

УДК 532.517.2:536.21

© 2004 г. И. В. ШЕВЧУК

ЛАМИНАРНЫЙ ТЕПЛОБМЕН ЗАКРУЧЕННОГО ПОТОКА В КОНИЧЕСКОМ ДИФFUЗОРЕ: АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

Рассмотрен теплообмен ламинарного закрученного воздушного потока в диффузоре между диском и конусом, который касается диска своей вершиной. С помощью группового анализа получена автомодельная форма уравнений Навье–Стокса и энергии. Получено точное численное решение при различных соотношениях радиальной и тангенциальной скоростей на входе в диффузор.

Ключевые слова: теплообмен, закрученный поток, конический диффузор.

В технике известны конические диффузоры с вращающимися и неподвижными стенками [1–4]. Течение жидкости в зазоре между вращающимся конусом и неподвижной пластиной используется в вискозиметрии и медицине [1–3]. Теоретические решения упрощенных уравнений Навье–Стокса для малых углов конусности зазора $\gamma \leq 5^\circ$ [2, 3] получены методом разложения в ряд по малому параметру. Упрощенные уравнения Навье–Стокса для неподвижного диффузора без учета закрутки потока использовались в [4]. Ни в одной из известных работ не приведены данные для теплообмена в зазоре.

Задачей настоящей работы является получение автомодельной формы полных уравнений Навье–Стокса и энергии для конического зазора, а также численное моделирование ламинарного закрученного течения с теплообменом.

1. Автомодельные уравнения. В данной работе уравнения Навье–Стокса в цилиндрических координатах [4–6] решаются совместно с уравнением теплового пограничного слоя и граничными условиями

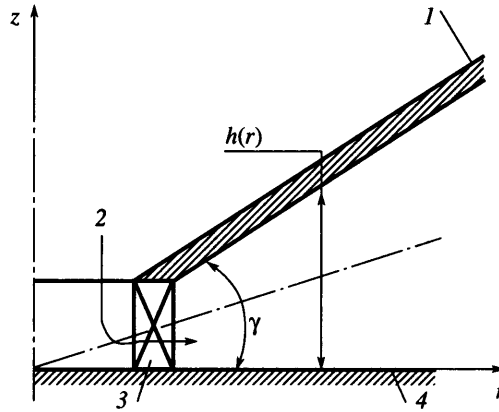
$$\begin{aligned} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\phi^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) \\ v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{v_r v_\phi}{r} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial z^2} \right) \\ v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$z = 0: \quad v_r = v_\phi = v_z = 0, \quad T_w - T_\infty = c_0 r^{n_*}$$

$$z = z_1 = \frac{h}{2}: \quad v_r = v_{r1}, \quad v_\phi = v_{\phi1}, \quad \frac{dv_r}{dz} = 0, \quad T = T_\infty \quad (1.2)$$

Здесь v_r , v_ϕ и v_z – компоненты скорости в цилиндрических координатах r , ϕ и z ($z = 0$ на диске, фиг. 1); T – температура; a – температуропроводность; c_0 и n_* – константы;



Фиг. 1. Схема течения закрученного потока в коническом диффузоре: 1 – конус; 2 – жидкость; 3 – завихритель; 4 – диск

индексы “w”, “∞” и “1” означают условия на диске, на выходе из диффузора ($r = r_\infty$) и при $z = z_1$, соответственно. Высота зазора $h = r \cdot \operatorname{tg} \gamma$.

Использование переменных и функций, автомодельных относительно маршевой координаты (в данном случае r), позволяет редуцировать дифференциальные уравнения в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [6]. Такие системы легко решаются численно с помощью прикладных математических пакетов (MathCAD, МАТЕМАТИКА и др.).

Автомодельные формы для данной задачи находятся с помощью метода группового анализа дифференциальных уравнений [5]. Положим

$$r = A^{\alpha_1} \bar{r}, \quad z = A^{\alpha_2} \bar{z}, \quad v_r = A^{\alpha_3} \bar{v}_r, \quad v_\varphi = A^{\alpha_4} \bar{v}_\varphi, \quad v_z = A^{\alpha_5} \bar{v}_z, \quad p = A^{\alpha_6} \bar{p} \quad (1.3)$$

где p – статическое давление; α_k ($k = 1, \dots, 6$) и A – константы. Соотношения (1.3) подставляются в уравнения (1.1), (1.2). Уравнение инвариантно, если одинаковы суммарные степени константы A при каждом члене преобразованного уравнения. В результате $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = -\alpha$, $\alpha_6 = -2\alpha$ и

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{\bar{r}}{r}, \quad \bar{v}_r \bar{r} = v_r r, \quad \bar{v}_\varphi \bar{r} = v_\varphi r, \quad \bar{v}_z \bar{r} = v_z r, \quad \bar{p} \bar{r}^2 = p r^2 \quad (1.4)$$

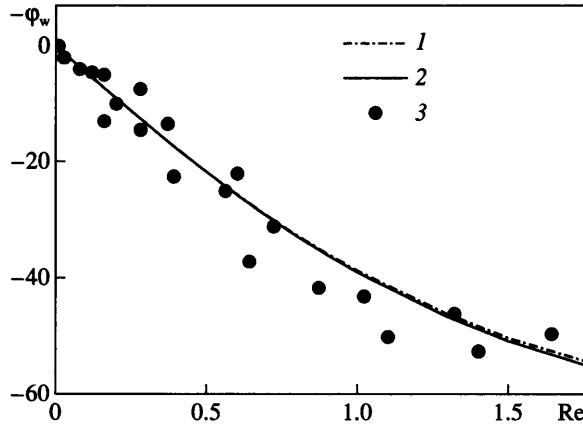
Комбинации (1.4) инвариантны относительно линейных преобразований (1.3). В соответствии с теоремой Моргана [5], они являются переменными подобия при условии, что граничные условия задачи можно выразить в виде, не зависящем от r . Тогда имеют такие автомодельные переменные и функции

$$\eta = \frac{z}{r}, \quad F = \frac{v_r r}{\nu}, \quad G = \frac{v_\varphi r}{\nu}, \quad H = \frac{v_z r}{\nu}, \quad P = \frac{p r^2}{\rho \nu^2}, \quad \Theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \quad (1.5)$$

где ν – кинематическая вязкость; ρ – плотность. Функция Θ неизменна. Подставляя формулы (1.5) в уравнения (1.1), (1.2) и опуская члены, содержащие производные по r , имеем

$$F^2 + G^2 + 2P + F'L + \eta P' + F''M = 0$$

$$G'L + G''M = 0 \quad (1.6)$$



Фиг. 2. Угол закрутки потока на поверхности неподвижного диска при вращающемся конусе: 1 – уравнения (1.6), 2 – $\phi_w = -\text{arctg}(0.8 \text{ Re})$ [2], 3 – эксперимент [2]

$$\begin{aligned}
 P' - H(1 + F) - H'L - H''M &= 0 & H' - \eta F' &= 0 \\
 \Theta'' &= \text{Pr}[n_* F \Theta + \Theta(H - \eta F)] & &
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned}
 \eta = 0: & \quad F = G = H = 0, \quad \Theta = 1 \\
 \eta = \eta_1: & \quad G = G_1, \quad F = F_1, \quad F' = 0, \quad \Theta = 0 \\
 M = 1 + \eta^2, \quad L = 3\eta + \eta F - H, \quad \eta_1 &= \frac{h}{2r}
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Здесь $\text{Pr} = \nu/a$ – число Прандтля, штрихи обозначают производные по координате η . Локальное число Нуссельта рассчитывается по соотношению

$$\text{Nu} = \frac{q_w r}{\lambda(T_w - T_\infty)} = -\Theta'_{\eta=0}$$

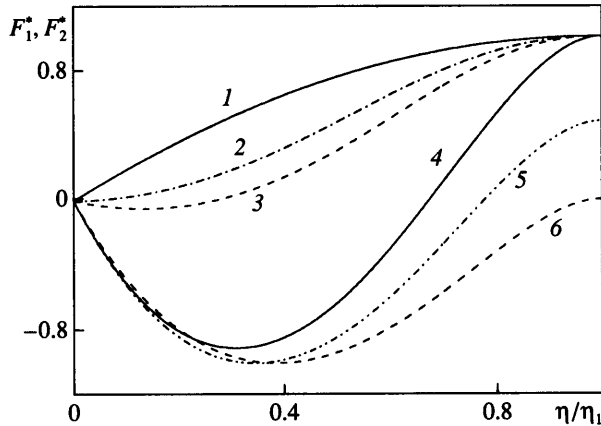
где q_w – тепловой поток на диске; λ – коэффициент теплопроводности.

2. Результаты расчетов. Проверка физичности системы (1.6) – (1.8) выполнена путем сравнения с экспериментами [2] для случая вращения конуса при неподвижном диске. Граничными условиями при $z_1 = h$ были $F = H = 0, G_1 = \omega^2/\nu$, где ω – угловая скорость вращения конуса. Расчеты для угла закрутки потока $\phi_w = \text{arctg}(-F'_w/G'_w)$ [7] хорошо согласуются с экспериментами и формулой [2] (фиг. 2). Здесь $\text{Re} = \text{Re}_\omega \eta_1^2/12 = 1, \eta_1 = 0.0698$ (угол $\gamma = 4^\circ$).

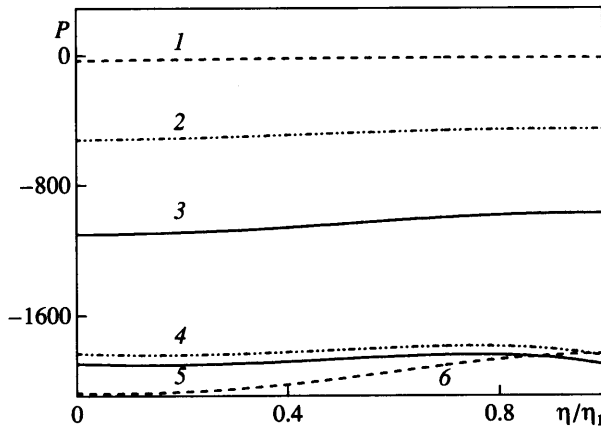
Дальнейшие расчеты выполнены для неподвижного диффузора с углом $\gamma = 35^\circ$ или $\eta_1 = 0.35$. С физической точки зрения, граничные условия (1.8) означают, что закрученное течение развивается как свободный вихрь вдоль биссектрисы угла зазора

$$(v_r)_{\eta=\eta_1} = \frac{F_1 \nu}{r}, \quad (v_\phi)_{\eta=\eta_1} = \frac{G_1 \nu}{r}$$

В реальных условиях свободный вихрь может занимать значительную часть высоты зазора, а пограничный слой образуется лишь вблизи стенок. В нашей работе рассматривается случай, когда условия (1.8) обеспечиваются лишь при $\eta = \eta_1$.

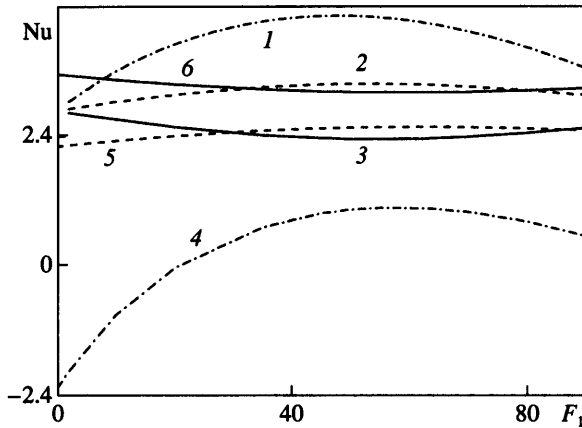


Фиг. 3. Профили радиальной скорости $F_1^* = F/F_1$ (1-4) или $F_2^* = F/F_{\max}$ (5, 6) в зазоре между диском и конусом: 1 - $F_1 = 2$, $G_1 = 0$; 2 - $F_1 = 63$, $G_1 = 0$; 3 - $F_1 = 90$, $G_1 = 0$; 4 - $F_1 = 20$, $G_1 = 97.96$; 5 - $F_1 = 10$, $G_1 = 97.96$, $|F|_{\max} = 20.66$; 6 - $F_1 = 0$, $G_1 = 97.96$, $|F|_{\max} = 24.28$



Фиг. 4. Перепад статического давления в зазоре при $G_1 = 0$ (кривые 1-4) и $G_1 = 97.96$ (1, 6 - $F_1 = 20$; 2 - $F_1 = 45$; 3 - $F_1 = 90$; 5 - $F_1 = 10$)

Незакрученное радиальное течение ($G_1 = 0$) является безотрывным при $F_1 < 63$, отрывным при $F_1 \approx 63$ и имеющим область возвратного течения у диска при $F_1 > 63$ (фиг. 3). Причиной отрыва является диффузорность; ее уменьшение до $\eta_1 = 0.035$ приводит к увеличению отрывного значения до $F_1 \approx 7500$. Закрутка ($G_1 = 97.96$, $Re = G_1 \eta_1^2 / 12 = 1$) приводит к возникновению возвратного течения у диска (фиг. 3). В предельном случае нулевой радиальной скорости $F_1 = 0$ на выходе из завихрителя величина v , является отрицательной при любых η , кроме $\eta = \eta_1$ (кривая 6; величина $|F|_{\max}$ есть максимальное абсолютное значение F в точке минимума кривой $\tilde{F}_2^* = F/F_{\max}$ при $\eta/\eta_1 \approx 0.4$, т.е. $F_{\max} = -24.28$). С ростом F_1 область возвратного течения сужается, а вблизи оси зазора расширяется область центробежного течения. Тангенциальная компонента скорости G в зазоре возрастает практически линейно от нуля при $\eta = 0$ до G_1 при $\eta = \eta_1$.



Фиг. 5. Число Нуссельта в зазоре при $G_1 = 0$ (кривые 1–3) и $G_1 = 97.96$ (кривые 4–6):
1, 4 — $n_* = 2$; 2, 5 — $n_* = 0$; 3, 6 — $n_* = -1$

Диффузор служит для восстановления статического давления: с ростом координаты r давление растет за счет уменьшения компонент скорости $(v_r)_{\eta=\eta_1}$ и $(v_\varphi)_{\eta=\eta_1}$. Для соблюдения автомодельности функции P необходимо, чтобы под величиной p в (1.10) понималось избыточное давление $p - p_\infty$, уменьшающееся с ростом r (при $P_\infty = \text{const}$). При течении незакрученного потока ($G_1 = 0$) величина P , характеризующая степень восстановления давления, возрастает с ростом F_1 (фиг. 4). При $G_1 = 97.96$ и $F_1 = 0-20$ закрутка потока приводит к заметному возрастанию величины P , а вклад F_1 является слабым.

Зависимости числа Нуссельта от F_1 в области $F_1 = 50-63$ имеют точки максимума при $n_* = 2$ и 0 и точки минимума при $n_* = -1$ (фиг. 5). Для случая $G_1 = 0$ увеличение Nu с ростом F_1 наблюдается в случае, когда направление радиального течения совпадает с направлением радиального роста температуры T_w (подобно вращающемуся диску [7–8]). Число Nu с ростом F_1 уменьшается в случае, когда знаки v_r и dT_w/dr противоположны. Хотя при $G_1 = 97.96$ с ростом F_1 не происходит смена знака v_r , зависимости Nu от F_1 для данного случая качественно подобны незакрученному течению. Увеличение числа Nu с ростом n_* происходит в случае $G_1 = 0$, когда направление основного радиального течения совпадает с направлением радиального роста T_w . Наложение закрутки приводит к различию знаков v_r и dT_w/dr и уменьшению Nu при $n_* = 0$ и 2 ; в то же время при $n_* = -1$ знаки v_r и dT_w/dr одинаковы, а число Nu возрастает.

При $F_1 \leq 21$, $G_1 = 97.96$ и $n_* = 2$ профиль температуры в жидкости, текущей с относительно высокой скоростью в сторону одновременного уменьшения r и T_w , имеет максимум вблизи стенки (в остальных случаях T уменьшается с ростом z). Число Nu принимает отрицательные значения, что означает изменение знака теплового потока: жидкость нагревает стенку, а не наоборот (фиг. 5).

Заключение. С помощью автомодельных по радиальной координате профилей скорости и температуры получено точное численное решение задачи теплообмена в ламинарном закрученном течении в неподвижном коническом диффузоре. Исследовано влияние параметров граничных условий на профили скорости и давления, а также число Нуссельта.

Настоящее исследование выполнено при частичной поддержке Немецкой службы академических обменов (DAAD).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mooney M., Ewart R.H.* The conicylindrical viscosimeter // *Physics*. 1934. V. 5. № 11. P. 350–354.
2. *Sdougos H.P., Bussolari S.R., Dewey C.F.* Secondary flow and turbulence in a cone-and-plate device // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 138. P. 379–404.
3. *Buschmann M.H.* A solution for the flow between a cone a plate at low Reynolds number // *J. Thermal Sci.* 2002. V. 11. № 4. P. 289–295.
4. *Schlichting H.* Grenzschicht-Theorie. Karlsruhe: G. Braun, 1965.
Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
5. *Cebeci T., Bradshaw P.* Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer. N.Y. etc.: Springer, 1984. = *Себиси Т., Брэдишоу П.* Конвективный теплообмен. Физические основы и вычислительные методы. М.: Мир, 1987. 590 с.
6. *Авраменко А.А., Басок Б.И., Соловьев Е.Н.* Симметрии уравнений конвективного теплообмена и гидродинамики. Киев: Наук. думка, 2001. 93 с.
7. *Шевчук И.В.* Моделирование теплоотдачи вращающегося диска: влияние аппроксимации тангенса угла закрутки потока // *Теплофизика высоких температур*. 1998. Т. 36. № 3. С. 522–524.
8. *Шевчук И.В.* Влияние температуры стенки на ламинарный теплообмен вращающегося диска: приближенное аналитическое решение // *Теплофизика высоких температур*. 2001. Т. 39. № 4. С. 682–685.

Киев
E-mail: ivshevch@i.com.ua

Поступила в редакцию
15.IV.2003