

УДК 532.517.2:551.213.3

© 2004 г. А. А. ОСИПЦОВ

АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РОСТЕ ЛАВОВОГО КУПОЛА НА ПРОИЗВОЛЬНОЙ КОНИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В рамках асимптотических уравнений тонкого слоя сильновязкой тяжелой ньютоновской жидкости построена гидродинамическая модель неосесимметричного роста лавового купола на конической поверхности. Аналитически получен новый класс автомодельных решений, описывающих течение на конической поверхности с конечным углом наклона образующей к горизонтали при точечном массопроводе в вершине и степенном или экспоненциальном законе роста объема жидкости со временем. В случае течения на конической поверхности с малым углом наклона образующей к горизонтали для формы свободной поверхности найдено численное решение. Проведен сравнительный асимптотический анализ полученного решения и решений, описывающих течение на горизонтальной плоскости и на конической поверхности с конечным углом наклона образующей.

Ключевые слова: автомодельность, вязкая жидкость, источник, коническая поверхность, пленочное течение, экстремизмное извержение.

При построении гидродинамических моделей экстремизмных извержений вулкана обычно рассматривается нестационарное течение тонкого слоя тяжелой сильновязкой жидкости на горизонтальной или наклонной плоскости с локализованным массопроводом (см. обзор [1]). В ряде работ построена асимптотическая модель тонкого слоя ньютоновской жидкости на горизонтальной плоскости, а для формы свободной поверхности при точечном массопроводе и степенной зависимости объема от времени получены классические автомодельные решения [2], описывающие рост лавового купола [3]. Найдено автомодельное по пространственным координатам решение стационарной трехмерной задачи о пленке ньютоновской жидкости на наклонной плоскости при точечном массопроводе [4]. Решение последней задачи в нестационарной постановке при точечном или линейном массопроводе и степенном законе роста объема жидкости со временем получено в [5]. Численное исследование пленочных течений вязкопластической жидкости от точечного источника на горизонтальной и наклонной плоскостях приведено в [6] и [7].

Имеющиеся работы посвящены главным образом изучению процесса формирования лавового купола на плоской поверхности. При моделировании повторных извержений необходимо учитывать неплоскую геометрию подстилающей поверхности и конечность углов наклона ее образующей к горизонтали, что приводит к качественно новым постановкам задач по сравнению с течениями на плоской поверхности. Ниже предложена гидродинамическая модель неосесимметричного роста лавового купола на твердой конической поверхности.

1. Постановка задачи. Рассмотрим трехмерное нестационарное течение сильновязкой тяжелой ньютоновской жидкости со свободной границей на искривленной поверхности с локализованным массопроводом. Пусть любое пересечение поверхности с горизонтальной плоскостью есть либо пустое множество, либо точка O , либо замкнутый контур. Введем криволинейную ортогональную систему координат (x, y, φ) , центр которой совместим с точкой O , а оси x и φ направим вдоль кривых, по которым подстилающая поверхность пересекается соответственно с вертикальной плоскостью, со-

державшей точку O , и с горизонтальной плоскостью. Ось y направим по нормали к поверхности. В этой системе координат уравнения Навье – Стокса и неразрывности в безразмерном виде примут вид:

$$\frac{\partial(ur)}{\partial x} + \frac{\partial(vHr)}{\partial y} + \frac{\partial(wH)}{\partial \varphi} = 0, \quad H = \frac{R+y}{R}$$

$$\varepsilon Re a_x + \frac{\varepsilon}{H} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{r} L_1 + \sin \theta(x, \varphi) \quad (1.1)$$

$$\varepsilon Re a_y + \varepsilon \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\varepsilon}{Hr} L_2 - \cos \theta(x, \varphi)$$

$$H Re a_\varphi + \frac{H}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{H}{r} \left(\frac{\partial(wr)}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{Hr} \left(\frac{\partial(uH)}{\partial \varphi} - \frac{\partial(wr)}{\partial x} \right) \right]$$

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{r}{H} \left(\frac{\partial(uH)}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{Hr} \left(\frac{\partial(wr)}{\partial x} - \frac{\partial(uH)}{\partial \varphi} \right) \right]$$

$$L_2 = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{r}{H} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial(uH)}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{H}{r} \left(\frac{\partial(wr)}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \right]$$

$$u^* = Uu, \quad v^* = Uv, \quad x^* = Lx, \quad y^* = Ly, \quad r^* = Lr, \quad R^* = LR,$$

$$u^* = \frac{L}{U} t, \quad p^* = \frac{\rho U^2}{Re} p, \quad \varepsilon = \frac{Fr^2}{Re} = \frac{\mu U}{\rho g L^2}, \quad Re = \frac{\rho UL}{\mu}, \quad Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}$$

Здесь a_x, a_y, a_φ и u, v, w – компоненты ускорения и скорости в проекции и на оси x, y и φ соответственно, p – избыточное давление по сравнению с давлением на свободной поверхности, ρ и μ – плотность и вязкость жидкости, r – расстояние до вертикальной оси, содержащей точку O , θ – угол, который составляет касательная к образующей поверхности с горизонталью, $R(x, \varphi)$ – радиус кривизны образующей в точке x , L – характерный масштаб длины (размерные переменные обозначены звездочкой). При обезразмеривании все характерные масштабы, кроме масштаба скорости U (который будет определен ниже), считаем заданными. Запишем в безразмерном виде кинематическое и динамические граничные условия на свободной поверхности $y = h(t, x, \varphi)$ и граничное условие на твердой поверхности $y = 0$:

$$y = h: \quad v = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{u}{H} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{w}{r} \frac{\partial h}{\partial \varphi}, \quad P_n = 0 \quad (1.2)$$

$$y = 0, \quad 0 < x < x_r: \quad u = w = 0, \quad v = v_m$$

$$v_m(t, x < D/L, \varphi) > 0, \quad v_m(t, x \geq D/L, \varphi) = 0 \quad (1.3)$$

$$x = x_r: \quad h(t, x_r, \varphi) = 0$$

Здесь P_n – вектор напряжений на свободной поверхности, $x_r(t, \varphi)$ – неизвестный закон движения передней границы течения, $v_m(t, x, \varphi)$ – скорость массоподвода, D – размерный радиус области массоподвода. Предположим, что безразмерный параметр $\varepsilon \ll 1$ и $Re = o(\varepsilon^{-1/2})$. Это предположение выполняется, например, для экструзивных и эффузивных извержений вулкана, для которых типичны значения $\varepsilon \sim 10^{-1} - 10^{-5}$ и $Re \sim 10^2 - 10^5$ [8] (в этих оценках масштаб длины менялся в пределах от характерного диаметра жерла вулкана до характерных размеров самого вулкана).

Ограничимся случаем, когда подстилающая поверхность является конической, конкретный вид которой задан функцией $\theta = \theta(\varphi)$. В зависимости от вида поверхности можно выделить два различных типа течения: при конечных либо малых углах наклона образующей поверхности к горизонтали [9]. Изучим эти течения последовательно. Рассмотрим течение на конической поверхности с конечным углом наклона образующей к горизонтали от точечного источника в вершине. В этом случае $L \gg D$ есть некоторый масштаб длины, при котором массоподвод можно считать точечным, $v_m \equiv 0$ при $0 < x < x_r$, и $r = x \cos \theta$. Будем искать решение системы (1.1) с граничными условиями (1.2) и (1.3) в виде асимптотических рядов по ϵ при условии, что общий размерный объем жидкости зависит от времени по известному закону $\Lambda^* = \Lambda^*(t^*)$. Это граничное условие накладывает ограничение на характер роста объема, но не на расположение источника массы. Источники (и, возможно, стоки) массы могут находиться в вершине и на передней границе течения, причем суммарная интенсивность источников и стоков такова, что общий объем растет со временем по заданному закону. Искомое решение для формы свободной поверхности не исключает наличия разрыва на передней границе. Закон сохранения массы на передней границе течения имеет вид:

$$\lim_{x \rightarrow x_{r0}} \int_0^h (u - u_r) dy = I \tag{1.4}$$

Здесь $u_r(t, \varphi)$ – скорость переднего фронта, I – интенсивность источника (либо стока) массы на передней границе течения ($I = 0$ соответствует источнику только в вершине).

2. Течение при конечных θ и степенном законе массоподвода. Из асимптотического анализа уравнений (1.1)–(1.3) при $\epsilon \rightarrow 0$ следует, что главные члены разложений искомых функций по ϵ в случае конечных φ и θ имеют порядки

$$h = \epsilon^{1/2} h_0, \quad y = \epsilon^{1/2} \eta, \quad v = \epsilon^{1/2} v_0, \quad w = \epsilon^{1/2} w_0, \quad p = \epsilon^{-1/2} p_0 \tag{2.1}$$

Остальные функции имеют порядок единицы. Индекс 0 ниже опущен. Подставляя (2.1) в (1.1), (1.2) и (1.3) и оставляя главные члены, получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, \quad 0 = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \sin \theta, \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} = -\cos \theta, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \tag{2.2}$$

$$\eta = h: \quad v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}, \quad p = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \tag{2.3}$$

$$\eta = 0, \quad 0 < x < x_r: \quad u = v = w = 0$$

В рамках сделанных предположений система уравнений (2.2), (2.3) описывает течение не только при малых, но и при конечных и умеренно больших числах Рейнольдса. Задача о нахождении компоненты скорости w отделилась, и φ входит в уравнение неразрывности и первое динамическое уравнение лишь как параметр, что позволяет искать решение трехмерной задачи как однопараметрическое семейство решений двумерной задачи.

Интегральный закон сохранения массы в растянутых переменных можно записать в форме

$$\int_0^{2\pi} \int_0^0 h x \cos \theta dx d\varphi = \Lambda(t) \tag{2.4}$$

Проинтегрируем уравнения (2.2) с учетом граничных условий (2.3):

$$p = (h - \eta) \cos \theta, \quad w = -\frac{\eta}{x} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \left(h - \frac{\eta}{2} \right) \quad (2.5)$$

$$u = \eta \left(h - \frac{\eta}{2} \right) \sin \theta, \quad v = \left[\frac{\eta^3}{6x} - \frac{\eta^2}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{h}{x} \right) \right] \sin \theta$$

Из кинематического условия (2.3) после подстановки в него (2.5) получаем уравнение для формы свободной поверхности

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \left[\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{h}{3x} \right] h^2 \sin \theta(\varphi) = 0 \quad (2.6)$$

Ищем решение этого уравнения в автомодельной форме $h = q(t)a(\varphi)f(x/x_r)$ ($x_r = b(\varphi)r(t)$), где $q(t)$, $r(t)$ – некоторые функции времени, а $a(\varphi)$ и $b(\varphi)$ – функции угла φ . Потребовав, чтобы уравнение (2.6) сводилось к обыкновенному дифференциальному уравнению, получим

$$r(t) = q^s(t), \quad a^2(\varphi) \sin \theta(\varphi) = b(\varphi) \quad (2.7)$$

При этом $q(t)$ удовлетворяет уравнению

$$q^{s-3} \frac{dq}{dt} = \text{const}$$

Класс решений этого уравнения содержит только степенные одночлены ($s \neq 2$) и экспоненты ($s = 2$). В соотношении (2.4) автомодельная замена переменных возможна при условиях

$$q(t)r^2(t) = \Lambda(t), \quad a(\varphi)b^2(\varphi) \cos \theta(\varphi) = 1$$

Из первого равенства следует, что автомодельность задачи имеет место только в том случае, когда общий объем жидкости зависит от времени либо по степенному, либо по экспоненциальному закону. Из второго равенства с учетом (2.7) находим

$$a(\varphi) = (\sin^2 \theta(\varphi) \cos \theta(\varphi))^{-1/5}, \quad b(\varphi) = \left(\frac{\sin \theta(\varphi)}{\cos^2 \theta(\varphi)} \right)^{1/5}. \quad (2.8)$$

Ниже построим решение задачи в случае, когда $\Lambda^*(t^*) = Q t^{*\gamma}$ (Q – размерный коэффициент, γ – неотрицательное действительное число), а случай экспоненциального закона массоподвода рассмотрим отдельно. Положим $2\pi \varepsilon^{1/2} L^3 = Q(L/U)^\gamma$, тогда закон сохранения массы (2.4) принимает вид

$$\int_0^{2\pi x_r} \int_0^0 h x \cos \theta dx d\varphi = 2\pi t^\gamma \quad (2.9)$$

Величины U и ε могут быть выражены через известные размерные параметры

$$U = \left(\frac{\rho g}{\mu} \right)^{1/(2\gamma+1)} \left(\frac{Q}{2\pi} \right)^{2/(2\gamma+1)} L^{(2\gamma-4)/(2\gamma+1)}$$

$$\varepsilon = \left(\frac{\mu}{\rho g} \right)^{2\gamma/(2\gamma+1)} \left(\frac{Q}{2\pi} \right)^{2/(2\gamma+1)} L^{-(2\gamma+6)/(2\gamma+1)}$$

Уравнение (2.6) имеет автомодельное решение в форме

$$h = t^n a(\varphi) f(z), \quad x = zb(\varphi)t^m, \quad m = 2n + 1$$

После подстановки этих равенств в (2.6) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{df}{dz} = -\frac{f(f^2 + 3nz)}{3z(f^2 - mz)}, \quad 0 < z < z_r, \quad f(z_r) = 0 \quad (2.10)$$

Из условия (2.9) находим $n = (\gamma - 2)/5$, $m = (2\gamma + 1)/5$. В автомодельных переменных передняя граница течения движется по закону $z = z_r = \text{const}$. Решение уравнения (2.10) допускает инвариантное преобразование, которое при условии (2.9) имеет вид

$$z = z_r \xi, \quad f = z_r^{1/2} \psi, \quad z_r = \left(\int_0^1 \psi(\xi) \xi d\xi \right)^{-2/5} \quad (2.11)$$

После подстановки (2.11) в (2.10) получаем уравнение

$$\frac{d\psi}{d\xi} = -\frac{\psi(5\psi^2 - (6 - 3\gamma)\xi)}{3\xi(5\psi^2 - (2\gamma + 1)\xi)}, \quad 0 < \xi < 1, \quad \psi(1) = 0 \quad (2.12)$$

Будем искать решения этого уравнения, однозначные и положительные на интервале $(0, 1)$. Уравнение (2.12) не имеет решений, принимающих нулевое значение при $\xi = 1$ и непрерывных в этой точке. Однако для этого уравнения существует класс решений, непрерывных на интервале $(0, 1)$, которые после доопределения в точке $\xi = 1$ по формуле $\psi(1) = 0$ имеют конечный скачок в этой точке. Ниже будем рассматривать решения уравнения (2.12), относящиеся к указанному классу.

Уравнение (2.12) заменой $\psi_1(\xi) = \psi^2(\xi)/\xi$ сводится к уравнению с разделяющимися переменными. Это уравнение при любом $\gamma \neq 1$ имеет однопараметрическое семейство решений, которое в исходных переменных принимает вид (свободный параметр – константа N)

$$(5\psi^2 - 3\xi)^{1-\gamma} \psi^{2\gamma+1} \xi = N \quad (2.13)$$

В качестве примера на фиг. 1 построены семейства решений уравнения (2.12) для $\gamma = 0.5$ (а) и 2 (б). Исходное уравнение (2.6) для формы поверхности имеет общее решение в виде (Φ – произвольная дифференцируемая функция двух переменных)

$$\Phi\left(xh^3, \frac{5}{3}t - \frac{x}{h^2 \sin \theta}\right) = 0$$

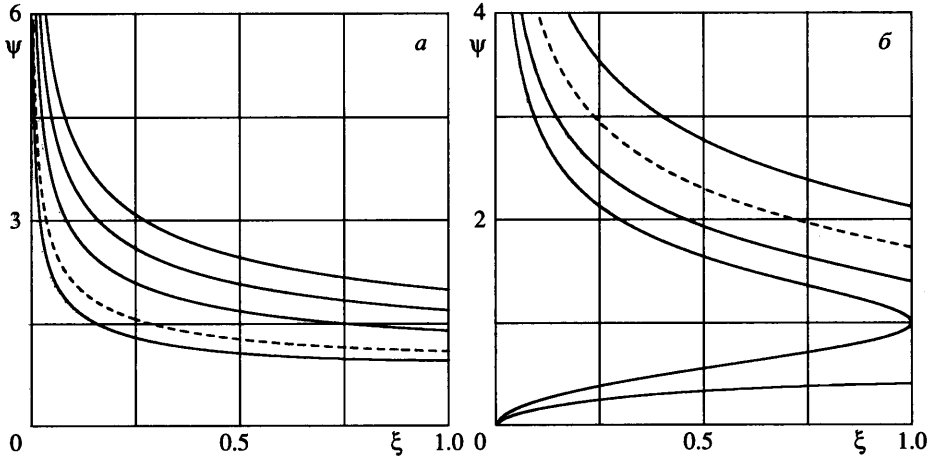
С использованием решения (2.13) находим явный вид функции Φ для случая автомодельного течения

$$xh^3 \left(\frac{5}{3}t - \frac{x}{h^2 \sin \theta} \right)^{1-\gamma} = N$$

Для любого $\gamma \geq 0$ уравнение (2.12) имеет решение, которое не зависит от γ

$$\psi(\xi) = \sqrt{3\xi/5}, \quad 0 < \xi < 1, \quad w_r = (125/12)^{1/5} \quad (2.14)$$

При каждом фиксированном $\gamma > 1$ однопараметрическое семейство решений (2.13) состоит из семейства возрастающих решений ($\psi(1) < \psi_d(\gamma)$) и семейства убывающих



Фиг. 1. Семейства автомодельных решений для формы свободной поверхности на конической поверхности при $\gamma = 0.5$ (а) и 2 (б); штриховая линия – решение без потока массы через передний фронт; выше (ниже) штриховой линии – решения при массоттоводе и подводе во фронте.

решений ($\psi(1) > \psi_d(\gamma)$), где $\psi_d(\gamma) = \sqrt{(2\gamma + 1)/5}$. При $\gamma = 1$ уравнение (2.12) распадается на два независимых уравнения

$$5\psi^2 - 3\xi = 0, \quad \frac{d\psi}{d\xi} = -\frac{\psi}{3\xi} \quad (2.15)$$

Положительное решение первого уравнения (2.15) совпадает с (2.14). Второе уравнение (2.15) имеет однопараметрическое семейство решений $\psi(\xi) = C\xi^{-1/3}$. При каждом фиксированном $\gamma < 1$ уравнение (2.12) имеет однопараметрическое семейство убывающих решений с предельной кривой, имеющей нулевую производную при $\xi = 1$. Полученные при различных γ автомодельные решения для формы свободной поверхности в размерных переменных принимают вид

$$h^* = z_r^{1/2} \left(\frac{\mu^2 Q}{2\pi \rho^2 g^2 \sin^2 \theta \cos \theta} \right)^{1/5} (t^*)^{(\gamma-2)/5} \psi(\xi), \quad \xi = \frac{x^*}{x_r^*(t^*)} \quad (2.16)$$

$$0 < x^* < x_r^*, \quad x_r^* = z_r \left(\frac{\rho g Q^2 \sin \theta}{4\pi^2 \mu \cos^2 \theta} \right)^{1/5} (t^*)^{(2\gamma+1)/5}$$

Рассмотрим течение от линейного источника на клиновидной поверхности, заданной функцией $\theta = \theta(r)$ (ось r направлена вдоль линии источника). Так как система уравнений, описывающая это течение, отличается от (2.2), (2.3) лишь уравнением неразрывности, опустим промежуточные выкладки. Уравнение для формы свободной поверхности в этом случае отличается от (2.6) лишь отсутствием неоднородного слагаемого. Аналогично случаю конической поверхности для этого уравнения автомодельные решения существуют только при степенном или экспоненциальном законе массоподвода. Однопараметрическое семейство автомодельных решений при степен-

ном законе роста объема жидкости со временем в размерной форме имеет вид (свободный параметр – константа M)

$$h^* = k_r^{1/2} \left(\frac{\mu Q}{2\rho g \sin\theta} \right)^{1/3} (t^*)^{(\gamma-1)/3} \chi(\zeta), \quad \zeta = \frac{x^*}{x_r^*(t^*)}$$

$$0 < x^* < x_r^*, \quad x_r^* = k_r \left(\frac{\rho g Q^2 \sin\theta}{4\mu} \right)^{1/3} (t^*)^{(2\gamma+1)/3} \quad (2.17)$$

$$M\chi^{(2\gamma+1)/(\gamma-1)} + \chi^2 = \zeta, \quad k_r = \left(\int_0^1 \chi(\zeta) d\zeta \right)^{-2/3}$$

3. Обсуждение полученных решений. Автомодельное уравнение (2.12) не имеет непрерывных решений, удовлетворяющих условию нулевой толщины пленки на передней границе, поэтому для каждого γ было построено семейство разрывных решений со скачком на переднем фронте. Для отбора решений, описывающих течение с точечным массоподводом только в вершине конической поверхности, воспользуемся законом сохранения массы на переднем фронте (1.4), который в растянутых переменных имеет вид:

$$\lim_{x \rightarrow x_{r0}} \int_0^h (u - u_r) d\eta = 0 \quad (3.1)$$

В автомодельных переменных это условие записывается в виде (для конической и клиновидной поверхностей соответственно)

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} \psi(\xi) = \sqrt{3(2\gamma+1)/5}, \quad \lim_{\zeta \rightarrow 1} \chi(\zeta) = \sqrt{2\gamma+1} \quad (3.2)$$

Таким образом, на конической поверхности для каждого γ существует единственное решение, удовлетворяющее условию точечного массоподвода в вершине и отсутствию потока массы через скачок толщины на передней границе (штриховая линия на фиг. 1). То же справедливо и для клиновидной поверхности. На фиг. 2, а представлены автомодельные решения для различных γ , описывающие течения с точечным массоподводом только в вершине и моделирующие рост лавового купола на твердой конической поверхности. В случае постоянного объема движущейся жидкости ($\gamma = 0$) условию (3.2) удовлетворяет решение (2.14). При $\gamma = 1$ этому условию удовлетворяет решение

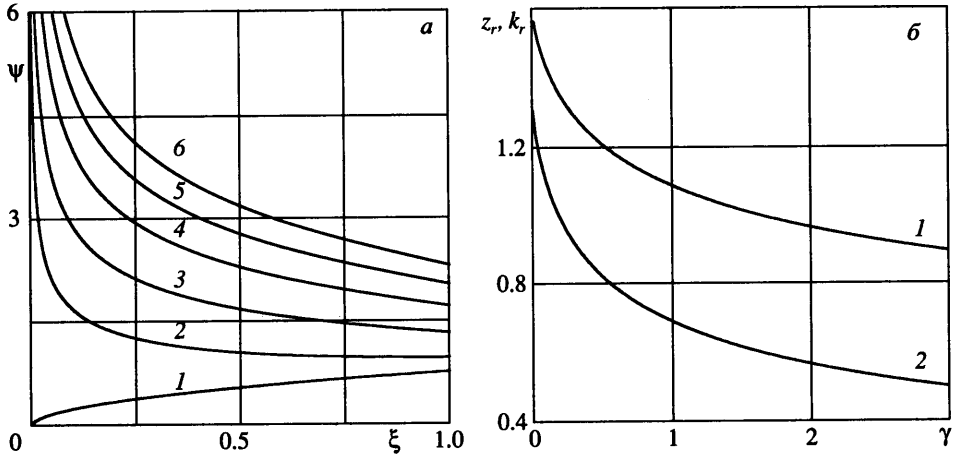
$$\psi(\xi) = (3/\sqrt{5})\xi^{-1/3}, \quad 0 < \xi < 1, \quad w_r = (125/81)^{1/5}$$

Это решение в переменных (t, x, φ) не зависит явно от времени

$$h(x, \varphi) = \left(\frac{6}{x \sin 2\theta} \right)^{1/3}, \quad 0 < x < x_r, \quad x_r = t^{3/5} \left(\frac{125 \sin\theta}{81 \cos^2\theta} \right)^{1/5}$$

Следовательно, оно удовлетворяет стационарным уравнениям и при $0 < x < x_r(t, \varphi)$ совпадает с решением аналогичной задачи в стационарной постановке [9].

Решения, для которых величина скачка на переднем фронте превышает (не достигает) значение (3.2), могут быть интерпретированы как решения со стоком массы (с массоподводом) на передней границе течения (кривые, лежащие выше (ниже) штриховой линии на фиг. 1). Этими решениями, в частности, можно описывать мед-



Фиг. 2. Автомоделные решения для формы поверхности лавового купола на конической поверхности при степенном законе массоподвода; $\gamma = 0, 0.3, 1, 2, 3, 4$ – кривые 1–6 (а); зависимость $z_r(1)$ и $k_r(2)$ от параметра γ для течения без потока массы через передний фронт при степенном законе массоподвода (б).

ленный сход лавин или оползней с непрерывным вовлечением в движение все новых масс среды на переднем фронте. При этом закон подвода (или отвода) массы на передней границе должен задаваться из рассмотрения более подробных моделей, описывающих течение на меньших масштабах длины вблизи передней границы течения.

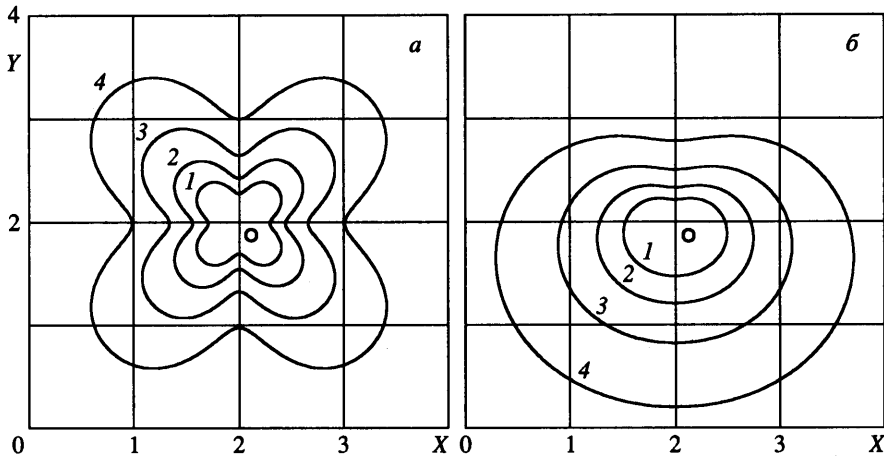
Полученное семейство решений со скачком толщины на переднем фронте можно обобщить и формально построить решение с разрывом при $\xi = \xi_0 < 1$ внутри области течения как решение уравнения (2.12) на интервале (0,1) с выколотой точкой ξ_0 . Возьмем слева и справа от точки ξ_0 разные решения (2.12) и примем условие отсутствия массоподвода и массоотвода на разрыве (в форме (3.1)), которое в автомоделных переменных выражается равенством

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0 - 0} \left(\psi^3(\xi) - \frac{3(2\gamma + 1)}{5} \xi \psi(\xi) \right) = \lim_{\xi \rightarrow \xi_0 + 0} \left(\psi^3(\xi) - \frac{3(2\gamma + 1)}{5} \xi \psi(\xi) \right)$$

Здесь обозначения $\xi_0 - 0$ и $\xi_0 + 0$ соответствуют пределам слева и справа. Из вида выражения, стоящего под знаком предела, получаем, что скачок повышения уровня ($\psi(\xi_0 - 0) > \psi(\xi_0 + 0)$) удовлетворяет условию $\psi_s / \sqrt{3} < \psi(\xi_0 - 0) < \psi_s$, а скачок понижения уровня удовлетворяет $0 < \psi(\xi_0 - 0) < \psi_s / \sqrt{3}$, где

$$\psi_s = \sqrt{3\xi_0(2\gamma + 1)/5}$$

Из двух непрерывных решений можно построить два различных решения с разрывом в одной точке – со скачком понижения и со скачком повышения уровня. Условие эволюционности разрыва [10] выполняется только для скачка увеличения толщины пленки, поэтому решение со скачком уменьшения толщины должно быть отброшено как неустойчивое. Сравнение последней формулы с (3.2) приводит к выводу, что все решения с разрывом в области течения относятся к типу решений с массоподводом на переднем фронте. По аналогии можно построить решения с двумя и более разрывами толщины пленки в области течения.



Фиг. 3. Положения переднего фронта в проекции на горизонтальную плоскость при течении с постоянным массоподводом на поверхностях $\theta(\varphi) = \pi/3 + (\pi/12) \cos(4\varphi)$ (а) и $\theta(\varphi) = 18\pi/5 + (\pi/6) \cos(\varphi)$ (б) в моменты времени $t = 0,5, 1, 2$ и 4 – кривые 1–4.

Для геофизических приложений наиболее важным представляется знание закона движения переднего фронта течения, для которого из (2.11), (2.16) и (2.17) имеем выражения в размерной форме для конической и клиновидной поверхностей соответственно

$$x_r^* = z_r(\gamma) \left[\frac{\sin \theta(\varphi)}{\cos^2 \theta(\varphi)} \right]^{1/5} \left(\frac{\rho g Q^2}{4\pi^2 \mu} \right)^{1/5} (t^*)^{(2\gamma+1)/5}, \quad z_r(\gamma) = \left(\int_0^1 \Psi(\xi) \xi d\xi \right)^{-2/5} \quad (3.3)$$

$$x_r^* = k_r(\gamma) [\sin \theta(r)]^{1/3} \left(\frac{\rho g Q^2}{4\mu} \right)^{1/3} (t^*)^{(2\gamma+1)/3}, \quad k_r(\gamma) = \left(\int_0^1 \chi(\zeta) d\zeta \right)^{-2/3}$$

Графики зависимостей $z_r(\gamma)$ и $k_r(\gamma)$ от показателя γ для течения с точечным (линейным) источником в вершине конической (клиновидной) поверхности при отсутствии потока массы через передний фронт представлены на фиг. 2,б. Формулы (3.3) дают возможность предсказать закон распространения лавы по подстилающей поверхности при известном законе массоподвода, а также позволяют восстановить мощность извержения и аппроксимировать закон массоподвода степенной зависимостью по известному закону движения передней границы лавового фронта. В выражения для закона движения переднего фронта явно входит зависимость от угла φ (координаты r), что позволяет оценить наиболее опасные направления распространения лавы при известном виде подстилающей поверхности. На фиг. 3 в качестве примера представлены положения переднего фронта в безразмерных переменных для течения при постоянном массоподводе в проекции на горизонтальную плоскость для двух конических поверхностей: $\theta(\varphi) = \pi/3 + (\pi/12) \cos(4\varphi)$ (а) и $\theta(\varphi) = 18\pi/5 + (\pi/6) \cos(\varphi)$ (б). Первая поверхность имеет четыре “гребня”, чередующиеся с четырьмя “ущельями”. Несмотря на одинаковый качественный характер распространения фронта со временем по всем направлениям количественная разница законов распространения жидкости вдоль гребня и вдоль ущелья может быть весьма велика, так как коэффициент b быстро растет при $\theta \rightarrow \pi/2$.

Решения в размерных переменных на конической (клиновидной) поверхности в случае степенного закона массоподвода не зависят от характерного масштаба длины, вы-

бранного при обезразмеривании. Скорость переднего фронта на конической (клиновидной) поверхности постоянна при $\gamma = 2(\gamma = 1)$, возрастает при $\gamma > 2(\gamma > 1)$ и убывает при $\gamma < 2(\gamma < 1)$.

Вопросы вывода уравнения для формы свободной поверхности (2.6) в случае двумерного течения, когда подстилающая поверхность есть конус или клин ($\theta = \text{const}$), а также частные их решения для постоянного массоподвода обсуждаются в [11]. Решение для клиновидной поверхности (2.17) в частном случае $\theta(r) = \text{const}$ совпадает с автомодельным решением задачи о течении от линейного источника на наклонной плоскости, полученным в [5].

4. Течения при экспоненциальном законе массоподвода. Рассмотрим течение при экспоненциальном законе роста объема жидкости со временем $\Lambda^*(t^*) = \Omega \exp(\kappa t^*)$ (здесь Ω, κ – размерные коэффициенты). Движение постоянного объема жидкости ($\kappa = 0$) рассмотрено выше, поэтому далее будем предполагать, что $\kappa > 0$. Полагая, что $2\pi L^3 \varepsilon^{1/2} = \Omega$, находим выражения для масштаба скорости U и малого параметра ε

$$U = \frac{\rho g \Omega^2}{4\pi^2 \mu L^4}, \quad \varepsilon = \frac{\Omega^2}{4\pi^2 L^6} \quad (4.1)$$

В силу (4.1) интегральный закон сохранения массы (2.4) в растянутых переменных можно записать в форме

$$\int_0^{2\pi x_r} \int_0^0 h x \cos \theta dx d\varphi = \exp(\lambda t), \quad \lambda = \frac{\kappa L}{U} \quad (4.2)$$

В случае течения на конической поверхности уравнение для формы свободной поверхности (2.6) сводится к обыкновенному уравнению заменой (обозначения для автомодельных переменных те же, что и ранее)

$$h = z_r^{1/2} a(\varphi) \exp(\lambda t/5) \psi(\xi), \quad \xi = x/x_r, \quad x_r = z_r b(\varphi) \exp(2\lambda t/5) \quad (4.3)$$

$$\frac{d\psi}{d\xi} = \frac{\psi(5\psi^2 + 3\lambda\xi)}{3\xi(5\psi^2 - 2\lambda\xi)}, \quad 0 < \xi < 1, \quad \psi(1) = 0$$

Здесь функции a и b определяются по формулам (2.8), а z_r выражается через решение по формуле (2.11). Уравнение (4.3) отличается от (2.12) лишь постоянными коэффициентами. Однопараметрическое семейство решений этого уравнения имеет вид

$$\ln[\xi\psi^3] + 3\lambda\xi/5\psi^2 = B$$

Здесь B – свободный параметр. Для отбора решений, соответствующих массоподводу только в вершине конической поверхности, воспользуемся условием отсутствия потока массы через передний фронт (3.1), которое в автомодельных переменных принимает вид

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} \psi(\xi) = \sqrt{6\lambda/5} \quad (4.4)$$

С помощью решений, удовлетворяющих условию (4.4), можно описывать катастрофически развивающиеся вулканические извержения, при которых общий объем извергаемой лавы растет со временем по экспоненциальному закону. Уравнение для формы свободной поверхности в автомодельных переменных с точностью до постоянных коэффициентов совпадает с уравнением, полученным выше для случая степенного закона массоподвода, поэтому семейства решений этих уравнений совпадают по качественной структуре.

В отличие от случая степенной зависимости объема жидкости от времени характерный масштаб длины для рассматриваемого течения определяется однозначно через заданные размерные параметры из условия, что безразмерное расстояние, пройденное передним фронтом за безразмерное единичное время, равняется единице

$$C_1 = \ln\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{\sin\theta}} z_r^{-5/2}\right), \quad L = \left(\frac{\rho g \Omega^2 C_1}{4\pi^2 \mu \kappa}\right)^{1/5} \quad (4.5)$$

Подставляя (4.5) в (4.1), имеем выражения для масштаба обезразмеривания скорости и малого параметра через размерные определяющие параметры

$$U = \left[\frac{\rho g \left(\frac{\Omega \kappa^2}{2\pi C_1}\right)^2}{\mu}\right]^{1/5}, \quad \varepsilon = \left[\left(\frac{\mu \kappa}{\rho g C_1}\right)^3 \frac{2\pi}{\Omega}\right]^{2/5}$$

Решения, полученные для экспоненциального закона массоподвода, имеют существенные ограничения на области допустимых значений определяющих размерных параметров, при которых справедливо приближение тонкого слоя.

Полученные решения после восстановления размерных переменных принимают вид

$$h^* = z_r^{1/2} \left[\left(\frac{\mu \kappa}{\rho g C_1 \sin\theta}\right)^2 \frac{\Omega}{2\pi \cos\theta} \right]^{1/5} \exp\left(\frac{\kappa t^*}{5}\right) \psi(\xi), \quad \xi = \frac{x^*}{x_r}$$

$$0 < x^* < x_r, \quad x_r = z_r \left(\frac{\rho g \Omega^2 C_1 \sin\theta}{4\pi^2 \mu \kappa \cos^2\theta}\right)^{1/5} \exp\left(\frac{2\kappa t^*}{5}\right)$$

Уравнение для формы свободной поверхности в случае течения на клиновидной поверхности также имеет семейство автомодельных решений при экспоненциальном законе массоподвода

$$h^* = k_r^{1/2} \left(\frac{\Omega \mu \kappa}{2\rho g C_0 \sin\theta}\right)^{1/3} \exp\left(\frac{\kappa t^*}{3}\right) \chi(\zeta), \quad \zeta = \frac{x^*}{x_r}, \quad \chi^2 \left[A - \frac{3}{\lambda} \ln \chi\right] = \zeta$$

$$x_r = k_r \left(\frac{\rho g \Omega^2 C_0 \sin\theta}{4\mu \kappa}\right)^{1/3} \exp\left(\frac{2\kappa t^*}{3}\right), \quad C_0 = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\sin\theta}} k_r^{-3/2}\right)$$

Здесь k_r определяется формулой (2.17), A – свободный параметр. Условие отсутствия потока массы через передний фронт (3.1) для этого течения принимает вид

$$\lim_{\zeta \rightarrow 1} \chi(\zeta) = \sqrt{2\lambda}$$

5. Течения при малых углах наклона образующей конуса (клина) к горизонтали. Рассмотрим течение на произвольной подстилающей поверхности с малым углом наклона образующей к горизонтали и массоподводом в конечной окрестности точки O (в формулах (1.1) положим $L = D$, тогда $v_m(t, x < 1, \varphi) > 0$ и $v_m(t, x \geq 1, \varphi) = 0$). Главные члены асимптотических разложений искомых функций при малых θ и конечных φ имеют порядки

$$y = \varepsilon^{1/3} \eta, \quad h = \varepsilon^{1/3} h_0, \quad v = \varepsilon^{1/3} v_0, \quad \theta = \varepsilon^{1/3} \vartheta, \quad p = \varepsilon^{-2/3} p_0 \quad (5.1)$$

Индекс 0 ниже опущен. Остальные функции имеют порядок единицы. Предположим, что у формы свободной поверхности отсутствует излом

$$x = 0: \quad \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (5.2)$$

Введем обозначения: $v_m = \varepsilon^{1/3} q$ и V – профиль скорости массоподвода в растянутых переменных и ее характерный размерный масштаб. Из уравнения неразрывности следует, что $V \sim \varepsilon^{1/3} U$. Без ограничения общности можно выбрать масштаб скорости U так, что $V = \varepsilon^{1/3} U$, тогда величины U и ε могут быть выражены через известные размерные параметры

$$U = v \left(\frac{\rho g D^2}{\mu V} \right)^{1/4}, \quad \varepsilon = \left(\frac{\mu V}{\rho g D^2} \right)^{3/4}$$

Будем предполагать $Re = o(\varepsilon^{-2/3})$. Подставляя (5.1) в (1.1)–(1.3) и оставляя главные члены, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \vartheta(x, \varphi), \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} = -1, \quad \frac{1}{x} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}$$

$$\eta = h: \quad v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}, \quad p = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \quad (5.3)$$

$$\eta = 0: \quad u = w = 0, \quad v = q$$

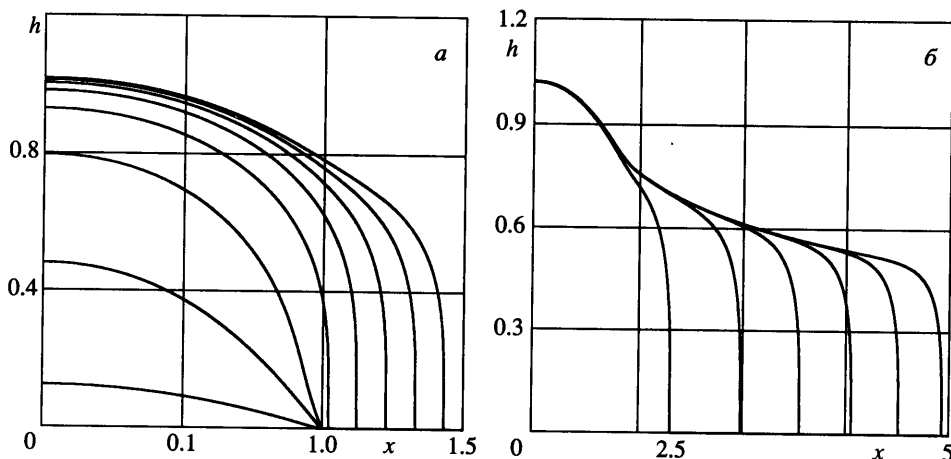
Первое динамическое уравнение (5.3) содержит самоиндуцированный продольный градиент давления, что существенно отличается от системы уравнений тонкого слоя на поверхности с конечным углом наклона образующей к горизонтали (2.2), в которой характер движения определяется лишь балансом сил тяжести и вязкого трения. Аналогично (2.2) в рамках сделанных предположений система уравнений (5.3) описывает течения не только при малых, но и при конечных числах Рейнольдса. При этом задача о нахождении w не отделяется, и система (5.3) трехмерна. Из уравнений (5.3) имеем

$$u = \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \vartheta \right) \left(\frac{\eta^2}{2} - \eta h \right), \quad p = h - \eta$$

Выражение для компоненты w в данном случае совпадает с (2.5). Интегрируя уравнение неразрывности в (5.3) по координате η в пределах от $\eta = 0$ до $\eta = h$, получаем

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{3x^j} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^j h^3 \left(\vartheta - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] - \frac{1}{3x^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial h}{\partial \varphi} h^3 \right) = q \quad (5.4)$$

Для сравнения с известными решениями и результатами, полученными выше, рассмотрим решения уравнения (5.4) в случае осесимметричного (или плоского) течения (положим в уравнении $\partial/\partial\varphi \equiv 0$). Тогда $j = 0$ или 1 в (5.4) соответствует плоскому или осесимметричному течению. Для случая течения на горизонтальной плоскости ($\vartheta(x) \equiv 0$) в [2] были найдены автомодельные решения уравнения (5.4) при точечном или линейном массоподводе и степенной зависимости объема движущейся жидкости от времени. В случае $\vartheta(x) \neq 0$ даже при отсутствии масштаба длины в граничных условиях уравнение (5.4) не имеет автомодельных решений, однако, как показано ниже, его решения имеют автомодельные асимптотики. Аналогичная ситуация возникала в [5] при изучении течений на плоскости с малым углом наклона к горизонтали от точечного (линейного) источника.



Фиг. 4. Положения формы свободной поверхности при линейном росте объема жидкости со временем для течения на конусе, затупленном по сфере, при $x_0 = 1.2$. Интервал по времени 0.5 (а) и 5 (б)

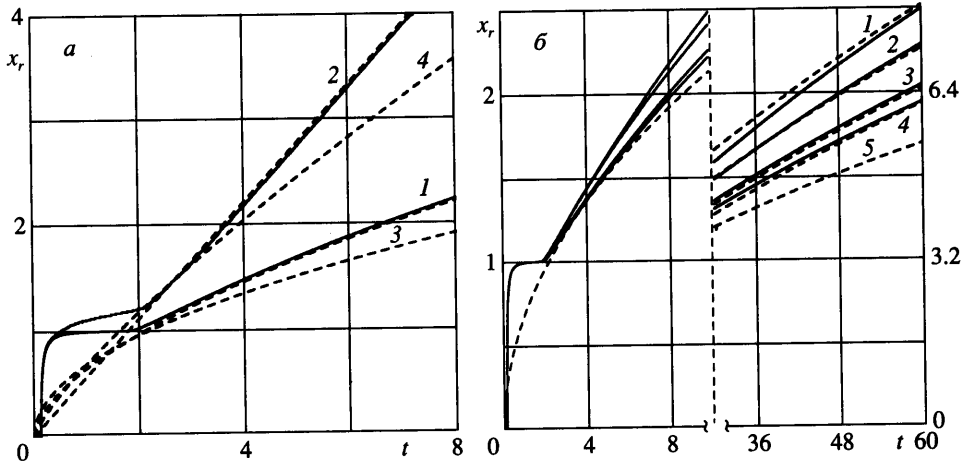
В качестве примера рассмотрим течение на поверхности конуса (клина) ($\vartheta(x) = \text{const}$). В этом случае уравнение (5.4) не имеет автомодельного решения при точечном массопроводе ($L \gg D$), поэтому оно решалось численно для течения с распределенным массопроводом ($L = D$) на поверхности в форме конуса (клина), затупленного по сфере (цилиндру) радиуса $R = \varepsilon^{-1/3}$. Для этого случая имеем $\vartheta(x \leq x_0) = x$ и $\vartheta(x > x_0) = x_0$, где x_0 – координата точки перехода сферы (цилиндра) в конус (клин).

Была введена прямоугольная сетка с шагом по времени Δt и шагом по пространственной координате Δx и составлена двухслойная неявная схема на шеститочечном шаблоне с использованием центральных разностей для аппроксимации $\partial h / \partial x$. Свободный член в уравнении (5.4) терпит разрыв в точке x_0 , поэтому была выбрана специальная сетка, в которой точка разрыва совпадает с узлом сетки. При использовании неявной схемы дополнительное условие в этой точке не требуется [12]. Граничным условием при $x = 0$ является (5.2), а условие $h = 0$ при $x \rightarrow \infty$ сносится на некоторое достаточно большое X , до которого передний фронт течения заведомо не дойдет за расчетное время. Схема имеет погрешность аппроксимации $O(\Delta t, \Delta x)$, так как левое граничное условие аппроксимируется с первым порядком точности. Для того чтобы тип уравнения не менялся в пределах расчетной области, при $t = 0$ задана ненулевая толщина слоя на всем отрезке $[0, X]$ по формуле $h(0, x) = 10^{-3} \exp(-x^2/25)$. Система линейных уравнений с трехдиагональной матрицей, возникающая на каждом шаге по времени, решалась методом прогонки [13]. Для матрицы схемы выполняется условие преобладания диагональных элементов, поэтому метод прогонки устойчив [12]. Приближение тонкого слоя, в рамках которого было получено уравнение (5.4), не выполняется в области бесконечных градиентов h в малой окрестности передней границы течения. По аналогии с [6, 14], для того чтобы избежать разрыва решения на передней границе, в схему была введена искусственная вязкость в виде малой аддитивной постоянной $\sigma = 10^{-7}$ в коэффициенте при старшей производной.

Результаты расчетов для осесимметричного течения в случае, когда массопровод непрерывно выходит на стационарный режим по закону

$$q(t, x) = ((t - 1)\Theta(1 - t) + 1)(1 - x^2)\Theta(1 - x) \quad (5.5)$$

проиллюстрированы на фиг. 4 ($\Theta(x)$ – функция Хевисайда). Численные расчеты проведены для $x_0 = 1.2$. При $t \gg 1$ решение совпадает с решением соответствующей задачи



Фиг. 5. Зависимость $x_r(t)$ при линейном росте объема жидкости со временем для течения: на конусе (1) (клине (2)), затупленном по сфере (цилиндру) при $x_0 = 1.2$, на горизонтальной плоскости с точечным (3) и линейным (4) источником (а); на конусе, затупленном по сфере, при $x_0 = 2, 1, 0.5$ и 0.3 – кривые 1–4, кривая 5 – автомодельное решение для точечного источника на горизонтальной плоскости при $\gamma = 1$ (б). Сплошные линии – численные расчеты, штриховые – автомодельные асимптотики

в квазистационарной постановке [9]. Для плоского случая также были проведены расчеты и получены качественно аналогичные результаты. Найденные решения описывают распространение лавы по подстилающей поверхности при повторном экструзивном извержении вулкана.

Решение уравнения (5.4) в случае, когда объем движущейся жидкости растет со временем пропорционально t^j , имеет автомодельную асимптотику при $t \rightarrow \infty$. Движение в автомодельном режиме определяется балансом сил тяжести и сил вязкого трения (продольный градиент давления со временем становится внепорядковым членом в динамическом уравнении (5.3)), и асимптотика совпадает с автомодельным решением задачи при конечных углах наклона образующей к горизонтали, полученным в разд. 2. Для этого решения закон движения переднего фронта течения (3.3) в безразмерной форме имеет вид (C_1 – константа, определяемая граничными условиями)

$$x_r(t) = C_1 t^{(2\gamma+1)/(3+2j)} \quad (5.6)$$

Существование автомодельной асимптотики подтверждается численными расчетами (фиг. 5, а и б). На фиг. 5, а представлен закон движения передней границы течения $x_r(t)$ при $x_0 = 1.2$ и законе массоподвода (5.5). Для сравнения приведем закон движения переднего фронта для автомодельного течения на горизонтальной плоскости от точечного (линейного) источника [2] в случае, когда объем жидкости растет как t^j (здесь C_2 – константа)

$$x_r(t) = C_2 t^{(3\gamma+1)/(5+3j)} \quad (5.7)$$

На фиг. 5, а в качестве примера представлены решения (5.7) при $\gamma = 1$. На фиг. 5, б проиллюстрирована зависимость численного решения от параметра x_0 для осесимметричного случая при законе массоподвода (5.5). Однопараметрическое семейство решений (с параметром x_0) при фиксированном законе массоподвода на конечном интервале времени имеет при $x_0 \rightarrow 0$ предельную кривую – решение для горизонтальной

плоскости (5.7). Однако при любом фиксированном $x_0 > 0$ решение при $t \rightarrow \infty$ имеет автомодельную асимптотику (5.6), существенно отличающуюся от решения для горизонтальной плоскости (5.7). Таким образом, при сколь угодно малом угле наклона образующей поверхности к горизонтали закон движения переднего фронта асимптотически отличается от соответствующего закона для горизонтальной плоскости.

Полученные выше решения описывают экструзивное извержение вулкана на подстилающую поверхность в форме затупленного по сфере (цилиндру) конуса (клина), имеющего малый угол наклона образующей к горизонтали.

Заключение. В приближении тонкого слоя тяжелой сильновязкой ньютоновской жидкости с локализованным массоподводом построена трехмерная гидродинамическая модель роста лавового купола на твердой конической (клиновидной) поверхности. При конечных углах наклона образующей поверхности к горизонтали задача сведена к однопараметрическому семейству двумерных задач, а для формы свободной границы получено эволюционное уравнение с частными производными первого порядка. При точечном (линейном) массопроводе в вершине конической (клиновидной) поверхности и степенной или экспоненциальной зависимости объема движущейся жидкости от времени аналитически найдено единственное автомодельное решение для формы свободной поверхности и закона движения переднего фронта течения. Показано, что рассмотренными случаями степенного и экспоненциального законов массопровода полностью исчерпываются классы автомодельных решений эволюционного уравнения. Получены также семейства автомодельных решений, описывающих течения при наличии источников или стоков массы на передней границе течения.

В случае течения на произвольной поверхности с малыми углами наклона образующей к горизонтали для формы свободной поверхности получено параболическое уравнение с частными производными второго порядка. Установлено, что это уравнение не имеет автомодельных решений в случае конической (клиновидной) поверхности, однако его решение имеет автомодельную асимптотику при степенном законе массопровода, совпадающую с автомодельным решением задачи при конечных углах наклона образующей поверхности. Неавтомодельный режим течения и процесс выхода на автомодельную асимптотику исследованы численно. Показано, что учет сколь угодно малых углов наклона образующей поверхности к горизонтали приводит к изменению асимптотического закона движения переднего фронта по сравнению с соответствующим законом для горизонтальной плоскости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 02-01-00067). Автор выражает благодарность А.А. Бармину и О.Э. Мельнику за обсуждение и полезные рекомендации. Автор также благодарен Г. Хупперту (H.E. Huppert, Cambridge) за обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Griffiths R.W. The dynamics of lava flows // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2000. V. 32. P. 477–518.
2. Huppert H.E. The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents over a rigid horizontal surface // *J. Fluid Mech.* 1982. V. 121. P. 43–58.
3. Huppert H.E., Shepherd J.B., Sigurdsson H., Sparks R.S.J. On lava dome growth, with application to the 1979 lava extrusion of the Soufrière of St. Vincent // *J. Volcanol. Geotherm. Res.* 1982. V. 14. № 3–4. P. 199–222.
4. Smith P.C. A similarity solution for slow viscous flow down an inclined plane // *J. Fluid Mech.* 1973. V. 58. Pt 2. P. 275–288.
5. Lister J.R. Viscous flows down an inclined plane from point and line sources // *J. Fluid Mech.* 1992. V. 242. P. 631–653.
6. Balmforth N.J., Burbidge A.S., Craster R.V., Salzig J., Shen A. Visco-plastic models of isothermal lava domes // *J. Fluid Mech.* 1999. V. 403. P. 37–65.

7. *Balmforth N.J., Craster R.V., Sassi R.* Shallow viscoplastic flow on an inclined plane // *J. Fluid Mech.* 2002. V. 470. P. 1–29.
8. *Бармин А.А., Мельник О.Э.* Гидродинамика вулканических извержений // *Успехи механики.* 2002. Т. 1. № 1. С. 32–60.
9. *Осипцов А.А.* Стационарное пленочное течение сильновязкой тяжелой жидкости с массоподводом // *Изв. РАН. МЖГ.* 2003. № 6. С. 24–31.
10. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Нелинейные волны в упругих средах. М.: Московский лицей, 1998. 412 с.
11. *Acheson D.J.* Elementary fluid dynamics. Oxford: Clarendon Press, 1990.
12. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
13. *Самарский А.А., Попов Ю.П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980. 352 с.
14. *Liu K.F., Mei C.C.* Slow spreading of a sheet of Bingham fluid on an inclined plane // *J. Fluid Mech.* 1989. V. 207. P. 505–529.

Москва

Поступила в редакцию
25.III.2003