МЕХАНИКА

ЖИДКОСТИ И ГАЗА

№ 6 • 2003

УДК 532.59: 532.529.5

 В. А. БАРИНОВ, Н. Н. БУТАКОВА

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ПО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ДВУХФАЗНОЙ СМЕСИ

Рассмотрена задача о распространении волн по свободной поверхности слоя двухфазной среды. В линейном приближении найдено аналитическое решение в виде затухающих установившихся волн. Определено дисперсионное соотношение, выражение для декремента затухания, а также форма свободной поверхности. Установлено, какое влияние на скорость волны оказывает дисперсная фаза.

Ключевые слова: двухфазные среды, волны, дисперсионное соотношение, затухание.

Исследования волн на свободной поверхности многофазных сред почти не представлены в научной литературе, хотя такие исследования представляют как теоретический, так и практический интерес. В работе [1] указывается на существенное влияние взвешенных примесей на распространение прибрежных волн. Определение зависимости основных характеристик поверхностной волны от концентрации частиц и межфазного взаимодействия – цель данной работы. В работе [2] в линейном приближении исследованы стоячие волны на поверхности раздела смесь – жидкость, численно проанализирована устойчивость этой поверхности.

Настоящая работа посвящена постановке в рамках многоскоростной модели задачи о распространении гравитационных волн по свободной поверхности слоя двухфазной жидкой смеси и ее аналитическому решению.

1. Математическая модель. Рассмотрим слой двухфазной жидкой смеси постоянной глубины, находящийся на твердом горизонтальном основании. Сверху слой ограничен свободной поверхностью. Для того чтобы изучить влияние дисперсной фазы на волновое движение смеси, предположим, что несущая фаза – идеальная несжимаемая жидкость, вязкость которой может проявляться только на межфазной поверхности. Дисперсная фаза – недеформируемые частицы одного размера. Из-за несжимаемости несущей и недеформируемости дисперсной фазы межфазной силой Бассе можно пренебречь [3]. Теплообмен и массообмен через свободную поверхность и между фазами отсутствует. Движение такой двухфазной среды описывается двухскоростными уравнениями сохранения массы и импульсов [3]

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\rho_i}{\partial t} + \nabla(\rho_i\mathbf{v}_i) = 0 \\
\rho_i\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\nabla P_i + (-1)^i\alpha_1\alpha_2\left(R(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2) + \frac{\rho_1^\circ}{2}\left(\frac{d\mathbf{v}_1}{dt}-\frac{d\mathbf{v}_2}{dt}\right)\right) + \rho_i\mathbf{g} \qquad (1.1) \\
\alpha_1+\alpha_2 = 1, \quad \rho_i = \alpha_i\rho_i^\circ, \quad \rho_i^\circ = \text{const}, \quad i = 1, 2
\end{gathered}
$$

Здесь индексы i = 1, 2 относятся соответственно к величинам, характеризующим несущую и дисперсную фазу; α_i, $\mathbf{v}_i$, P_i, ρ_i, ρ_i° – соответственно объемная концентрация, скорость, давление, приведенная и истинная плотность i-й фазы, g – ускорение силы тяжести. Коэффициент $R = \kappa\eta/a^2$ характеризует межфазное трение, где η – динамическая вязкость жидкости, a – характерный размер частицы, κ – эмпирический коэффициент межфазного трения (в случае сферических частиц радиуса a $\kappa = 9/2$).

На свободной поверхности должны выполняться условия отсутствия потока массы смеси через поверхность и непрерывности потока импульса. Для волновых задач эти условия известны как кинематическое и динамическое соответственно [4]. Кинематическое условие заключается в равенстве

$$\alpha_1 v_{1n} + \alpha_2 v_{2n} = V_n \tag{1.2}$$

где $\alpha_1 v_{1n} + \alpha_2 v_{2n}$ – нормальная проекция объемной скорости смеси, V_n – нормальная скорость свободной поверхности. Отметим, что кинематическое условие необходимо ставить именно на объемную скорость среды, как это сделано в [2]. Если это условие ставить на нормальные проекции скорости каждой фазы отдельно, то получим два кинематических условия для скоростей фаз, которые будут согласовываться только в случае моножидкости ($\rho_1^\circ = \rho_2^\circ$). Если кинематическое условие сформулировать для среднемассовой скорости смеси $(\rho_1\mathbf{v}_1 + \rho_2\mathbf{v}_2)/(\rho_1 + \rho_2)$, то из решения волновой задачи [5] получим, что смесь будет совершать незатухающие волновые движения с частотой гравитационной волны как моножидкость.

Динамическое условие записывается как равенство давления в смеси $P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$ и постоянного давления P_a в среде пренебрежимо малой плотности, с которой граничит дисперсная жидкость (в частности, P_a – атмосферное давление), т.е. $P = P_a$, $P_a = \text{const}$.

Полагая, что поток массы смеси через горизонтальную поверхность твердого основания отсутствует, и смесь "проскальзывает" вдоль нее, на дне можно положить выполненным условие непротекания для каждой фазы [3]

$$v_{\text{in}} = 0, \quad (i = 1, 2)$$

В давлении каждой фазы выделим гидростатическую составляющую. Введем декартову систему координат так, чтобы невозмущенная свободная поверхность совпадала с плоскостью $z = 0$, поверхность дна с плоскостью $z = -l$ (l – толщина слоя смеси), ось z противоположна направлению вектора $\mathbf{g}$. Пренебрегая гравитационным осаждением (всплыванием) частиц, будем считать дисперсную фазу равномерно распределенной по слою покоящейся смеси, т.е. $\alpha_2 = \alpha_0 = \text{const}$. Тогда из уравнений движения (1.1) при $\mathbf{v}_i = 0$ ($i = 1, 2$) и динамического условия $P = P_a$ при $z = 0$ получаем гидростатические давления в каждой фазе и смеси

$$P_{i0} = P_a - \rho_i^\circ g z, \quad (i = 1, 2); \quad P_0 = (1 - \alpha_0)P_{10} + \alpha_0 P_{20} = P_a - \rho^\circ g z \tag{1.3}$$

где $\rho^\circ = (1 - \alpha_0)\rho_1^\circ + \alpha_0\rho_2^\circ$ – плотность покоящейся смеси.

2. Краевая задача о волновом движении смеси. Рассмотрим плоское волновое движение жидкости. Пусть в положительном направлении оси x распространяется волна с фазовой скоростью c и волновым числом $k = 2\pi/\lambda$ (λ – длина волны), причем $\lambda \gg a$. Чтобы система уравнений (1.1) описывала волновое движение дисперсной жидкости, необходимо ввести волновые возмущения концентрации и давления. Концентрации фаз можно представить в виде

$$\alpha_1 = 1 - \alpha_0 - \alpha'(t, x, z), \quad \alpha_2 = \alpha_0 + \alpha'(t, x, z) \tag{2.1}$$

Здесь α' – возмущение концентрации дисперсной фазы за счет волнового движения. Для описания волнового возмущения давления используем модель Рахматулина совместного деформирования фаз [6], т.е. возмущения давления в обеих фазах будем считать одинаковыми. Тогда давление можно определить по формулам

$$P_i = P_{i0} + p', \quad (i = 1, 2); \quad P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 = P_0 + p' + (\rho_1^0 - \rho_2^0) g \alpha' z \tag{2.2}$$

Зададим возмущенную свободную поверхность как функцию $z = \xi(t, x)$, которая подлежит определению при решении задачи. Введем безразмерные переменные и величины

$$t^* = kct; \quad x^* = kx, \quad z^* = kz, \quad \varsigma^* = k\xi, \quad h = kl$$
$$\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{c}, \quad p = \frac{p'}{\rho^\circ c^2}, \quad r = \frac{R}{\rho^\circ ck}, \quad \mu_i = \frac{\rho_i^\circ}{\rho^\circ}, \quad \gamma = \frac{\alpha'}{\alpha_0} \tag{2.3}$$

где $ck = \omega$ – частота волны. В дальнейшем обозначение звездочкой безразмерных переменных будем опускать. Подставляя величины (2.3) и обезразмеренные выражения (1.3), (2.1), (2.2) в уравнения и граничные условия, получим следующую краевую задачу

$$-\frac{\partial\gamma}{\partial t} + \left(\frac{1}{\alpha_0} - 1 - \gamma\right)\left[\frac{\partial u_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial u_{1z}}{\partial z}\right] - u_{1x}\frac{\partial\gamma}{\partial x} - u_{1z}\frac{\partial\gamma}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} + (1+\gamma)\left[\frac{\partial u_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial u_{2z}}{\partial z}\right] + u_{2x}\frac{\partial\gamma}{\partial x} + u_{2z}\frac{\partial\gamma}{\partial z} = 0$$
$$\mu_1\frac{d\mathbf{u}_1}{dt} + \nabla p - \alpha_0(1+\gamma)\left(\frac{\mu_1}{2}\left(\frac{d\mathbf{u}_2}{dt} - \frac{d\mathbf{u}_1}{dt}\right) + r(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)\right) = 0 \tag{2.4}$$
$$\mu_2\frac{d\mathbf{u}_2}{dt} + \nabla p + \alpha_0\left(\frac{1}{\alpha_0} - 1 - \gamma\right)\left(\frac{\mu_1}{2}\left(\frac{d\mathbf{u}_2}{dt} - \frac{d\mathbf{u}_1}{dt}\right) + r(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)\right) = 0$$

На свободной поверхности при $z = \zeta(t, x)$ и на дне при $z = -h$ заданы граничные условия

$$z = \zeta(t,x):\quad \frac{\partial\varsigma}{\partial t} = \alpha_0\left(\frac{1}{\alpha_0} - 1 - \gamma\right)u_{1z} + \alpha_0(1+\gamma)u_{2z} -$$
$$-\alpha_0\left[\left(\frac{1}{\alpha_0} - 1 - \gamma\right)u_{1x} + (1+\gamma)u_{2x}\right]\frac{\partial\varsigma}{\partial x} \tag{2.5}$$

$$p - \nu^2\zeta[1 - \alpha_0\gamma(\mu_1 - \mu_2)] = 0, \quad \nu^2 = g/kc^2 \tag{2.6}$$

$$z = -h:\ u_{iz} = 0, \quad i = 1, 2 \tag{2.7}$$

Положим, что амплитуда поверхности волны мала по сравнению с ее длиной. Тогда граничные условия со свободной поверхности $z = \zeta(t, x)$ можно свести к условиям на фиксированной поверхности $z = 0$.

Из обезразмеривания (2.3) следует, что скорости волнового движения фаз и волновые возмущения одного порядка с величиной ζ, т.е. малы.

Учитывая малость входящих в систему (2.4)–(2.6) неизвестных величин, оставим в уравнениях (2.4) и в разложенных в окрестности $z = 0$ граничных условиях (2.5), (2.6) только линейные по отношению к ним слагаемые

$$-\alpha_0\frac{\partial\gamma}{\partial t} + (1-\alpha_0)\left(\frac{\partial u_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial u_{1z}}{\partial z}\right) = 0$$
$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} + \frac{\partial u_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial u_{2z}}{\partial z} = 0$$
$$\mu_1\frac{\partial u_{1x}}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} - \alpha_0\left(\frac{\mu_1}{2}\left(\frac{\partial u_{2x}}{\partial t} - \frac{\partial u_{1x}}{\partial t}\right) + r(u_{2x} - u_{1x})\right) = 0 \tag{2.8}$$
$$\mu_1\frac{\partial u_{1z}}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} - \alpha_0\left(\frac{\mu_1}{2}\left(\frac{\partial u_{2z}}{\partial t} - \frac{\partial u_{1z}}{\partial t}\right) + r(u_{2z} - u_{1z})\right) = 0$$

$$\mu_2\frac{\partial u_{2x}}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x}+(1-\alpha_0)\left(\frac{\mu_1}{2}\left(\frac{\partial u_{2x}}{\partial t}-\frac{\partial u_{1x}}{\partial t}\right)+r(u_{2x}-u_{1x})\right) = 0$$

$$\mu_2\frac{\partial u_{2z}}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial z}+(1-\alpha_0)\left(\frac{\mu_1}{2}\left(\frac{\partial u_{2z}}{\partial t}-\frac{\partial u_{1z}}{\partial t}\right)+r(u_{2z}-u_{1z})\right) = 0$$

$z=0$:

$$\frac{\partial\varsigma}{\partial t} = (1-\alpha_0)u_{1z}+\alpha_0 u_{2z}, \quad p-\nu^2\zeta = 0 \tag{2.9}$$

Условия при $z=-h$ останутся прежними, т.е. в виде (2.7).

В случае распространения по свободной поверхности слоя прогрессивных волн решение системы уравнений (2.8) следует искать в виде

$$\begin{aligned}
u_{ix} &= \frac{\operatorname{ch}(z+h)}{\operatorname{sh}h}e^{-bt}(A_i\sin(x-t)+B_i\cos(x-t))\\
u_{iz} &= \frac{\operatorname{sh}(z+h)}{\operatorname{sh}h}e^{-bt}(C_i\sin(x-t)+D_i\cos(x-t))\\
p &= \frac{\operatorname{ch}(z+h)}{\operatorname{sh}h}e^{-bt}(K\sin(x-t)+L\cos(x-t))\\
\gamma &= \frac{\operatorname{ch}(z+h)}{\operatorname{sh}h}e^{-bt}(M\sin(x-t)+N\cos(x-t))
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Здесь $b=\beta/\omega$ – безразмерный декремент затухания волны (β – размерный декремент), коэффициенты A_i, B_i, C_i, D_i, K, L, M, N – постоянные, подлежащие определению. Подставляя выражения (2.10) в уравнения (2.8), получим систему двенадцати линейных однородных уравнений ранга десяти для определения неизвестных коэффициентов. Полагая постоянные K и L свободными, найдем остальные неизвестные как решение системы

$$D_i = -A_i, \quad B_i = C_i, \quad M = 0, \quad N = 0$$

$$A_i = m_iK+n_iL, \quad B_i = -n_iK+m_iL$$

$$\begin{aligned}
m_1 &= \frac{1}{1+b^2}+\frac{m}{d}(1-\mu_1)\mu_2, \quad m_2 = \frac{1}{1+b^2}+\frac{m}{d}(1-\mu_2)\mu_1\\
n_1 &= -\frac{b}{1+b^2}+\frac{n}{d}(1-\mu_1)\mu_2, \quad n_2 = -\frac{b}{1+b^2}+\frac{n}{d}(1-\mu_2)\mu_1
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$m = 2(1+2\mu_2)\mu_1, \quad n = 2(2r-b\mu_1(1+2\mu_2))$$

$$d = \mu_1^2(1+2\mu_2)^2+(2r-b\mu_1(1+2\mu_2))^2$$

Из выражений (2.10), (2.11) следует, что возмущение концентрации дисперсной фазы в линейном приближении равно нулю. Оно является величиной более высокого порядка малости по сравнению с возмущениями скорости и давления. Так, в работе [2] концентрация полагалась постоянной сразу при постановке задачи.

Для того чтобы определить форму свободной поверхности, необходимо подставить найденные выражения для u_{iz} в уравнение (2.9) и проинтегрировать его. В результате получаем

$$\zeta = \frac{1}{1+b^2}e^{-bt}[(s_1K + s_2L)\sin(x-t) + (-s_2K + s_1L)\cos(x-t)]$$

$$s_1 = \frac{1-b^2}{1+b^2} + 2(2br + (1-b^2)\mu_1(1+2\mu_2))(\sigma - \mu_1\mu_2)/d \tag{2.12}$$

$$s_2 = -\frac{2b}{1+b^2} + 4(r - b\mu_1(1+2\mu_2))(\sigma-\mu_1\mu_2)/d, \quad \sigma = (1-\alpha_0)\mu_2 + \alpha_0\mu_1$$

Свободные коэффициенты K и L, как и для обычных поверхностных волн [4], можно определить из дополнительных начальных данных.

Из полученного решения (2.10)–(2.12) нетрудно найти выражения волновых возмущений и формы свободной поверхности для бездиссипационного движения смеси, т. е. при $r = 0$. В этом случае $b = 0$, а выражения (2.10), (2.12) при $\rho_1^\circ = \rho_2^\circ$ совпадают с классическими [4].

3. Основные параметры волны. Найдем дисперсионное соотношение и уравнение для декремента волны. Для этого, подставляя выражения для возмущения давления и свободной поверхности в динамическое условие (2.9) и приравнивая коэффициенты при $\sin(x-t)$ и $\cos(x-t)$, получим

$$K(1+b^2)\operatorname{cth}h = \nu^2(s_1K + s_2L), \quad L(1+b^2)\operatorname{cth}h = \nu^2(-s_2K + s_1L)$$

Из условия существования нетривиального решения этой системы для K и L следует

$$s_1 = \frac{1+b^2}{\nu^2\operatorname{th}h}, \quad s_2 = 0 \tag{3.1}$$

Используя s_1 и s_2 (3.1), запишем выражение для свободной поверхности

$$\zeta = \frac{\operatorname{cth}h}{\nu^2}e^{-bt}[K\sin(x-t) + L\cos(x-t)]$$

Чтобы найти фазовую скорость и декремент затухания, необходимо величины, входящие в уравнения (3.1), записать в размерном виде. При этом уравнения системы принимают громоздкий вид. Чтобы этого избежать, введем вспомогательные величины, имеющие размерность скорости

$$r_1 = cr = \frac{R}{\rho^\circ k}, \quad b_1 = cb = \frac{\beta}{k}, \quad \nu_1^2 = c^2\nu^2 = \frac{g}{k}$$

Разрешая полученную систему (3.1) относительно c и b_1, получаем уравнения для определения фазовой скорости и декремента затухания волны

$$c^2 = \frac{(\mu_1 + 2\sigma)}{\mu_1(1+2\mu_2)}\nu_1^2\operatorname{th}h + b_1\left(3b_1 - \frac{4r_1}{\mu_1(1+2\mu_2)}\right) \tag{3.2}$$

$$\begin{gathered}4\mu_1^2(1+2\mu_2)^2b_1^3 - 8\mu_1(1+2\mu_2)r_1b_1^2 + \\ + (4r_1^2 + \mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1+2\sigma)\nu_1^2\operatorname{th}h)b_1 - 2(\sigma-\mu_1\mu_2)r_1\nu_1^2\operatorname{th}h = 0\end{gathered} \tag{3.3}$$

Уравнение (3.2) можно записать в виде

$$c^2 = c_g^2 + c_d^2 + c_r^2, \quad c_g^2 = \nu_1^2 \operatorname{th} h = \frac{g}{k} \operatorname{th} kl$$

$$c_d^2 = \frac{2(\sigma - \mu_1\mu_2)}{\mu_1(1+2\mu_2)} \nu_1^2 \operatorname{th} h = \frac{2\alpha_0(1-\alpha_0)(\rho_1^\circ - \rho_2^\circ)^2 g \operatorname{th} kl}{\rho_1^\circ(\rho^\circ + 2\rho_2^\circ)k}$$

$$c_r^2 = b_1\left(3b_1 - \frac{4r_1}{\mu_1(1+2\mu_2)}\right) = \frac{\beta}{k^2}\left(3\beta - \frac{4R\rho^\circ}{\rho_1^\circ(1+2\rho_2^\circ)}\right)$$

Из (3.2) легко найти дисперсионное соотношение $\omega^2 = c^2k^2$. Величина c_g^2 является квадратом фазовой скорости гравитационной волны [4], $c_d^2 \geq 0$ – добавка к фазовой скорости за счет наличия дисперсной фазы и c_r^2 – добавка, обусловленная силами межфазного взаимодействия. Функция $c_r^2\,(b_1)$ принимает отрицательные значения при $0 < b_1 < 4r_1/3\mu_1(1+2\mu_2)$ и положительные при $b_1 > 4r_1/3\mu_1(1+2\mu_2)$. Величина декремента затухания $b_1 = 4r_1/3\mu_1(1+2\mu_2)$ является критической, так как при этом значении b_1 сила межфазного трения никак не влияет на распространение волны. Свое минимальное значение c_r^2 принимает при

$$b_1 = 2r_1/3\mu_1(1+2\mu_2): \ \min c_r^2 = -4r_1^2/3\mu_1^2(1+2\mu_2)^2$$

Условием существования волн установившегося типа является неотрицательность квадрата фазовой скорости, т.е. $c^2 \geq 0$. Это условие эквивалентно неотрицательности квадратного многочлена для b_1 в правой части равенства (3.2), а следовательно, неположительности дискриминанта этого многочлена. Это условие можно записать как ограничение на длины волн

$$\frac{3gk\operatorname{th} kl}{4R^2\rho^\circ}\rho_1^\circ(\rho_1^\circ + 2\rho_2^\circ - 2\alpha_0(\rho_2^\circ - \rho_1^\circ))(\rho_1^\circ + 2\rho_2^\circ + \alpha_0(\rho_2^\circ - \rho_1^\circ)) \geq 1 \qquad (3.4)$$

Условие (3.4) можно выразить через новые безразмерные величины: $W = (c_g^2 + c_d^2)/c_m^2 \geq 1$, где $c_m^2 = 4r_1^2/3\mu_1^2\,(1+2\,\mu_2)^2$. При $W = 1$ фазовая скорость волны принимает минимальное значение

$$\min c^2 = c_g^2 + c_d^2 - c_m^2 = \frac{(\mu_1 + 2\sigma)}{\mu_1(1+2\mu_2)}\nu_1^2 \operatorname{th} h - \frac{4r_1^2}{3\mu_1^2(1+2\mu_2)^2}$$

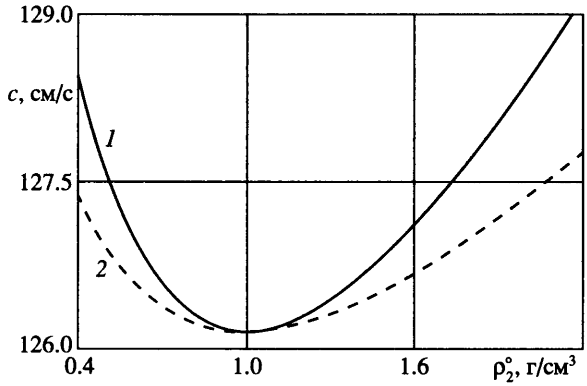
Все коэффициенты уравнения (3.3) удовлетворяют критерию устойчивости Гурвица [7]. Уравнение (3.3) будем решать с помощью формулы Кардано [8]

$$b_1 = \left[-\frac{\chi}{2} + \left(\frac{\chi^2}{4} + \frac{\psi^3}{27}\right)^{1/2}\right]^{1/3} + \left[-\frac{\chi}{2} - \left(\frac{\chi^2}{4} + \frac{\psi^3}{27}\right)^{1/2}\right]^{1/3} + \frac{2r_1}{3\mu_1(1+2\mu_2)}$$

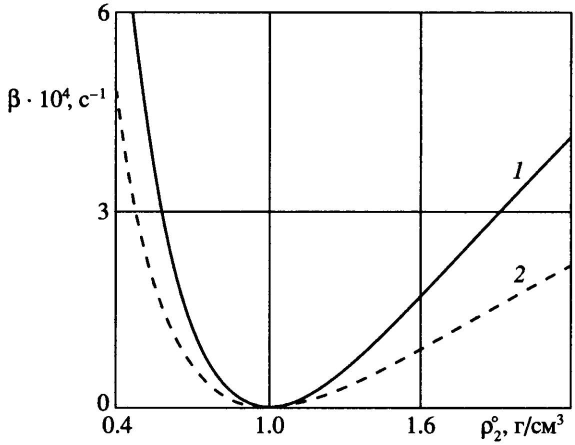
$$\psi = \frac{3\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1+2\sigma)\nu_1^2 \operatorname{th} h - 4r_1^2}{12\mu_1^2(1+2\mu_2)^2} = \frac{1}{4}c_m^2(W-1) = \frac{1}{4}\min c^2 \qquad (3.5)$$

$$\chi = \frac{r_1}{54\mu_1^3(1+2\mu_2)^3}[4r_1^2 + 9\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1 - \sigma + 3\mu_1\mu_2)\nu_1^2 \operatorname{th} h] =$$

$$= \frac{1}{108}(3c_m^2)^{3/2}\left[1 + \frac{3}{2}\left(\frac{3c_g^2}{c_m^2} - W\right)\right]$$



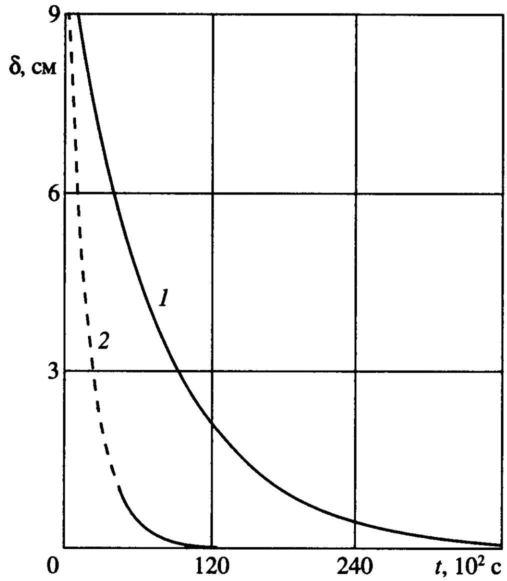
Фиг. 1. Зависимость фазовой скорости волны c от плотности примесей ρ_2° : $\alpha = 0.1$, 0.05 (кривые *1*, *2*)



Фиг. 2. Зависимость декремента затухания β от плотности примесей ρ_2° : $\alpha = 0.1$, 0.05 (кривые *1*, *2*)

Количество вещественных корней зависит от знака величины $Q = \chi^2/4 + \psi^3/27$. В силу (3.4) $Q > 0$ при $W > 1$, а следовательно, формула (3.5) дает один вещественный и два комплексно сопряженных корня. Поэтому решением уравнения в случае $W > 1$ будет только один вещественный корень (3.5). Величина Q может равняться нулю только при одновременном равенстве нулю ψ и χ, что выполняется при $W = 1$ и $c_g^2 = c_m^2/9$ (или $c_d^2 = 8c_m^2/9$). Равенство $Q = 0$ соответствует минимальной фазовой скорости и значению декремента $b_1 = 2r_1/3\mu_1(1 + 2\mu_2)$, причем $c^2 = \min c^2 = 0$.

4. Пример расчетов. Из полученных выражений (3.2), (3.5) следует, что наличие дисперсной фазы в жидкости оказывает двоякое влияние на фазовую скорость. С одной стороны, оно влечет увеличение квадрата фазовой скорости на величину c_d^2. С другой – при $1 < 3\rho_1^\circ(1 + 2\rho_2^\circ)\beta/2R\rho^\circ < 2$ – ее уменьшение за счет добавки c_r^2.



Фиг. 3. Зависимость амплитуды волны δ от времени t для $\alpha = 0.1$ и $\rho_2^\circ = 1.5$ г/см^3, $\rho_2^\circ = 0.5$ г/см^3 (кривые *1, 2*)

Ниже приведены расчеты полученных параметров волнового движения в слое смеси толщиной $l = 1000$ см, вызванного распространением по свободной поверхности волны длиной $\lambda = 100$ см. Предполагалось, что несущая фаза имеет плотность и динамическую вязкость соответственно: $\rho_1^\circ = 1$ г/см^3 и $\eta = 1.004 \cdot 10^{-2}$ г/(см · с). Дисперсная фаза – недеформируемые шарики радиуса $a = 1$ см. Тогда $R = 9\eta/(2a^2) = 45 \cdot 10^{-3}$ г/(см^3 · с).

На фиг. 1 представлена зависимость фазовой скорости от плотности примесей для двух значений концентрации 0.1 и 0.05. При таких же концентрациях была рассчитана зависимость декремента затухания от плотности дисперсной фазы. Из фиг. 2 видно, что затухание волны происходит быстрее, если примесь менее плотная, чем несущая среда.

Исходя из полученного выражения для формы свободной поверхности, можно рассчитать время затухания волны заданной начальной амплитуды. При $K = L$ амплитуда волны определяется формулой

$$\delta = \max\xi(t, x) - \min\xi(t, x) = \frac{2\sqrt{2}\,\mathrm{cth}\,kl}{\nu^2} K e^{-\beta t}$$

Используя это выражение и (3.5), нетрудно проверить, что для примеси с плотностью $\rho_2^\circ < \rho_1^\circ$ время затухания волны в несколько раз меньше, чем в случае $\rho_2^\circ > \rho_1^\circ$. На фиг. 3 показано затухание волны с начальной амплитудой, равной 10 см.

Заключение. На основе двухскоростной модели поставлена задача о распространении волн по свободной поверхности двухфазной среды. Получено аналитическое решение линейной задачи, из которого следует: 1) волновые возмущения концентрации дисперсной фазы являются величиной более низкого порядка по сравнению с остальными волновыми возмущениями; 2) наличие дисперсной фазы, с одной стороны, приводит к увеличению значения фазовой скорости по сравнению со скоростью гравитационной волны в чистой жидкости, а с другой – к ее уменьшению за счет сил межфазного трения; 3) учет силы присоединенных масс приводит к уменьшению декремента затухания волны и фазовой скорости волны по сравнению со значениями, полученными без учета этой силы; 4) волны на свободной поверхности смеси с более легкой дисперсной фазой по сравнению с несущей жидкостью гаснут быстрее, чем на поверхности смеси с более тяжелыми частицами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Louaked M., Saidi A.* Pointwise control and particle analysis for parabolic equation// Proc. 7th Intern. Symp. Comput. Fluid Dynamics., Beijing, 1997. P. 228–234.
2. *Лобов Н.И., Любимов Д.В., Любимова Т.П.* Поведение двухслойной системы жидкость – взвесь в вибрационном поле // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 6. С. 55–62.
3. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
4. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
5. *Баринов В.А., Бутакова Н.Н.* Поверхностные волны на слое дисперсной жидкости // Математическое и информационное моделирование. Тюмень: Изд-во Тюмен. ун-та, 2000. С. 57–63.
6. *Рахматулин Х.А.* Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // ПММ. 1956. Т. 20. № 2. С. 184–195.
7. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теорий функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
8. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971. 432 с.

Тюмень
E-mail: vbarinov@utmn.ru

Поступила в редакцию
10.VII.2001