметрический анализ решений задач о кавитационном обтекании “жидких цилиндров”.

1. Кавитационное обтекание пластины для случая замыкания каверны на “атмосферу” диполя. Схема верхней ($y \geq 0$) половины течения изображена на фиг. 1,а. Отрезок KF соответствует половине пластины и имеет длину $L/2$. В точке C расположен диполь, ось которого направлена вдоль оси x . На свободной поверхности FBE и в бесконечно удаленной точке D давление и модуль скорости жидкости равны p_0 , v_0 и p_∞ , v_∞ соответственно.

Решение задачи строится отображением областей изменения комплексного потенциала w и комплексной скорости dw/dz течения на область изменения вспомогательного параметрического переменного u , в качестве которой выбирается верхний правый квадрант. Соответствие точек физической и параметрической областей указано на фиг. 1,а.

Для нахождения отображений $dw/du(u)$ и $dw/dz(u)$ используется метод особых точек [2]:

$$\frac{dw}{du}(u) = N \frac{u(u-a)(u+a)(u-ib)(u+ib)}{(u-1)^2(u+1)^2(u-c)^2(u+c)^2} \quad (1.1)$$

$$\frac{dw}{dz}(u) = -iv_0 \frac{(u-a)(u+c)^2 \sqrt{u-k}}{(u+a)(u-c)^2 \sqrt{u+k}} \quad (1.2)$$

где N – некоторая действительная постоянная.

Связь между областями изменения z и u имеет вид:

$$\frac{dz}{du}(u) = \frac{iNu(u+a)^2(u^2+b^2)\sqrt{u+k}}{v_0(u^2-1)^2(u+c)^4\sqrt{u-k}} \quad (1.3)$$

В точке $D (u = 1)$ известно значение $dw/dz(1) = v_\infty$, откуда с помощью (1.2) находится:

$$\frac{v_\infty}{v_0} = \frac{1}{\sqrt{1+\sigma}} = \frac{(1-a)(1+c)^2 \sqrt{k-1}}{(1+a)(1-c)^2 \sqrt{k+1}} \quad (1.4)$$

где σ – число кавитации.

Так как лучи DK и ED лежат на одной прямой, линии симметрии течения $y = 0$, то $\text{Res} dz/du(1) = 0$, откуда следует:

$$\frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b^2} + \frac{k}{k^2-1} - \frac{4}{1+c} = 0 \quad (1.5)$$

Чтобы функция $w(u)$, найденная интегрированием (1.1), не содержала логарифмической особенности в точке $u = c$, требуется, чтобы $\text{Res} dw/du(c) = 0$, что приводит к соотношению:

$$\frac{1}{c^2+b^2} + \frac{2}{1-c^2} - \frac{1}{a^2-c^2} = 0 \quad (1.6)$$

В дальнейшем используется условие конечности кривизны свободных границ BF и BE в точке B (второе условие Бриллюэна). Рассматривается функция Жуковского $\omega = -\ln(dw/v_0 dz) = -\ln(v/v_0) + i\theta$, где v – модуль скорости, θ – угол между направлением скорости и осью x . Вычисление производной этой функции вдоль свободной поверхности ($u = it$) дает:

$$d\theta = \left(\frac{2a}{t^2+a^2} + \frac{k}{t^2+k^2} - \frac{4c}{t^2+c^2} \right) dt$$

Из формулы (1.3) видно, что производная ds/dt , где ds – дифференциал длины дуги свободной поверхности, в точке $B (u = ib)$ обращается в ноль. Поэтому для конечности кривизны $\kappa = d\theta/ds$ свободных границ в этой точке необходимо, чтобы $d\theta/dt|_{t=b} = 0$. Это приводит к условию:

$$\frac{2a}{b^2+a^2} + \frac{k}{b^2+k^2} - \frac{4c}{b^2+c^2} = 0 \quad (1.7)$$

С помощью соотношения

$$\int_k^\infty \frac{dz}{du}(u) du = \frac{iL}{2}$$

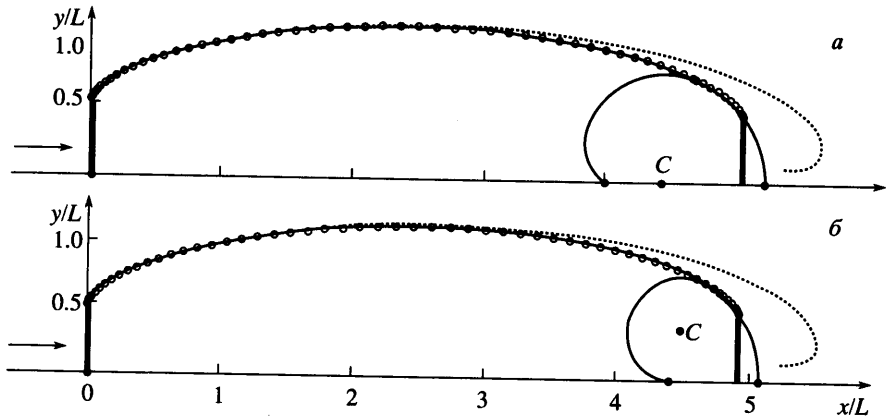
находится $N = v_0 L/2J$, где

$$J = \int_k^\infty \frac{u(u+a)^2(u^2+b^2)\sqrt{u+k}}{(u^2-1)^2(u+c)^4\sqrt{u-k}} du$$

Таким образом

$$\frac{1}{L} \frac{dz}{du}(u) = \frac{i}{2J} \frac{u(u+a)^2(u^2+b^2)\sqrt{u+k}}{(u^2-1)^2(u+c)^4\sqrt{u-k}} \quad (1.8)$$

После определения неизвестных параметров a, b, c, k формула (1.8) служит для нахождения геометрических характеристик течения.



Фиг. 2. Форма кавитационной полости за пластиной для $\sigma = 0.9$ при замыкании ее на “жидкий цилиндр” в окрестности диполя (а), в окрестности пары вихрей (б): точки соответствуют каверне, замыкаемой по схеме Рябушинского, пунктир – схеме Эфроса

Таким образом, рассматриваемая задача свелась к нахождению четырех параметров a , b , c , k и константы N , для определения которых были использованы значения двух задаваемых параметров – длины пластины L и числа кавитации σ , а также условия однолиственности течения, отсутствия логарифмической особенности функции $w(u)$ в точке $u = c$ и конечности кривизны в точке отрыва потока.

Как следует из расчетного анализа, проведенный для любого заданного значения $\sigma \in (0, 1.5]$, уравнения (1.4), (1.5) и (1.6) имеют для каждого $c \in (0, 1)$ единственное решение a , b , k . Таким образом, оказалось возможным показать, что для фиксированного числа кавитации $\sigma > 0$ имеется однопараметрическое семейство решений, отличающихся друг от друга формой каверны и величиной силы, действующей на пластину. Этот существенный результат позволил классифицировать все возможные случаи и сделать выбор решения, удовлетворяющего предъявляемым требованиям.

Действительно, интервал $(0, 1)$ изменения параметра c можно разделить на несколько участков, на каждом из которых течение имеет характерные особенности.

При $0 < c < c_1(\sigma)$ свободная поверхность BF в окрестности точки B пересекает границу BE области $ABECSA$, т.е. течение является неоднolistным. Значение c_1 параметра c соответствует случаю, когда свободные границы имеют конечную кривизну в точке B и свободная поверхность BF не пересекает область $ABECSA$, т.е. выполняется второе условие Бриллюэна, и, кроме того, для части течения, расположенной вне “жидкого цилиндра” $ABECSA$, выполняется первое условие Бриллюэна – модуль скорости жидкости во всех точках, не принадлежащих свободной поверхности BF , имеет величину, меньшую u_0 [2].

В диапазоне $c_1(\sigma) < c < c_2(\sigma)$ кривизна свободных границ в точке B бесконечна, но кривизны линий BF и BE в ее окрестности имеют разные знаки, что исключает пересечение здесь этих линий, т.е. течение является однолиственным. Однако первое условие Бриллюэна для области течения $DKFBAD$ при этом не выполняется, свободная граница BF имеет участки с различным знаком кривизны.

Значение $c = c_2$ соответствует случаю конечной кривизны свободных границ в точке B , но при этом не выполнено первое условие Бриллюэна. При $c \in (c_2, 1)$ кривизна свободных границ в точке B бесконечна, свободная поверхность BF сразу же за точкой B направлена внутрь области $ABECSA$, т.е. течение становится неоднolistным.

σ	C_x		h/L		l/L				$-\gamma$
	Д, В, Р	Э	Д, В, Р	Э	Д	В	Р	Э	В
0.01	0.8886	0.8886	113.02	113.05	22626.30	22626.32	22626.52	22655.12	2.478
0.1	0.9679	0.9679	12.20	12.23	245.36	245.42	245.59	248.83	2.583
0.2	1.0564	1.0564	6.60	6.63	66.30	66.37	66.54	68.32	2.692
0.3	1.1451	1.1451	4.73	4.76	31.55	31.62	31.79	33.08	2.792
0.4	1.2341	1.2341	3.80	3.83	18.86	18.93	19.10	20.13	2.885
0.5	1.3234	1.3234	3.24	3.27	12.75	12.82	12.99	13.87	2.972
0.6	1.4130	1.4129	2.86	2.89	9.30	9.37	9.55	10.32	3.053
0.7	1.5029	1.5027	2.59	2.63	7.15	7.22	7.39	8.09	3.128
0.8	1.5929	1.5927	2.39	2.43	5.70	5.77	5.95	6.58	3.199
0.9	1.6833	1.6829	2.24	2.27	4.67	4.75	4.93	5.51	3.265
1.0	1.7738	1.7733	2.11	2.15	3.92	3.99	4.17	4.72	3.327
1.1	1.8646	1.8640	2.01	2.05	3.34	3.41	3.60	4.11	3.386
1.2	1.9555	1.9548	1.93	1.96	2.88	2.96	3.15	3.64	3.441
1.3	2.0461	2.0458	1.85	1.89	2.52	2.60	2.79	3.25	3.493
1.4	2.1381	2.1370	1.79	1.83	2.22	2.30	2.49	2.94	3.543
1.5	2.2296	2.2283	1.74	1.77	1.98	2.06	2.25	2.68	3.589

Таким образом, можно сделать вывод о том, что среди всех возможных значений параметра c необходимо выбрать случай $c = c_1$, при котором выполняются оба условия Бриллюэна. При $c \in (0, c_1) \cup (c_2, 1)$ течение неоднолистно, при $c \in (c_1, c_2]$ не выполнено первое условие Бриллюэна для области течения *DKFBAD*.

На фиг. 2,а изображены сплошной линией границы кавитационной полости за пластиной и “атмосферы” диполя, при числе кавитации $\sigma = 0.9$. Пунктиром на этом рисунке показана граница каверны, полученная с использованием схемы Эфроса, а точками – найденная из решения задачи с замыканием каверны по схеме Рябушинского. В таблице (столбцы Д) приведены для разных чисел кавитации искомые коэффициент сопротивления пластины, а также относительные значения миделя и длины каверны.

В соответствии с парадоксом Даламбера–Эйлера на диполь должна действовать сила, равная по величине силе сопротивления пластины, что подтверждается и непосредственными расчетами.

Нетрудно видеть, что кроме описанной может быть использована также схема, в которой замыкание каверны осуществляется на замкнутую область течения, окружающую последовательно расположенные источник и сток [5]. Рассмотренный случай является предельным для такой схемы.

2. Кавитационное обтекание пластины для случая замыкания каверны на “атмосферу” пары вихрей. Схема течения и выбранная параметрическая область представлены на фиг. 1, б. В точке C расположен вихрь с циркуляцией Γ . В параметрической области ему соответствует точка $u = u_0 = \alpha + i\beta$.

Общее решение задачи определяется соотношениями:

$$\frac{dw}{dz}(u) = -iv_0 \frac{(u-a)(u+u_0)(u+\bar{u}_0)\sqrt{u-k}}{(u+a)(u-u_0)(u-\bar{u}_0)\sqrt{u+k}},$$

$$\frac{1}{L} \frac{dz}{du}(u) = \frac{i}{2J} \frac{u(u+a)^2(u^2+b^2)\sqrt{u+k}}{(u^2-1)^2((u+\alpha)^2+\beta^2)^2\sqrt{u-k}}$$

$$J = \int_k^\infty \frac{u(u+a)^2(u^2+b^2)\sqrt{u+k}}{(u^2-1)^2((u+\alpha)^2+\beta^2)^2\sqrt{u-k}}$$

Система уравнений для параметров имеет вид:

$$\frac{v_\infty}{v_0} = \frac{1}{\sqrt{1+\sigma}} = \frac{(1-a)((1+\alpha)^2+\beta^2)\sqrt{k-1}}{(1+a)((1-\alpha)^2+\beta^2)\sqrt{k+1}} \quad (2.1)$$

$$\frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b^2} + \frac{k}{k^2-1} - \frac{4(1+\alpha)}{(1+\alpha)^2+\beta^2} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{2a}{b^2+a^2} + \frac{k}{b^2+k^2} - \frac{4\alpha(b^2+\alpha^2+\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2-b^2)^2+4\alpha^2b^2} = 0 \quad (2.3)$$

$$\text{Im} \frac{(u_0^2-a^2)(u_0^2+b^2)}{(u_0^2-1)^2} = 0 \quad (2.4)$$

$$\text{ImRes} f(u_0) = 0 \quad (2.5)$$

$$f(u) = \frac{dw}{du}(u) \frac{dw}{dz}(u) = \frac{-iNv_0u(u-a)^2(u^2+b^2)\sqrt{u-k}}{(u^2-1)^2(u-u_0)^2(u-\bar{u}_0)^2\sqrt{u+k}}$$

Условия (2.1), (2.2), (2.3) аналогичны (1.4), (1.5) и (1.7). Уравнение (2.4) получено из требования равенства нулю мнимой части выражения, найденного интегрированием $dw/du(u)$ вокруг точки $u = u_0$ (отсутствие источника в этой точке). Условие (2.5) представляет собой требование равенства нулю вертикальной составляющей F_y силы, действующей на вихрь.

Соотношения (2.1), (2.2), (2.4) и (2.5) не образуют замкнутую систему уравнений на параметры a, b, k, α и β , один параметр является свободным (в качестве этого параметра был выбран a). Анализ поведения решения в зависимости от значений a аналогичен рассмотренному в случае схемы с диполем. Как и в задаче с диполем, выбиралось такое значение a , при котором кривизна свободных границ в точке B конечна и для области течения $DKFBAD$ выполнено первое условие Бриллюэна.

После нахождения неизвестных параметров значение безразмерной циркуляции вихря $\gamma = \Gamma/v_\infty L$ вычисляется по формуле:

$$\gamma = \frac{\pi\sqrt{1+\sigma}(u_0^2-a^2)(u_0^2+b^2)}{8\alpha\beta J (u_0^2-1)^2}$$

По сравнению с задачей с замыканием каверны на “атмосферу” диполя число параметров, требующих определения, здесь возросло на единицу. В качестве дополнитель-

ного задаваемого условия было использовано требование равенства нулю поперечной силы, действующей на вихрь. Очевидно, что в этом случае вихрь не является свободным, на него действует продольная сила.

На фиг. 2, б сплошной линией показаны форма каверны и границы “атмосферы” вихря для $\sigma = 0,9$, а также пунктиром и точками свободные поверхности, получаемые соответственно с использованием схем Эфроса и Рябушинского.

В диапазоне чисел кавитации $0,01 \leq \sigma \leq 1,5$ сделано представленное в таблице сравнение найденных значений коэффициента сопротивления C_x , относительного миделя h/L и длины l/L каверны с их значениями, полученными при использовании схем замыкания Рябушинского и Эфроса. Столбцы в таблице, отмеченные буквами Д, В, Р и Э, относятся соответственно к схемам с диполем и с вихрями Эфроса. Для схем с диполем и с вихрями длина каверны l определена как расстояние от плоскости, в которой расположена пластина, до точки касания боковой границы каверны с “атмосферой” особенностей.

С приведенной в таблице точностью в исследованном диапазоне чисел кавитации значения C_x и h/L для обеих схем полностью совпадают с получаемыми по схеме Рябушинского.

Отличие значений относительных длин каверны l/L при этом уже для $\sigma \leq 0,6$ не превышает 3% для схемы с диполем и 2% для схемы с вихрями. Найденная при $\sigma = 0,9$ форма границы каверны для этих схем также практически одинакова.

Существует большое число исследований струйных течений, содержащих особенность в виде точечного вихря внутри жидкости [1, 2]. Схематизация течения, аналогичная в некоторой области использованной в настоящей работе, рассматривалась, например, в [7], где изучался процесс соударения с преградой плоской струи, вытекающей из аппарата на воздушной подушке. Однако в этом случае не требовалось выполнения первого условия Бриллюэна, кривизна свободной линии тока, примыкающей к “атмосфере” вихря, соответствовала отрицательным значениям числа кавитации и вихрь являлся свободным.

Заключение. Предложены и апробированы в случае симметричного стационарного обтекания пластины потоком идеальной несжимаемой жидкости новые схемы замыкания развитых кавитационных полостей, обладающие, как и схема Рябушинского, свойствами однолистности и замкнутости. Они могут быть использованы для изучения кавитационного обтекания препятствий и с отличной от пластины формой.

Авторы благодарят Г.Ю. Степанова за полезные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 02-01-00613) и фонда поддержки ведущих научных школ РФ (проект № НШ-1481.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биркгофф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы, каверны. М: Мир, 1964. 466 с.
2. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
3. Гогши Л.В., Степанов Г.Ю. Отрывные и кавитационные течения: основные свойства и расчетные модели. М.: Наука, 1990, 382 с.
4. Степанов Г.Ю. Простая схема плоскопараллельного кавитационного или отрывного обтекания клина и пластины несжимаемой жидкостью // Тр. Мат. ин-та РАН. 1998. Т. 223. С. 123–135.
5. Карликов В.П., Толоконников С.Л. Струйно-кавитационное обтекание “жидких цилиндров” // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 1. С. 143–151.
6. Карликов В.П., Толоконников С.Л. Струйно-кавитационное обтекание “атмосферы” пары вихрей // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2003. № 6. С. 22–27.
7. Цельник Д.С. Об одной модели струйной завесы // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 1. С. 96–100.