

УДК 532.516.5:536.25

© 2004 г. И. А. ЕРМОЛАЕВ, А. И. ЖБАНОВ

**СМЕШАННАЯ КОНВЕКЦИЯ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ КАНАЛЕ
ПРИ ЛОКАЛЬНОМ НАГРЕВЕ СНИЗУ**

Рассмотрена смешанная конвекция на начальном участке горизонтального плоскопараллельного канала от источника тепла конечных размеров, расположенного на нижней стенке. Расчеты проведены для значения числа Прандтля $Pr = 1$, в диапазоне числа Грасгофа от $4 \cdot 10^3$ до $3.2 \cdot 10^4$ и числа Рейнольдса от 0 до 10. Варьировались также размеры источника тепла и его расположение. Результаты получены на основе численного решения двумерных нестационарных уравнений Навье – Стокса в приближении Буссинеска, записанных в переменных “вихрь скорости–функция тока–температура”. Для решения использован метод конечных элементов Галеркина.

Ключевые слова: смешанная конвекция, горизонтальный плоскопараллельный канал, источник тепла конечных размеров.

Смешанная конвекция в горизонтальных трубах и каналах, в том числе при низких числах Рейнольдса, представляет практический интерес в различных областях техники (компактные теплообменники, солнечные коллекторы, теплообменники, используемые в химической промышленности и др.). К настоящему времени выполнено значительное количество экспериментальных и теоретических исследований по этой теме, включая случаи полностью развитых течений [1–8] и конвекции на начальном участке [9–13]. Рассматривался как симметричный [1, 4, 6, 7], так и асимметричный [3, 5, 8–13] нагрев, постоянный вдоль оси канала. Однако во многих технических приложениях нагрев имеет место лишь на узком участке канала. Такая ситуация может возникать, в частности, в системах принудительного охлаждения электронного оборудования, в некоторых геофизических задачах, при пересечении каналов, где более горячий расположен снизу, и др.

Конвекцию при локальном нагреве в отсутствие внешнего течения численно исследовали в [14–16] и в присутствии внешнего течения для вертикального канала в [17]. В настоящей работе рассматривается смешанная конвекция при локальном нагреве снизу на начальном участке горизонтального канала.

1. Постановка задачи и метод решения. При малых числах Рейнольдса ($Re < 10$) и достаточно сильной естественной конвекции при нагреве снизу вторичные течения в горизонтальных каналах могут иметь вид валов, перпендикулярных потоку [5], что позволяет использовать для расчета таких течений двумерные модели.

Проведено исследование смешанной конвекции вязкой несжимаемой жидкости в горизонтальном канале шириной H с плоскопараллельными стенками на начальном участке длиной L . Для описания течения введена декартова система координат: начало координат совпадает с началом канала, ось x направлена параллельно, ось y – перпендикулярно каналу. На нижней стенке задан источник тепла длиной b по оси x , характеризующийся постоянной плотностью теплового потока (граничные условия второго рода). Расстояние от входа в канал до нагреваемого участка равно a . На входе температура жидкости равна нулю, равны нулю также температура верхней стенки и температура участков нижней стенки, не занятых источником тепла. До начального

момента времени поле температур однородно, жидкость находится в гидростатическом равновесии в поле силы тяжести, направленной вертикально вниз. В начальный момент времени к нагреваемому участку нижней границы подводится постоянный и равномерный поток тепла, одновременно возникает вынужденное течение в канале.

Для определения полей течения и температур использованы нестационарные двумерные уравнения конвекции в приближении Буссинеска [18]. В качестве масштабов расстояния, времени, скорости и температуры выбраны H , H^2/ν , ν/H , q_0H/λ . Безразмерные переменные равны соответственно $X = x/H$, $Y = y/H$, $\tau = \nu t/H^2$, $U = uH/\nu$, $V = vH/\nu$, $\theta = \lambda\vartheta/q_0H$, где x, y – координаты, t – время, ν – коэффициент кинематической вязкости, u, v – составляющие скорости в проекции на оси x, y соответственно, $\vartheta = T - T_0$, $T_0 = 0$, λ – коэффициент теплопроводности, q_0 – масштаб потока тепла. Таким образом, безразмерные уравнения Буссинеска в переменных “вихрь скорости – функция тока – температура” могут быть записаны как

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi \partial \omega}{\partial Y \partial X} - \frac{\partial \psi \partial \omega}{\partial X \partial Y} = \Delta \omega - Gr_y \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (1.1)$$

$$\Delta \psi = \omega \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi \partial \theta}{\partial Y \partial X} - \frac{\partial \psi \partial \theta}{\partial X \partial Y} = \frac{1}{Pr} \Delta \theta \quad (1.3)$$

Здесь ω, ψ – вихрь скорости, функция тока соответственно, $Gr_y = g_y \beta q_0 H^4 / \lambda \nu^2$, $Pr = \nu / \chi$, g_y – составляющая ускорения силы тяжести в проекции на оси ($g_x = 0$), β – температурный коэффициент объемного расширения, χ – коэффициент температуропроводности.

Безразмерные граничные условия для системы (1.1)–(1.3) имеют вид

$$X = 0: \theta(0, Y, \tau) = 0, \quad \omega(0, Y, \tau) = 0, \quad \frac{\partial \psi(0, Y, \tau)}{\partial X} = 0$$

$$X = L: \frac{\partial \theta(L, Y, \tau)}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial \omega(L, Y, \tau)}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial \psi(L, Y, \tau)}{\partial X} = 0$$

$$Y = H: \theta(X, H, \tau) = 0, \quad \psi(X, H, \tau) = \frac{\partial \psi(X, H, \tau)}{\partial Y} = 0$$

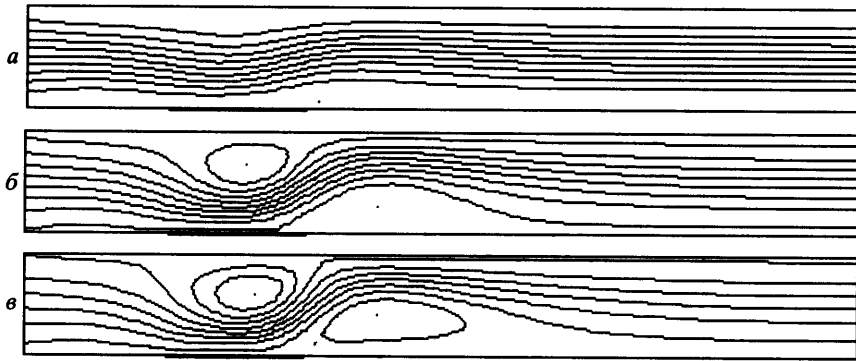
$$Y = 0: \theta(X, 0, \tau) = 0, \quad 0 < X < a \text{ и } a + b < X < L$$

$$\frac{\partial \theta(X, 0, \tau)}{\partial Y} = -1, \quad a < X < a + b$$

$$\psi(X, 0, \tau) = Re, \quad \frac{\partial \psi(X, 0, \tau)}{\partial Y} = 0$$

где $Re = uH/\nu$ – число Рейнольдса. Значения вихря скорости на верхней и нижней стенках канала вычислены по формуле Вудса [19]. В начальный момент времени $\omega(X, Y, 0) = \psi(X, Y, 0) = \theta(X, Y, 0) = 0$.

Задачу (1.1)–(1.3) с соответствующими граничными и начальными условиями решали методом конечных элементов Галеркина (слабая формулировка) [20, 21]. Температуру, вихрь скорости и функцию тока аппроксимировали линейной комбинацией не зависящих от времени базисных функций (функций формы) на линейных треугольных конечных элементах. Ортогонализация невязки, полученной в результате конеч-



Фиг. 1. Функции тока при значениях числа Грасгофа: $G_r = 4 \cdot 10^3$ (а), $16 \cdot 10^3$ (б), $28 \cdot 10^3$ (в); $Re = 5$, $a = b = H$; линией на нижней стенке отмечен нагреваемый участок

но-элементной аппроксимации, относительно базисных функций приводит к системе узловых уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [C] \{ \Phi \} + [K] \{ \Phi \} + \{ F \} = 0$$

где $[C]$, $[K]$ – матрицы демпфирования и жесткости, $\{ F \}$, $\{ \Phi \}$ – векторы нагрузки и узловых неизвестных. Матрицы $[C]$ и $[K]$, а также вектор $\{ F \}$ формируются суммированием по всем конечным элементам [21]. При решении системы алгебраических уравнений применялся метод Гаусса для ленточных матриц. Для временной аппроксимации использовалась неявная двухслойная схема.

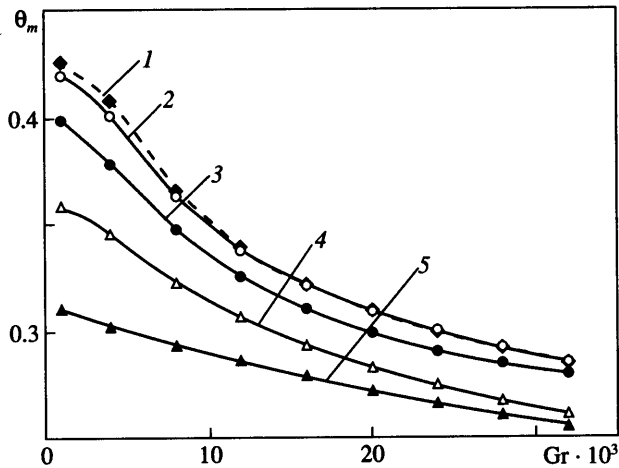
Уравнения (1.1)–(1.3) решались последовательно, каждый временной шаг начинался с вычисления поля температуры (1.3), затем определялись граничные условия для вихря скорости, и решалось уравнение (1.1), далее поле вихря скорости корректировалось с помощью внутреннего итерационного цикла и определялось поле функции тока (1.2). Алгоритм реализован в виде конечно-элементной программы [22]. Стационарные решения получены методом установления, т.е. путем решения нестационарной задачи (1.1)–(1.3). Критерием установления являлось неравенство

$$|\theta_m^{k+1} - \theta_m^k| + |\omega_m^{k+1} - \omega_m^k| + |\psi_m^{k+1} - \psi_m^k| < \epsilon_{ps}$$

Здесь θ_m , ω_m , ψ_m – экстремальные значения температуры, вихря скорости и функции тока. Индекс k – номер шага по времени, значение ϵ_{ps} варьировалось в интервале 10^{-5} – 10^{-6} . Расчеты проводились на неравномерной сетке с наибольшим разбиением 30×30 вблизи источника тепла, шаг по времени 10^{-3} .

Исследования проведены для значения числа Прандтля $Pr = 1$. Длина области $L = 6H$ выбрана из предварительных расчетов. Относительное изменение экстремальных значений функции тока и температуры при дальнейшем увеличении области от $6H$ до $7H$ составило около 1% для ψ_m и менее 1% для θ_m (при $G_r = 10^4$ и $Re = 5$).

2. Обсуждение результатов. Образующееся в результате влияния выталкивающих сил вторичное течение деформирует изотермический профиль скорости основного потока, приводя, в частности, к увеличению коэффициента трения на нагреваемом участке канала. Линии тока формирующегося течения показаны на фиг. 1, где также отмечен нагреваемый участок стенки канала.



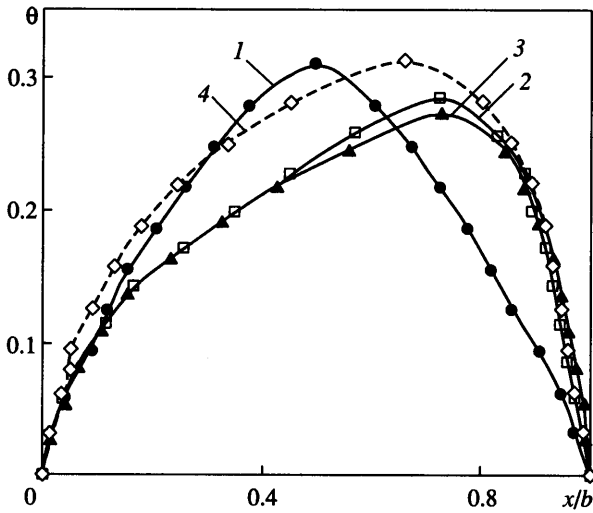
Фиг. 2. Изменения максимума температуры θ_m в зависимости от чисел Gr и Re, $a = b = H$: 1-5 — Re = 0, 1, 2.5, 5, 10

С увеличением числа Грасгофа вторичное течение приобретает вид двух несимметричных вихрей. Интенсивность вихря, вращающегося против часовой стрелки, заметно выше. При этом вихри смещены относительно источника тепла вниз по потоку.

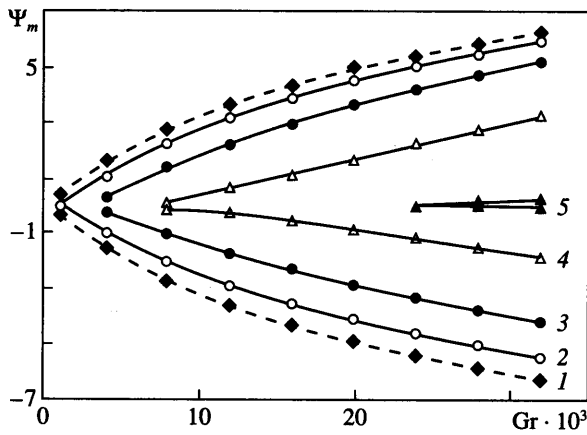
Заданные тепловые граничные условия локализуют температурное поле в относительно небольшой области течения вблизи нагреваемого участка стенки. Максимум температуры расположен на нижней стенке канала в пределах $a < X < a + b$. На фиг. 2 показаны изменения максимума температуры θ_m с увеличением числа Грасгофа для различных значений числа Рейнольдса. Кривая 1 соответствует случаю только естественной конвекции ($Re = 0$). Можно отметить, что θ_m при $Re = 1$ мало отличается от случая $Re = 0$. С увеличением числа Рейнольдса зависимость $\theta_m(Gr)$ становится близкой к линейной. Увеличение же числа Грасгофа приводит к сближению значений максимума температуры при различных Re.

На фиг. 3 представлены распределения температуры по нижней стенке канала в пределах нагреваемого участка ($a < X < a + b$) для различных чисел Рейнольдса при $Gr = 2 \cdot 10^4$. На фигуре отмечены также предельные случаи для $Re = 0$ и $Gr = 0$. Распределение температуры в отсутствие внешнего потока ($Re = 0$) симметрично, максимум температуры находится на нижней стенке канала в центре нагреваемого участка. При увеличении числа Рейнольдса максимум температуры смещается в направлении потока, его величина уменьшается. При этом распределения температуры уже при $Re = 5$ и 10 мало отличаются друг от друга. Это объясняется, с одной стороны, влиянием фиксированной температуры остальных участков стенки, с другой — малой скоростью внешнего потока вблизи твердой непроницаемой границы.

В предельном случае только вынужденной конвекции (фиг. 3, $Gr = 0$, кривая 4) максимум температуры смещен вниз по потоку, температура вблизи левой границы нагреваемого участка несколько больше в сравнении со случаем $Re = 0$, температура вблизи правой границы нагреваемого участка практически совпадает со случаями $Re = 5$ и 10. Сравнение распределений температуры при $Re = 10$, $Gr = 0$ и $2 \cdot 10^4$ (фиг. 3) показывает, что влияние вторичного течения приводит к существенному уменьшению температуры, а также к ещё большему смещению максимума температуры в направлении внешнего потока.



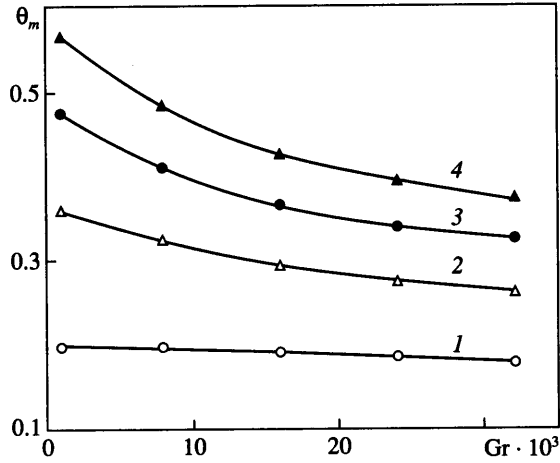
Фиг. 3. Распределения температуры θ по нагреваемому участку канала в зависимости от числа Рейнольдса $Gr = 2 \cdot 10^4$, $a = b = H$: 1–4 – $Re = 0, 5, 10, 10$ ($Gr = 0$)



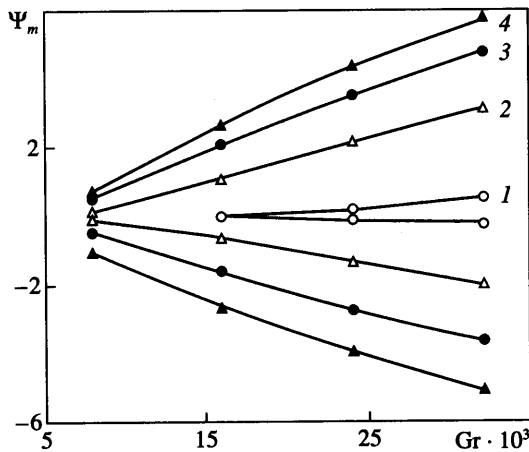
Фиг. 4. Зависимости интенсивности вихрей (экстремумы функции тока) ψ_m от Gr и Re , $a = b = H$: 1–5 – $Re = 0, 1, 2.5, 5, 10$

Верхние кривые $\psi_m(Gr)$ на фиг. 4 соответствуют вихрю, вращающемуся против часовой стрелки, нижние кривые – вихрю, вращающемуся по часовой стрелке; кривая 1 – случай только естественной конвекции ($Re = 0$). Можно отметить значительное уменьшение интенсивности вторичного течения и усиление асимметрии вихрей с ростом Re . При $2.5 < Re < 5$ изменяется наклон кривых, что указывает на изменение характера неустойчивости.

Исследование зависимости характеристик течения от положения нагреваемого участка проведено для значений $a = 0.5H, H, 1.5H, 2H$, $Re = 5$, $b = H$ при $Gr = 10^3, 8 \cdot 10^3, 16 \cdot 10^3, 24 \cdot 10^3, 32 \cdot 10^3$. Результаты расчетов показали чрезвычайно малые изменения параметров течения при варьировании положения нагреваемого участка. Относительные изменения экстремальных величин функции тока и температуры составили менее 1%.



Фиг. 5. Зависимости максимума температуры θ_m от Gr при различных размерах нагреваемого участка, $a = H$, $Re = 5$: 1-4 - $b = 0.5H, H, 1.5H, 2H$



Фиг. 6. Зависимости интенсивности вихрей (экстремумы функции тока) ψ_m от Gr при различных размерах нагреваемого участка, $a = H$, $Re = 5$: 1-4 - $b = 0.5H, H, 1.5H, 2H$

Исследована также зависимость характеристик течения от размеров нагреваемого участка. Результаты представлены на фиг. 5 и 6. На фиг. 5 показаны изменения максимума температуры с ростом Gr для различных значений параметра b . С уменьшением размеров обогреваемого участка зависимость максимума температуры от числа Gr становится чрезвычайно слабой и при $b = 0.5H$ $\theta_m(Gr)$ является почти постоянной величиной, т.е. максимум температуры определяется в основном значением числа Re. С уменьшением b интенсивность конвективных вихрей (фиг. 6), как и ожидалось, падает, при этом растет их асимметрия. При $H < b < 1.5H$ меняется характер наклона кривых.

Заключение. Результаты численного моделирования показывают, что в горизонтальном канале вследствие локального нагрева снизу формируется вторичное течение в виде двух асимметричных вихрей, смещенных вниз по потоку. Отмечено, что совместное влияние вынужденной и естественной конвекции приводит к уменьшению максимума температуры и к его смещению в направлении внешнего течения в сравнении с предельными случаями $Gr = 0$ и $Re = 0$. Показано, что рост числа Рейнольдса, равно как и сокращение размеров обогреваемого участка, приводит к значительному уменьшению интенсивности вторичного течения, усилению асимметрии вихрей и ослаблению влияния выталкивающих сил на величину максимума температуры. Изменения же положения нагреваемого участка мало влияют на параметры течения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mori Y., Futagami K.* Forced convective heat transfer in uniformly heated horizontal tubes (2nd report, theoretical study) // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 1967. V. 10. № 12. P. 1801–1813.
2. *Пошкас П.* Турбулентная смешанная конвенция в каналах при различной ориентации в пространстве // *Инж.-физ. журнал.* 1996. Т. 69. № 6. С. 969–976.
3. *Chiu K.C., Ouazzani J., Rosenberger F.* Mixed convection between horizontal plates. II. Fully developed flow // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 1987. V. 30. № 8. P. 1655–1662.
4. *Чжен Х.С., Уонг Чань-чжи.* Численное решение для случая совместной свободной и вынужденной ламинарной конвекции в горизонтальных каналах прямоугольного сечения // *Тр. Амер. о-ва инж.-механиков. Теплопередача.* 1969. Т. 91. № 1. С. 51–58.
5. *Острач С., Камотани Я.* Интенсификация теплообмена в канале с полностью развитым ламинарным течением путем подогрева снизу // *Тр. Амер. о-ва инж.-механиков. Теплопередача.* 1975. Т. 97. № 2. С. 62–68.
6. *Negendra H.R.* Interaction of free and forced convection in horizontal tubes in transition regime // *J. Fluid Mech.* 1973. V. 57. Pt 2. P. 269–288.
7. *Эль-Хавари М.А.* Воздействие смешанной (свободной и вынужденной) конвекции на устойчивость потока в горизонтальной трубе // *Тр. Амер. о-ва инж.-механиков. Теплопередача.* 1980. Т. 100. № 2. С. 101–109.
8. *Ло Х.С., Маслия Дж.Х., Нандакумар К.* Влияние неравномерного нагрева на ламинарную смешанную конвекцию в каналах // *Тр. Амер. о-ва инж.-механиков. Теплопередача.* 1987. № 1. С. 115–122.
9. *Chiu K.C., Rosenberger F.* Mixed convection between horizontal plates. I. Entrance effects // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 1987. V. 30. № 8. P. 1645–1654.
10. *Maughan J.R., Incropera F.P.* Regions of heat transfer enhancement for laminar mixed convection in a parallel plate channel // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 1990. V. 33. № 3. P. 555–570.
11. *Галиев И.М., Зубков П.Т.* Влияние инверсии плотности воды на плоскопараллельное течение и теплоперенос в канале постоянной ширины // *Изв. РАН. МЖГ.* 2000. № 1. С. 72–78.
12. *Инкропера Ф.П., Нокс А.Л., Моэн Дж. Р.* Течение и теплообмен на начальном участке горизонтального канала прямоугольного сечения // *Тр. Амер. о-ва инж.-механиков. Теплопередача.* 1988. № 1. С. 126–133.
13. *Nicolas X., Mojtabi A.* Two-dimensional analysis of the Poiseuille-Benard flow in rectangular channel heated from below // *Phys. Fluids.* 1997. V. 9. № 2. P.337–348.
14. *Чжу Х.Х., Черчилл С.У., Паттерсон С.В.С.* Влияние размера и положения нагревателя, отношения сторон поперечного сечения и граничных условий на двумерную ламинарную свободную конвекцию в каналах прямоугольного сечения // *Тр. Амер. о-ва инж.-механиков. Теплопередача.* 1976. Т. 98. № 2. С. 49–57.
15. *Боуем Р.Ф., Камиаб Д.* Установившаяся ламинарная свободная конвекция около горизонтальной поверхности с дискретным нагревом // *Тр. Амер. о-ва инж.-механиков. Теплопередача.* 1977. Т. 99. № 2. С. 149–155.
16. *Chadwick M.L., Webb B.W., Heaton H. S.* Natural convection from two-dimensional discrete heat sources in a rectangular enclosure // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 1991. V. 34. № 7. P.1679–1693.
17. *Elpidorou D., Prasad V., Modi V.* Convection in vertical channel with a finite wall heat source // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 1991. V. 34. № 2. P. 573–578.

18. Гершуни Г. Э., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука. 1972. 392 с.
19. Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 225 с.
20. Полежаев В.И., Бунэ А.В., Верезуб Н.А. и др. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье–Стокса. М.: Наука, 1987. 271 с.
21. Сегерлинд Л. Дж. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.
22. Ермолаев И.А., Жбанов А.И., Кошелев В.С. Решение двумерной нестационарной задачи тепло- и массопереноса методом конечных элементов // Вопросы прикладной физики. Саратов: Изд-во СГУ, 2002. Вып. 8. С. 60.

Саратов

Поступила в редакцию
14.III.2003