

УДК 532.532+532.59

© 2003 г. В. И. БУКРЕЕВ, А. В. ГУСЕВ, В. В. ОСТАПЕНКО

РАСПАД РАЗРЫВА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ НАД УСТУПОМ ДНА КАНАЛА

Приведены результаты теоретического анализа задачи в рамках первого приближения теории мелкой воды и экспериментальной проверки теоретических автомодельных решений. Рассмотрены подтопленный и неподтопленный режимы сопряжения бьефов за уступом. Теория получила подтверждение по различным типам волн, скоростям их распространения и характерным глубинам потока. Вместе с тем в эксперименте имели место ондуляции, для описания которых нужно привлекать более точные математические модели.

Ключевые слова: конечная глубина, неровное дно, начальный перепад уровней, гравитационные волны, теория, эксперимент.

В рамках первого приближения теории мелкой воды [1–3] задача о распаде разрыва над ровным дном достаточно хорошо изучена (см., например, [1, 4, 5]). В частном случае первоначально покоящейся жидкости ее называют задачей о разрушении плотины [4]. В последнее время выполнены расчетно-теоретические исследования [6–8], в которых учитывалось резкое изменение дна канала. Пример численного расчета на основе метода контрольного объема приведен в [6]. Теоретический анализ автомодельных решений в случае уступа – резкого понижения дна вниз по потоку – выполнен в [7], где эти решения предлагается использовать для описания гидродинамических процессов, возникающих при разрушении ворот судоходного шлюза. Задача о распаде разрыва уровней над ступенькой – резким повышением дна канала вниз по потоку – решена в [8].

В данной работе, так же как в [7], рассматривается случай дна с уступом. Приводятся результаты теоретических и экспериментальных исследований. Основное отличие от работы [7] заключается в том, что наряду с неподтопленным режимом сопряжения бьефов за уступом проанализирован и подтопленный режим. По определению [9] режим сопряжения называется неподтопленным, если процессы в нижнем бьефе не влияют на течение в верхнем бьефе. В [7] граница перехода от неподтопленного режима к подтопленному считается заданной. В данной работе она определяется в ходе решения. Еще одно отличие от [7] состоит в том, что в неподтопленном режиме обнаружена неоднозначность решения.

1. Постановка задачи. Уравнения первого приближения теории мелкой воды в случае прямоугольного канала постоянной ширины, без учета влияния трения, имеют вид [1–3]

$$h_t + q_x = 0, \quad q_t + (qu)_x + ghz_x = 0 \quad (1.1)$$

где $h(x, t)$ – глубина потока, $q(x, t)$ – удельный расход (на единицу ширины канала), $u = q/h$ – скорость потока, $z(x, t) = z_*(x) + h(x, t)$ – вертикальная координата уровня свободной поверхности, $z_*(x)$ – вертикальная координата дна (отметка дна), g – ускорение силы

тяжести. Рассмотрим для системы (1.1) задачу о распаде начального разрыва уровней над уступом дна в покоящейся воде

$$z(x, 0) = z_0, \quad x > 0; \quad z(x, 0) = z_1, \quad x < 0; \quad z_1 > z_0, \quad u(x, 0) = 0 \quad (1.2)$$

$$z_*(x) = 0, \quad x > 0; \quad z_*(x) = b, \quad x < 0; \quad b > 0 \quad (1.3)$$

Поскольку уравнения мелкой воды (1.1) представляют собой простейший пример сильно нелинейной гиперболической системы [10], эквивалентной системе уравнений изоэнтропической газовой динамики [11] с показателем адиабаты $\gamma = 2$, то следуя [12], решение задачи (1.1)–(1.3) будем искать в виде комбинации простых волн, стационарного скачка, расположенного в начале координат над уступом дна (1.3), и соединяющих их зон постоянного течения. Течение при $x < 0$ будем называть течением слева от уступа, а при $x > 0$ – течением справа от уступа. Параметры потока на линии разрыва (1.3) при $x = 0 - 0$ будем называть течением на уступе, а при $x = 0 + 0$ – течением за уступом.

Из условий (1.2) следует, что по начальному уровню z_0 будет распространяться ударная s -волна [11], которую в теории мелкой воды называют гидравлическим бором [1] или прерывной волной [13] (будем использовать термин “прерывная волна”). Параметры течения на фронте прерывной волны удовлетворяют условиям Гюгонио

$$D[h] = [q], \quad D[q] = [qu + gh^2/2] \quad (1.4)$$

получаемым из законов сохранения массы и полного импульса (1.1), где D – скорость распространения прерывной волны, квадратные скобки – символ скачка на фронте волны. По начальному уровню z_1 будет распространяться центрированная r -волна разрежения [11], которую в теории мелкой воды называют волной понижения [1]. В r -волне понижения постояннен s -инвариант системы (1.1), т.е.

$$s = u + 2\sqrt{gh} = \text{const} \quad (1.5)$$

Из условий Гюгонио (1.4) следует, что параметры постоянного течения за фронтом прерывной s -волны лежат на ударной s -адиабате

$$u = u_s(h, h_0) = \sqrt{\frac{g(h+h_0)}{2hh_0}}(h-h_0), \quad h > h_0 = z_0 \quad (1.6)$$

являющейся монотонно возрастающей функцией от h . Из условия (1.5) следует, что параметры течения за центрированной r -волной понижения лежат на волновой r -адиабате

$$u = u_r(h, h_1) = 2\sqrt{g(\sqrt{h_1} - \sqrt{h})}, \quad h < h_1 = z_1 - b \quad (1.7)$$

являющейся монотонно убывающей функцией от h .

Автомодельные решения задачи (1.1)–(1.3) будем строить при фиксированной начальной глубине $h_1 = z_1 - b > 0$ и переменной начальной глубине $h_0 = z_0$, изменяющейся в диапазоне от 0 до z_1 . Эти решения могут быть двух различных типов: те, в которых на разрыв (1.3) приходят две характеристики системы (1.1), и те, в которых на разрыв (1.3) приходят три характеристики системы (1.1). В первом случае, в соответствии с общим критерием эволюционности разрывов [14], для замыкания модели мелкой воды на уступе дна наряду с непрерывностью расхода $[q] = 0$ необходимо задать еще одно скалярное условие. Следуя [8], в качестве такого условия возьмем энергетическое соотношение

$$J(H, q) = J(h, q) + (1 - \sigma)b, \quad J(y, q) = \frac{q^2}{2gy^2} + y, \quad q = hu = HU \quad (1.8)$$

где (h, u) и (H, U) – параметры потока соответственно на уступе и за уступом, $\sigma \in [0, 1]$ – параметр, отвечающий за потерю энергии на уступе. При $\sigma = 0$ полная энергия потока на уступе сохраняется, при $\sigma = 1$ дополнительная потенциальная энергия, получаемая за счет параметра b , полностью теряется.

Во втором случае, когда на разрыв (1.3) приходят три характеристики, непрерывности расхода $[q] = 0$ достаточно для замыкания условий на таком разрыве; причем из этих условий однозначно определяется та часть полной энергии потока, которая теряется при переходе через уступ.

Решения задачи (1.1)–(1.3) можно разбить на два класса: в первом течение за уступом дна является докритическим ($u < c$), во втором – сверхкритическим ($u > c$), где $c = \sqrt{gh}$ – скорость распространения малых возмущений в неподвижной воде. Решения с критическим потоком ($u = c$) за уступом неустойчивы. В первом классе течений возможны решения двух типов в зависимости от того, две или три характеристики приходят на уступ дна. Во втором классе течений на уступ дна могут приходиться только две характеристики.

2. Решения с докритическим потоком за уступом дна. Рассмотрим сначала решения, в которых течение на уступе, так же как и за уступом, является докритическим. В этом случае на уступе дна необходимо задавать энергетическое соотношение (1.8), в котором параметр потерь σ выберем пропорциональным расходу q по формуле

$$\sigma = \frac{\sigma_m}{q_*} q, \quad q_* = \frac{8}{27} \sqrt{gh_1^3}, \quad \sigma_m \in [0, 1] \quad (2.1)$$

где q_* – верхняя грань множества расходов в такого типа течениях. Значение q_* достигается в точке P_2 на фиг. 1, в которой волновая r -адиабата (1.7) пересекает линию критических течений $u = \sqrt{gh}$.

В рамках эволюционно устойчивых разрывных решений [14] та часть волновой адиабаты (1.7), которая лежит в области докритических течений при $h > 4h_1/9$ (линия h_1RP_2 на фиг. 1), переводится условием (1.8) в монотонно убывающую функцию $U(H)$, также целиком лежащую в области докритических течений (линия z_1PP_4 на фиг. 1) [8]. Параметрическое задание функции $U(H)$ имеет вид

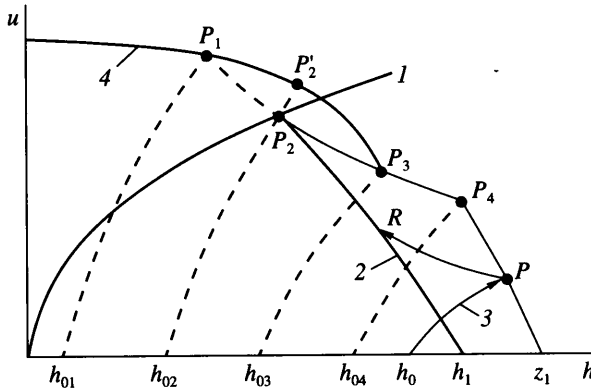
$$H(h) = F(h, u_r(h, h_1)), \quad U(h) = \frac{hu_r(h, h_1)}{H(h)}, \quad h \in \left(\frac{4h_1}{9}, h_1\right) \\ F(h, u) = a_1(h, u) \left(2 \cos\left(\frac{1}{3} \arccos a_2(h, u)\right) + 1 \right) \quad (2.2)$$

$$a_1(h, u) = \frac{1}{3} \left(\frac{u^2}{2g} + h + \frac{q_* - \sigma_m hu}{q_*} b \right), \quad a_2(h, u) = 1 - \frac{u^2 h^2}{4(ga_1)^3}$$

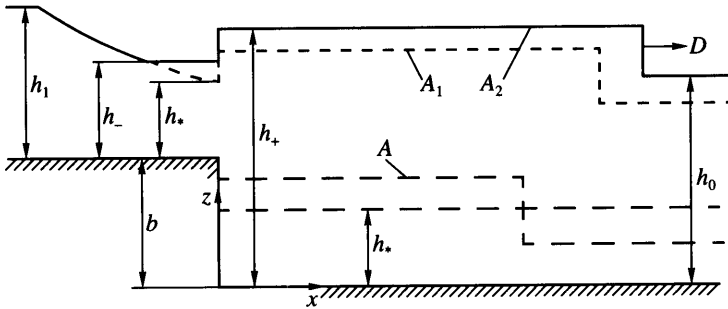
где $u_r(h, h_1)$ – волновая r -адиабата (1.7).

Из монотонного возрастания ударной s -адиабаты (1.6) и монотонного убывания функции $U(H)$ следует однозначная разрешимость задачи (1.1)–(1.3), (1.8) при $h_0 \in (h_{04}, z_1)$, где h_{04} – такая точка на оси h , для которой ударная s -адиабата $u_s(h, h_{04})$ проходит через точку P_4 на фиг. 1. Значение h_{04} вычисляется следующим образом. Сначала по формулам

$$h_* = (4/9)h_1, \quad u_* = \sqrt{gh_*} = \left(\frac{2}{3}\right)\sqrt{gh_1} \quad (2.3)$$



Фиг. 1. Схема анализа точных решений обобщенным методом адиабат: 1 – линия критических течений $u = \sqrt{gh}$; 2 – волновая r -адиабата (1.7); 3 – ударная s -адиабата (1.6); 4 – r -адиабата (3.2)



Фиг. 2. Теоретические формы волн в нижнем бьефе при докритическом течении за уступом ($h_+ > h_*$)

определяются координаты точки P_2 , в которой волновая r -адиабата (1.7) пересекает линию критических течений $u = \sqrt{gh}$. Затем по вытекающим из (2.2) формулам $h_4 = H(h_*)$, $u_4 = U(h_*)$ находятся координаты точки P_4 , в которой линия (2.2) пересекается с гиперболой $u = q_*/h$, показанной на фиг. 1 линией $P_1P_2P_3P_4$. После этого значение h_{04} вычисляется по формуле $h_{04} = G(h_4, u_4)$, в которой

$$G(h, u) = \frac{h}{3} \left(2p \cos \left(\frac{1}{3} \left(2\pi - \arccos \frac{9a^2 - 8}{p^3} \right) \right) + 1 \right)$$

$$p = \sqrt{6a^2 + 4}, \quad a = u/\sqrt{gh}$$

В решении, получаемом при условии $h_0 \in (h_{04}, z_1)$, образуются две области постоянных докритических течений: (h_-, u_-) – между r -волной понижения и уступом и (h_+, u_+) – между прерывной s -волной и уступом (фиг. 2). Параметры течения (h_+, u_+) представляют собой координаты точки P , в которой ударная s -адиабата (1.6), показанная на фиг. 1 линией h_0P , пересекается с функцией (2.2). После этого параметры течения (h_-, u_-) получаются как координаты точки R пересечения волновой r -адиабаты (1.7) с гиперболой $u = q_+/h$, где $q_+ = h_+u_+$, изображенной на фиг. 1 линией PR .

Эти постоянные течения вычисляются по следующему алгоритму. Сначала в результате решения относительно h уравнения $U(h) = u_s(H(h), h_0)$, в котором $H(h)$ и $U(h)$ – функции (2.2), а $u_s(h, h_0)$ – ударная s -адиабата (1.6), находится глубина h_- слева от уступа; при $h \in (4h_1/9, h_1)$ такая глубина определяется однозначно. Затем по формуле $u_- = u_r(h_-, h_1)$ определяется скорость потока слева от уступа, и по формулам $h_+ = H(h_-)$, $u_+ = U(h_-)$ вычисляются параметры течения справа от уступа. После этого по вытекающей из условий Гюгонио (1.4) формуле

$$D = \sqrt{gh_+(h_+ + h_0)/(2h_0)} \quad (2.4)$$

находится скорость прерывной s -волны. Характерные волны, получаемые в этих решениях, показаны сплошной линией A_2 на фиг. 2.

При $h_0 \in (h_{02}, h_{04}]$, где h_{02} – такая точка на оси h , для которой ударная s -адиабата $u_s(h, h_{02})$ проходит через точку P_2 на фиг. 1, течение на уступе становится критическим и решения с докритическим потоком за уступом первого типа непрерывно переходят в решения второго типа. При этом постоянное течение слева от уступа перестает существовать, поскольку r -волна понижения продолжается непосредственно до разрыва (1.3), формируя на уступе критическое течение (h_*, u_*) . В этом случае параметры постоянного потока (h_+, u_+) справа от уступа однозначно находятся как координаты точки пересечения ударной s -адиабаты (1.6) с той частью гиперболы $u = q_*/h$, которая на фиг. 1 расположена между точками P_2 и P_4 .

Сначала путем решения относительно h уравнения $hu_s(h, h_0) = q_*$ вычисляется глубина h_+ , а затем по формуле $u_+ = u_s(h_+, h_0)$ определяется скорость потока u_+ и по формуле (2.4) находится скорость D распространения прерывной s -волны. При уменьшении начальной глубины h_0 от h_{04} до h_{02} глубина h_+ за уступом монотонно убывает, достигая при $h_0 = h_{02}$ критического значения h_* (при $h_+ = h_*$ решение становится неустойчивым относительно малого изменения начальной глубины h_0). Характерные профили волн, получаемые в этих решениях, показаны на фиг. 2 пунктирными линиями A и A_1 .

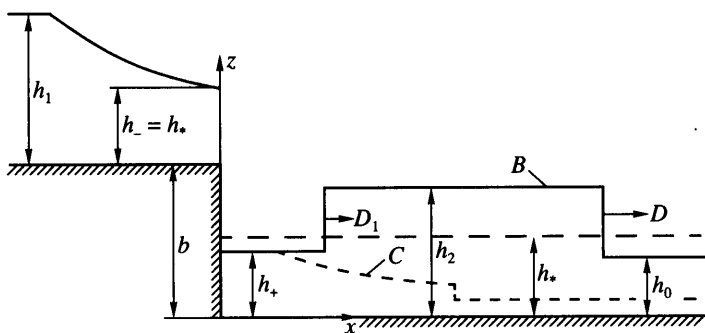
3. Решения со сверхкритическим потоком за уступом дна. Если поток за уступом дна сверхкритический, то справа на разрыв (1.3) не приходит ни одной характеристики системы (1.1), поэтому для эволюционности таких течений необходимо, чтобы слева на разрыв (1.3) приходили две характеристики системы (1.1). При решении задачи (1.1)–(1.3) это возможно только в том случае, когда правая граница r -волны понижения, распространяющейся по начальному уровню z_1 , находится на уступе, формируя на нем критическое течение $(h_-, u_-) = (h_*, u_*)$. С учетом этого параметры сверхкритического потока $(h_+, u_+) = (h_+^*, u_+^*)$ за уступом однозначно определяются из энергетического соотношения (1.8) по формулам $u_+^* = \Psi(h_*, q_*)$, $h_+^* = q_*/u_+^*$, в которых

$$\Psi(h, q) = 2r \cos\left(\frac{1}{3} \arccos \frac{-gq}{r^3}\right), \quad r = \sqrt{g\left(h + \frac{2}{3}(1 - \sigma_m)b\right)} \quad (3.1)$$

На фиг. 1 потоку (h_+^*, u_+^*) соответствует точка P_1 гиперболы $u = q_*/h$, лежащая в области сверхкритических течений.

При сверхкритическом потоке за уступом построение течения справа от уступа сводится к решению для системы (1.1) классической задачи о распаде разрыва над горизонтальным дном со следующими начальными данными

$$h(x, 0) = \begin{cases} h_0, & x > 0 \\ h_+^*, & x < 0 \end{cases}, \quad u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ u_+^*, & x < 0 \end{cases}$$



Фиг. 3. Теоретические формы волн при сверхкритическом течении за уступом ($h_+ < h_*$)

Для этого необходимо найти точку пересечения монотонно возрастающей ударной s -адиабаты (1.6) и монотонно убывающей r -адиабаты

$$u = u_r^1(h, h_+^*, u_+^*) = u_+^* + \alpha(h, h_+^*) \tag{3.2}$$

$$\alpha(h, h_+^*) = -u_s(h, h_+^*), \quad h \geq h_+^*; \quad \alpha(h, h_+^*) = u_r(h, h_+^*), \quad h \leq h_+^*$$

На фиг. 1 адиабата (3.2) показана линией, проходящей через точки P_1, P_2', P_3 .

Предположим, что $h_0 \in (0, h_{01})$, где $h_{01} = G(h_+^*, u_+^*)$ – такая точка на оси h , для которой ударная s -адиабата $u_s(h, h_{01})$ проходит через точку P_1 . Тогда s -адиабата (1.6) пересекает r -адиабату (3.2) в ее волновой части (левее точки P_1 на фиг. 1), и справа от уступа формируется течение с r -волной понижения и прерывной s -волной (пунктирная линия C на фиг. 3).

Параметры постоянного течения (h_2, u_2) между этими волнами определяются следующим образом. Сначала путем решения относительно h уравнения

$$u_s(h, h_0) - u_r(h, h_+^*) = u_+^*$$

определяется глубина h_2 , а затем по формулам

$$u_2 = u_s(h_2, h_0), \quad D = \sqrt{gh_2(h_2 + h_0)/(2h_0)} \tag{3.3}$$

вычисляются скорость потока u_2 и скорость D распространения прерывной s -волны.

Предположим теперь, что $h_0 \in (h_{01}, h_{03})$, где h_{03} – такая точка на оси h , для которой ударная s -адиабата $u_s(h, h_{03})$ проходит через точку P_3 пересечения ударной части r -адиабаты (3.2) (линия $P_1 P_2' P_3$ на фиг. 1) с той частью гиперболы $u = q_*/h$, которая на фиг. 1 расположена между точками P_2 и P_4 . Тогда s -адиабата (1.6) пересечет r -адиабату (3.2) в ее ударной части (правее точки P_1 на фиг. 1), справа от уступа сформируется течение с двумя прерывными волнами (линия B на фиг. 3).

Скорости распространения этих волн и параметры постоянного течения (h_2, u_2) между ними определяются так. Сначала в результате решения относительно h уравнения

$$u_s(h, h_0) - u_s(h, h_+^*) = u_+^*$$

определяется глубина h_2 , а затем по формулам (3.3) находятся скорость потока u_2 и скорость D распространения прерывной s -волны. После этого по формуле

$$D_1 = u_+^* + \sqrt{gh_2(h_2 + h_+^*)/(2h_+^*)} \quad (3.4)$$

вычисляется скорость распространения прерывной r -волны.

В рамках общей задачи (1.1) – (1.3) построенное решение с двумя прерывными волнами справа от уступа имеет смысл только в том случае, когда скорость прерывной r -волны $D_1 > 0$, что эквивалентно условию $h_2 < h_3$, в котором

$$h_3 = \frac{h_+^*}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{8(u_+^*)^2}{gh_+^*}} - 1 \right)$$

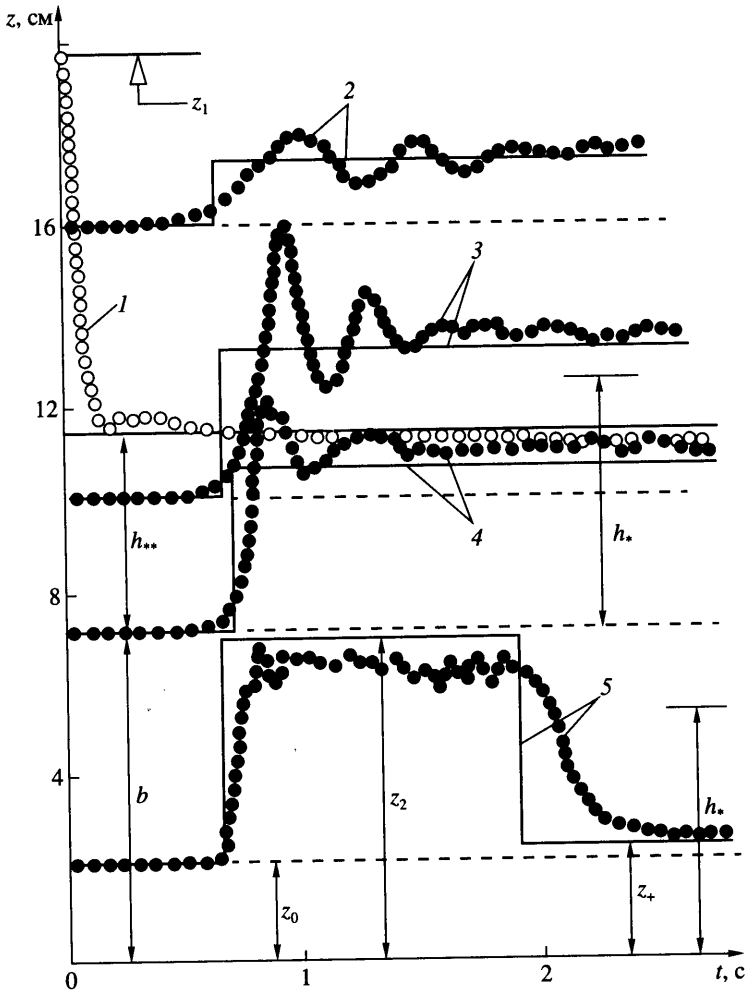
– корень уравнения (3.4) при $D_1 = 0$. При глубине $h_2 = h_3$ прерывная r -волна сливается с разрывом на уступе, формируя вместе с ним единый стоячий скачок, скорость за которым $u_3 = q_*/h_3$. Отсюда следует, что $h_{03} = G(h_3, u_3)$.

На фиг. 1 точка $P_3 = (h_3, u_3)$ лежит на гиперболе $u = q_*/h$ между точками P_2 и P_4 и поэтому $h_{03} \in (h_{02}, h_{04})$. С одной стороны, это означает, что с увеличением начальной глубины h_0 до значений, превышающих h_{03} , течения с двумя прерывными волнами справа от уступа непрерывно переходят в течения с одной прерывной s -волной, у которых поток на уступе критический, а за уступом докритический. С другой стороны, это приводит к неоднозначности решения задачи распада разрыва (1.1)–(1.3) при условии $h_0 \in (h_{02}, h_{03})$. Как видно из диаграммы адиабат (фиг. 1) при каждой начальной глубине h_0 , удовлетворяющей этому условию, наряду с решением первого класса с одной прерывной волной и докритическим потоком за уступом (пунктирная линия A на фиг. 2), которое получается при пересечении ударной s -адиабатой (1.6) гиперболы $u = q_*/h$ на участке P_2P_3 , существует решение второго класса с двумя прерывными волнами и сверхкритическим потоком за уступом (линия B на фиг. 3), которое получается при пересечении s -адиабатой (1.6) ударной части r -адиабаты (3.2) на участке $P_2'P_3$.

4. Экспериментальная проверка. Опыты выполнялись в прямоугольном канале шириной $B = 20.2$ см. Уступ высотой $b = 7.2$ см располагался на расстоянии $l = 1.93$ м от правого закрытого конца канала. Левый открытый конец канала присоединялся к бассейну длиной 3.3 м и шириной 1 м, расположенному на расстоянии $l_1 = 2.27$ м от уступа. Начальный перепад уровней покоящейся жидкости $\Delta z = z_1 - z_0 = h_1 + b - h_0$ (фиг. 2) создавался с помощью плоского щита, расположенного над уступом. Начальные уровни свободной поверхности определялись мерными иглами с абсолютной погрешностью не более 0.05 м.

В момент времени $t_0 = 0$ щит удалялся вручную. Закон его движения регистрировался реохордным датчиком. Время удаления щита не превышало 0.05 с при наименьшем значении времени распространения волны от уступа до закрытого конца канала, равном 1.3 с. Колебания уровня как функции времени t в заданных точках по продольной координате x измерялись волномерами, разрешающая способность которых составляла 0.2 мм. Верхняя граница частоты колебаний, отслеживаемой волномерами с погрешностью не более 10%, составляла 10 Гц. В теории канал имеет бесконечную длину и слева, и справа от уступа. Для сравнения с теорией используются лишь экспериментальные данные на ограниченных интервалах времени, когда влияние граничных условий на концах реального канала еще не проявлялось в рассматриваемой точке по координате x .

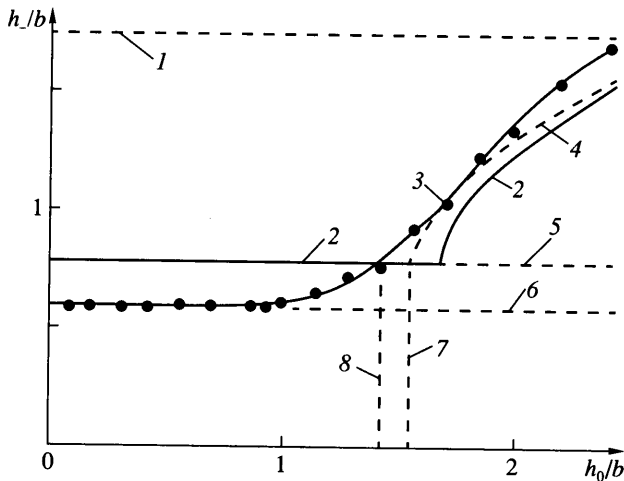
Изменение уровня свободной поверхности как функции времени t при постоянных значениях $h_1 = 12.5$ см и $x = 80$ см и четырех значениях h_0 показано на фиг. 4. Вертикальная координата свободной поверхности z отсчитывается от дна канала в нижнем бьефе. Поскольку значение z приведено как функция от t , фронт прерывной s -волны



Фиг. 4. Сравнение теоретических и экспериментальных форм волн при $b = 7.2$ см, $h_1/b = 1.74$. Экспериментальные данные представлены сплошными точками, результаты расчетов – сплошными линиями: 1 – экспериментальная зависимость $z(t)$; $x/b = 11.1$: 2 – волна типа A_2 ($h_0/b = 2.12$); 3, 4 – волны типа A ($h_0/b = 1.42$ и 1.0); 5 – волна типа B ($h_0/b = 0.31$)

на фиг. 4 расположен слева. На самом деле волны распространялись вправо от уступа (фиг. 2, 3). В расчетах учтены потери энергии. При этом для теоретических зависимостей 2 и 5 на фиг. 4 параметр энергетических потерь σ_m в формулах (2.1), (3.1) брался равным 0.1.

Сравнение выполнено на примерах теоретических решений типа A_2 , существующих в подтопленном режиме, и типов A , A_1 и B , существующих в неподтопленном режиме (фиг. 2, 3). Для решений типа A , A_1 и A_2 характерно наличие одной прерывной волны (s -волны). По теории, такие решения могут существовать лишь при $h_+ > h_*$, где h_* – критическая глубина, вычисляемая по формуле (2.3). Решения типа B могут существовать лишь при $h_+ = h_+^* < h_*$ (разд. 3). Для них характерно наличие двух прерывных



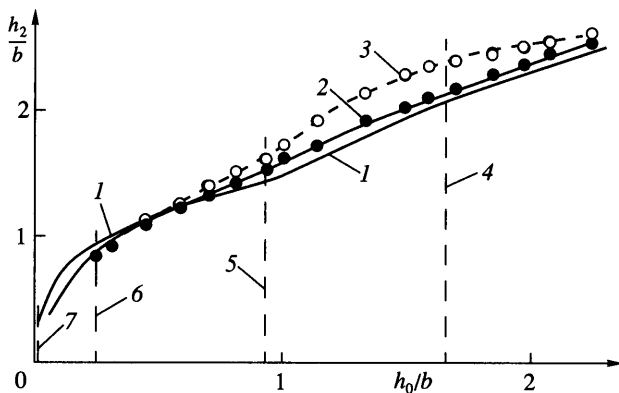
Фиг. 5. Зависимость глубины на уступе от глубины нижнего бьефа: 1 – глубина верхнего бьефа; 2, 4 – теория без учета ($\sigma_m = 0$) и с учетом ($\sigma_m = 0.1$) потерь энергии; 3 – эксперимент; 5 – критическая глубина h_* ; 6 – вторая критическая глубина h_{**} ; 7, 8 – теоретическая и экспериментальная верхние границы неподтопленного режима

волн, распространяющихся вниз по потоку со скоростями D (s -волна) и $D_1 < D$ (r -волна). Данные на фиг. 4 подтверждают этот результат теоретического анализа. При $h_+ < h_*$ теория дает еще одно автомодельное решение типа C с r -волной понижения и с прерывной s -волной в нижнем бьефе (фиг. 3). Однако реализовать соответствующую волну в опытах не удастся, поскольку ей соответствует очень малая начальная глубина нижнего бьефа $h_0 < h_{01} \approx 0.13$ см. В этом диапазоне сильно проявляется влияние вязкости жидкости, шероховатости дна и других малых параметров.

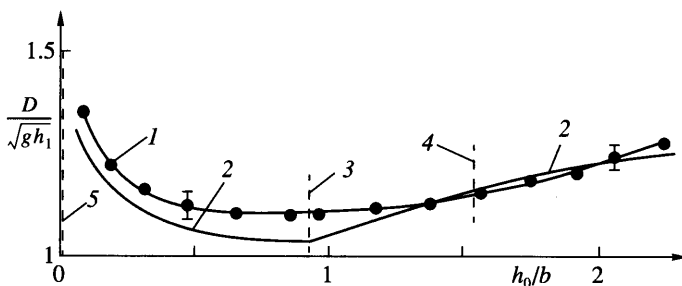
В рамках первого приближения теории мелкой воды гидравлические прыжки имитируются скачками уровня свободной поверхности (прерывными волнами), а в эксперименте наблюдается шесть разновидностей гидравлических прыжков [15]. Основными из них являются прыжок с вальцом в головной части и гладкий ондулярный прыжок [13], в котором переход с одного постоянного уровня на другой происходит в виде постепенно вырождающегося цуга волн (волнового пакета). Другие разновидности прыжка являются переходными между этими двумя формами. Это нашло отражение на фиг. 4. Экспериментальная волна 2 имеет форму гладкого ондулярного прыжка. На экспериментальной волне 3 имело место слабое обрушение переднего фронта ондулярного прыжка. На переднем фронте экспериментальной волны 4 имелся интенсивный валец, но сохранились и ондуляции. И на переднем, и на заднем фронтах экспериментальной волны 5 имелись интенсивные вальцы, а ондуляции отсутствовали.

Проверяемая теория ондуляции не описывает. Тем не менее, фиг. 4 показывает, что существует область параметров задачи, в которой автомодельные решения, полученные в теории, дают ценную информацию о реальных волнах. Они полезны, в частности, при анализе начальной стадии аварийных ситуаций на судоходных шлюзах [7].

В теории на уступе (при $x = 0 - 0$) имеется неподвижный скачок уровня свободной поверхности $\Delta z_1 = z_- - z_+$. В реальных условиях такого скачка нет, и уровень z_+ устанавливается лишь на некотором расстоянии $\Delta x > 0$ справа от уступа. На фиг. 4 точками приведены результаты измерений колебаний уровня на уступе в неподтопленном режиме. По физическому смыслу эти данные уместно сравнить с теоретической зависимостью $z(t)$.



Фиг. 6. Глубина за фронтом прерывной s -волны: 1 – теория; 2, 3 – асимптотическая и максимальная глубины в опытах; 4 – теоретическая верхняя граница неподтопленного режима; 5 – верхняя граница волн типа B и двузначности точного решения; 6 – нижняя граница волн типа A и двузначности точного решения; 7 – верхняя граница волн типа C



Фиг. 7. Скорость распространения фронта прерывной s -волны: 1 – эксперимент; 2 – теория; 3 – верхняя граница волн типа B ; 4 – верхняя граница неподтопленного режима; 5 – верхняя граница волн типа C

В теории z_- мгновенно принимает постоянное значение. В эксперименте характерное время выхода на постоянное значение было порядка 0.2 с (график 1 на фиг. 4). Этим можно объяснить расхождение между теорией и экспериментом по времени, за которое фронт прерывной s -волны добегает до неподвижного волномера. По теории, в неподтопленном режиме $h_- = z_- - b = h_*$. Экспериментальная зависимость 1 на фиг. 4 асимптотически выходит на иное постоянное значение $h_{**} \cong 0.77h_*$. Характерная глубина h_{**} наряду с h_* выступает в качестве критического параметра в ряде задач гидравлики открытых каналов и может быть названа второй критической глубиной. Физический смысл второй критической глубины поясняется в [16].

Из более полной информации о глубине над уступом (фиг. 5), следует, что при $h_0 < b$ экспериментальное значение $h_- = h_{**}$, а не h_* . Теоретическая граница, разделяющая неподтопленный и подтопленный режимы, достаточно хорошо согласуется с экспериментальной, особенно при учете потерь энергии. Расхождение теоретических и экспериментальных значений h_- несильно сказывается на параметрах волн в нижнем бьефе, поскольку немного выше по потоку от уступа в эксперименте также устанавливается глубина h_* .

На фиг. 6 теоретические и экспериментальные данные сравниваются по глубине h_2 за фронтом прерывной s -волны. Экспериментальные точки 2 получены на таком уда-

лении от фронта волны, где ондуляции затухали. Это значение h_2 названо асимптотическим. Точки 3 соответствуют значениям h_2 под первым гребнем экспериментальной волны. Теория достаточно хорошо согласуется с асимптотическими глубинами.

При начальной глубине $h_0 \in (h_{02}, h_{03})$ (на фиг. 6 ей соответствует область между вертикальными штриховыми линиями 5 и 6) теория дает два автомодельных решения. Расчеты показали, что в рассматриваемом примере они незначительно отличаются друг от друга: на толщину линии 1. Тем не менее двузначность теоретического решения проявляется в опытах в том, что именно на ее нижней границе появляются ондуляции.

На фиг. 7 выполнено сравнение теории и эксперимента по скорости распространения фронта прерывной s -волны. По этой характеристике также имеет место удовлетворительное соответствие, особенно для волн типа А. Теория дает для D два решения при $h_0 \in (h_{02}, h_{03})$ и они также незначительно отличаются друг от друга. В опытах скорость распространения, особенно для прыжков с вальцом, измеряется с большей погрешностью, чем глубина. При повторении опытов в одинаковых условиях разброс экспериментальных значений h_1 и h_2 был в пределах размеров экспериментальных точек на фиг. 5 и 6. Разброс значений D показан на фиг. 7 отрезками вертикальных линий.

Заключение. Автомодельные решения, построенные на основе первого приближения теории мелкой воды, получили в данных опытах хорошее подтверждение по возможным типам волн, по скорости их распространения и по асимптотической глубине за фронтом прерывной s -волны. Для описания ондуляций нужно привлекать второе приближение этой теории. Реальную форму фронта гидравлических прыжков с вальцом успешно описывает модель, учитывающая процесс перемешивания при обрушении волн [17].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№№ 01-01-00846, 02-05-64384) и Федеральной целевой программы "Интеграция науки и высшего образования России" (грант № И0931).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стокер Дж. Дж.* Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 618 с.
2. *Овсянников Л.В., Макаренко Н.И., Налимов В.И. и др.* Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985. 318 с.
3. *Ляпидевский В.Ю., Тешуков В.М.* Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 420 с.
4. *Dressler R.F.* Comparison of theories and experiments for the hydraulic dam-break wave // Intern. J. Assoc. Sci. Hydrology. 1954. V. 3. № 38. P. 319–328.
5. *Атавин А.А., Гладышев М.Т., Шугрин С.М.* О разрывных течениях в открытых руслах // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1975. Вып. 22. С. 37–64.
6. *Прокофьев В.А.* Современные численные схемы на базе метода контрольного объема для моделирования бурных потоков и волн прорыва // Гидротехн. стр-во. 2002. № 7. С. 22–29.
7. *Атавин А.А., Васильев О.Ф.* Оценка возможных последствий аварий на судоходном шлюзе, связанных с разрушением затворов его камер // Тез. докл. междунар. симп. "Гидравлические и гидрологические аспекты надежности и безопасности гидротехнических сооружений", Санкт-Петербург, 28 мая – 1 июня 2002 г. СПб: Всерос. науч.-исслед. ин-т гидротехники, 2002. С. 121.
8. *Остапенко В.В.* О разрывных решениях уравнений "мелкой воды" над уступом дна // ПМТФ. 2002. Т. 43. № 6. С. 62–74.
9. *Киселев П.Г.* Справочник по гидравлическим расчетам. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1958. 352 с.
10. *Lax P.D.* Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves. Philadelphia: Soc. for Industr. and Appl. Math., 1972. 48 p.
11. *Рожественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978. 688 с.

12. Дулов В.Г. Распад произвольного разрыва в канале со скачком площади сечения // Вестн. ЛГУ. Сер. математики, механики и астрономии. 1958. № 8. Вып. 2. С. 109–120.
13. Васильев О.Ф., Гладышев М.Т. О расчете прерывных волн в открытых руслах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 6. С. 184–189.
14. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 608 с.
15. Chow Ven Te. Open-Channel Hydraulics. N.Y. etc.: McGraw Hill, 1959. 680 с.
16. Букреев В.И. Обтекание порога бурным потоком в открытом канале // ПМТФ. 2002. Т. 43. № 6. С. 54–61.
17. Букреев В.И., Гусев А.В., Ляпидевский В.Ю. Транскритическое течение над порогом в открытом канале // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 6. С. 55–62.

Новосибирск

Поступила в редакцию
24.XII.2002