

УДК 532.517.2:532.133

© 2003 г. Г. В. РЯБЧУК, А. Г. ЩУКИНА

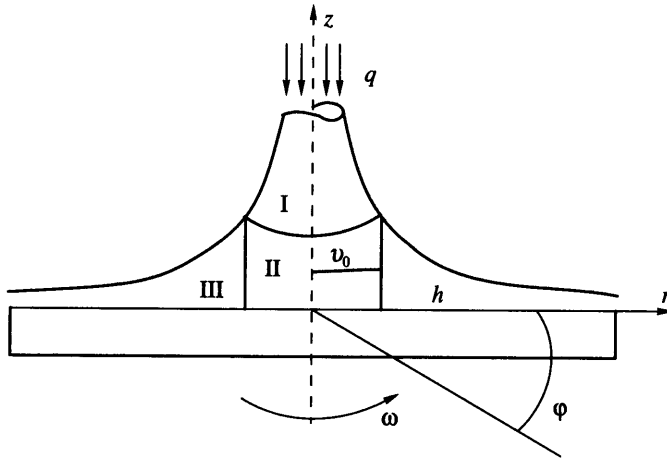
ТЕЧЕНИЕ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПО ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ПЛОСКОГО ДИСКА

Исследован процесс течения нелинейно-вязкой, степенной жидкости по поверхности вращающегося плоского диска. Найден вид решения, позволивший свести систему полных уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта система проинтегрирована методом Рунге–Кутты с использованием процедуры редукции к задаче Коши методом Ньютона. В результате численного решения определены поля скоростей и давления в пленке степенной жидкости, текущей по поверхности вращающегося плоского диска.

Ключевые слова: тонкопленочное течение, нелинейно-вязкая жидкость, центробежное поле.

Впервые автомодельное решение полных уравнений течения Навье–Стокса для случая вращения плоского диска в полубесконечном объеме вязкой жидкости было предложено Карманом [1]. Автомодельное решение полных уравнений движения для случая вращения тела осевой симметрии в полубесконечном объеме степенной жидкости найдено в [2]. Полные уравнения Навье–Стокса для случая тонкопленочного течения вязкой жидкости по поверхности вращающегося плоского диска решены в [3]. Однако оба безразмерных параметра зависели от объемного расхода жидкости, подаваемой на диск, что значительно ограничивало пределы численного моделирования процесса течения. В предлагаемом виде решения этот недостаток исключен, а течение вязкой жидкости по поверхности вращающегося плоского диска является частным случаем рассматриваемого процесса.

1. Постановка задачи. Течение нелинейно-вязкой жидкости по поверхности вращающегося плоского диска рассматривается в цилиндрической системе координат (фиг. 1). Жидкость с постоянным объемным расходом q подается в центр вращающегося с постоянной угловой скоростью ω диска. При соприкосновении с поверхностью диска жидкость замедляется в радиальном направлении и ускоряется в тангенсальном, т.е. вблизи оси вращения диска формируется пространственный пограничный слой. На расстоянии r_0 от оси вращения диска этот слой “прорастает” до поверхности пленки. Таким образом, при подаче жидкости на вращающийся плоский диск существуют три области течения – область потенциального течения 1, область пространственного пограничного слоя 2 и область тонкопленочного течения 3, где вся подаваемая на диск жидкость вовлекается во вращательное движение и становится справедливым интегральное уравнение неразрывности. Рассматривается тонкопленочное течение с компонентами скорости V_r , V_ϕ , V_z . В качестве реологической модели нелинейно-вязкой жидкости выбран степенной закон Оствальда-де-Вилля, удовлетворительно описывающий кривые течения многих жидкотекучих сред в широком диапазоне изменения градиента скорости и позволяющий проводить анализ полных уравнений реодинамики. Предполагается, что течение ламинарное, безволновое, осесимметричное. Силами тяжести поверхностного натяжения и трения пленки жидкости о воздух в силу их малости по сравнению с силами вязкостного трения и инерции пренебрегается.



Фиг. 1. Схема течения жидкости в цилиндрической системе координат: I – область потенциального течения, II – область пространственного пограничного слоя, III – область тонкопленочного течения

Уравнения неразрывности и движения степенной жидкости в выбранной системе координат принимает вид [4]

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho \left(V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\varphi^2}{r} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + kA^{n-1} \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} \right) +$$

$$+ 2k \frac{\partial V_r}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} (A^{n-1}) + k \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial z} (A^{n-1}) \quad (1.2)$$

$$\rho \left(V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} - \frac{V_r V_\varphi}{r} \right) = kA^{n-1} \left(\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r^2} \right) +$$

$$+ k \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} (A^{n-1}) + k \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} (A^{n-1}) \quad (1.3)$$

$$\rho \left(V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + kA^{n-1} \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) +$$

$$+ 2k \frac{\partial V_z}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} (A^{n-1}) + k \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial r} (A^{n-1}) \quad (1.4)$$

$$A = \sqrt{2 \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{V_r}{r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial z} \right)^2}$$

Граничные условия системы уравнений (1.1–1.4) принимают вид

$$z = 0: V_r = 0; \quad V_\varphi = \omega r; \quad V_z = 0$$

$$z = h: \frac{\partial V_r}{\partial z} = \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} = 0; \quad 2kA^{n-1} \frac{\partial V_z}{\partial z} + P = P_0; \quad V_z = V_r \frac{dh}{dr}$$

Неизвестная толщина пленки определяется из интегрального уравнения неразрывности

$$q = 2\pi r \int_0^h V_r dz$$

Решение системы уравнений (1.1)–(1.4) ищем в виде

$$V_r = U_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^\alpha f'(\delta); \quad V_\varphi = U_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^\alpha \Phi(\delta); \quad V_z = U_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^\alpha G(\delta) \tag{1.5}$$

$$\frac{P - P_0}{\rho} = U_0^2 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{2\alpha} F(\delta); \quad U_0 = \left(\frac{\omega^n k}{\rho}\right)^{1/2}; \quad f' = \frac{df}{d\delta}; \quad \delta = \frac{z}{r}, \quad \alpha = \frac{n}{2-n}$$

Подставляя решение (1.5) в систему (1.1) – (1.4), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$Gf'' - \left(\frac{n}{2-n}\right)f'^2 - \delta f' \cdot f'' - \Phi^2 - \left(\frac{2n}{2-n}\right)F - \delta F' =$$

$$= \frac{1}{\text{Re}^{*1/2}} \left\{ A^{*n-1} \left[\frac{4(n-1)}{(2-n)^2} f' + \left(\frac{2+n}{2-n}\right) \delta f'' + (1 + \delta^2) f''' \right] + \right. \tag{1.6}$$

$$\left. + \left[\left(\frac{2n}{2-n}\right) \delta f' + (1 + 2\delta^2) f'' - \delta G' - \left(\frac{n}{2-n}\right) G \right] \frac{d}{d\delta} (A^{*n-1}) \right\}$$

$$G\Phi' + \frac{2(n-1)}{(2-n)} f' \Phi - \delta f' \Phi' = \frac{1}{\text{Re}^{*1/2}} \left\{ A^{*n-1} \left[\frac{4(n-1)}{(2-n)^2} \Phi' + \left(\frac{2+n}{2-n}\right) \delta \Phi'' + (1 + \delta^2) \Phi''' \right] + \right. \tag{1.7}$$

$$\left. + \left[\left(\frac{2n}{2-n}\right) \delta \Phi + (1 + \delta^2) \Phi' \right] \frac{d}{d\delta} (A^{*n-1}) \right\}$$

$$GG' - \left(\frac{n}{2-n}\right) f' G - \delta G' f' + F' = \frac{1}{\text{Re}^{*1/2}} \left\{ A^{*n-1} \left[\left(\frac{n}{2-n}\right)^2 G + \left(\frac{2+n}{2-n}\right) \delta G' + (1 + \delta^2) G'' \right] + \right. \tag{1.8}$$

$$\left. + \left[\left(\frac{n}{2-n}\right) \delta G - \delta f'' + (2 + \delta^2) G' \right] \frac{d}{d\delta} (A^{*n-1}) \right\}$$

$$\left(\frac{2-2n}{2-n}\right) f' - \delta f'' + G' = 0 \tag{1.9}$$

$$A^* = \left\{ \left[2 \left(\frac{n}{2-n}\right) f' + \delta f'' \right]^2 + 2f'^2 + 2G'^2 + \left[\left(\frac{2}{2-n}\right) \Phi + \delta \Phi' \right]^2 + \Phi'^2 + \right. \\ \left. + \left[f'' - \left(\frac{n}{2-n}\right) G - G' \delta \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad \text{Re}^* = \frac{U_0^{2(2-n)} r_0^{2n} \rho^2}{k^2}$$

С учетом вида решения (1.5) интегральное уравнение неразрывности трансформируется к виду

$$f_{(\delta = \delta_k)} = q_0 \text{Re}^* \beta r^{*- \gamma}$$

$$q_0 = \frac{q}{2\pi r_0^2 U_0}, \quad \beta = \frac{4-3n}{2n(2-n)}, \quad \gamma = \frac{4-3n}{2-n}, \quad r^* = r \left(\frac{k\omega^{2-n}}{\rho} \right)^{1/2}$$

Граничные условия с учетом уравнения (1.9) принимают вид

$$\delta = 0: f' = f = G' = G = 0; \quad \varphi = r^{*2/(2-n)} \text{Re}^{*-1/2(2-n)}$$

$$\delta = \delta_k: f'' = \varphi' = 0; \quad F - 2G' \text{Re}^{*-1/2} A^{*n-1} = 0 \quad (1.10)$$

$$f_{(\delta = \delta_k)} - q_0 \text{Re}^* \beta r^{*- \gamma} = 0$$

Воспользуемся методом понижения порядка системы дифференциальных уравнений и заменим исходную систему эквивалентной

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{d\delta} = & (\text{Re}^*)^{1/2} \left[\left(\frac{2-3n}{1-n} \right) F + Gf'' - \left(\frac{n}{2-n} \right) f'^2 - f'' f' \delta - \varphi^2 \right] + \\ & + A^{*n-1} \left[\left(\frac{6-3n}{2-n} \right) \delta f'' + \left(\frac{2}{2-n^2} \right) f' + \delta^2 f''' - \delta G'' - \left(\frac{2}{2-n} \right) G' \right] \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\frac{dS_2}{d\delta} = (\text{Re}^*)^{1/2} \left[G\varphi' - \frac{2(1-n)}{(2-n)} f'\varphi - f'\varphi'\delta \right] + A^{*n-1} \left[\frac{(8-6n)}{(2-n)^2} \varphi + \frac{(4-3n)}{(2-n)} \delta\varphi' \right] \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{dS_3}{d\delta} = & (\text{Re}^*)^{1/2} \left[GG' - \left(\frac{n}{2-n} \right) f'G - f'G'\delta \right] + \\ & + A^{*n-1} \left[\frac{2n(1-n)}{(2-n)^2} G + \frac{(2-2n)}{(2-n)} \delta G' - f'' - \delta f''' + G'' \right] \end{aligned} \quad (1.13)$$

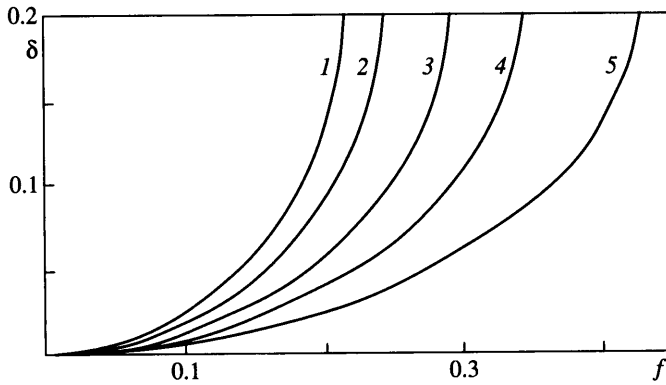
$$S_1 = A^{*n-1} \left[\left(\frac{2n}{2-n} \right) \delta f' + (1-2\delta^2) f'' - \delta G' - \left(\frac{n}{2-n} \right) G \right] + \text{Re}^{*1/2} F \delta$$

$$S_2 = A^{*n-1} \left[\left(\frac{2}{2-n} \right) \delta\varphi + (1+\delta^2)\varphi' \right]$$

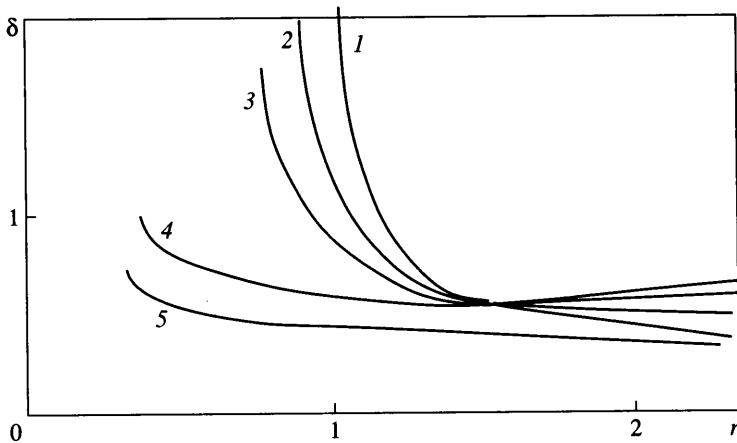
$$S_3 = A^{*n-1} \left[\left(\frac{n}{2-n} \right) \delta G + (2+\delta^2)G' - \delta f'' \right] - \text{Re}^{*1/2} F$$

Для замыкания эквивалентной системы уравнений (1.11) – (1.13) использовалось дифференциальное уравнение (1.9).

Система уравнений (1.9), (1.11) – (1.13) интегрировалась методом Рунге-Кутты четвертого порядка на интервале $(0, \delta_k)$ с параметрами q_0 , Re^* и n . В этой задаче неизвестными начальными условиями являются $f''_{(0)}$, $\varphi_{(0)}$, $\varphi'_{(0)}$, $F_{(0)}$. Обозначим произвольные значения этих величин y_1, y_2, y_3, y_4 и рассмотрим их как независимые переменные. Тогда после интегрирования системы (1.9), (1.11) – (1.13) с этими начальными условиями, полученные значения левых частей уравнений (1.10) являются функциями этих переменных.



Фиг. 2. Распределения безразмерной радиальной скорости f' по толщине пленки δ при $Re = 1$; $q = 0.1$; $n = 0.55, 0.7, 0.85, 1, 1.15$ (кривые 1-5)



Фиг. 3. Распределения толщины пленки δ по длине образующей r при $q = 0.1$; $Re = 1$; при $n = 0.55, 0.7, 0.85, 1, 1.15$ (кривые 1-5)

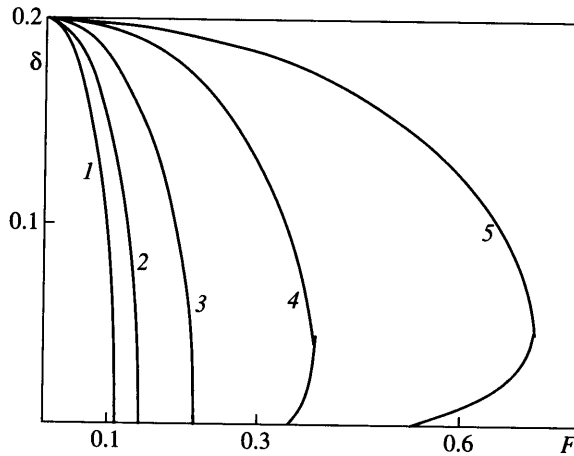
ных. Обозначим эти функции как $\gamma_i(y_1, y_2, y_3, y_4)$ $i = \overline{1, 4}$. Следовательно, поставленная задача сводится к интегрированию системы (1.9), (1.11) – (1.13) с одновременным решением системы уравнений

$$\gamma_i(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0 \tag{1.14}$$

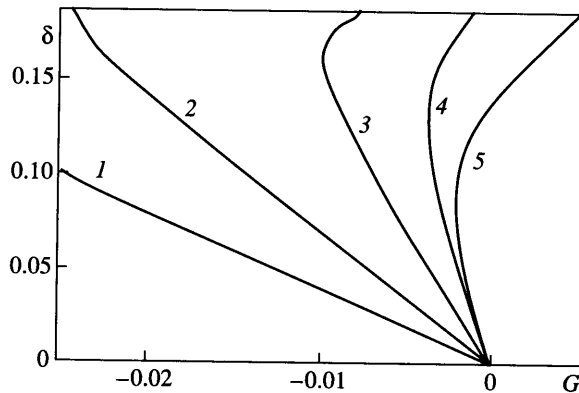
Для решения системы (1.14) использован метод последовательных приближений Ньютона. В этом методе вектор решения $Y^{(k)} = (Y_i^k)$, полученный на “к”-м шаге, уточняется по формуле $Y^{k+1} = Y^k - \Delta Y$, где ΔY – решение системы линейных уравнений

$$Y^{(k)} = DY; \quad D = \left\| \frac{\partial \gamma_i}{\partial y_j} \right\|$$

где $(\partial \gamma_i)/(\partial y_j)$ – частные производные в точке $Y^{(k)}$, ($i = j = 1, \dots, 4$). Решение построено из циклической итерационной процедуры. Если в очередном “к”-м цикле процедуры вы-



Фиг. 4. Распределение безразмерного давления F по толщине пленки δ при $q = 0.11$; $Re = 1$; $n = 0.55, 0.7, 0.85, 1, 1.15$ (кривые 1–5)



Фиг. 5. Распределение безразмерной осевой скорости G по толщине пленки δ при $q = 0.1$; $Re = 1$; $n = 0.55, 0.7, 0.85, 1, 1.15$ (кривые 1–5)

полняется условие $\max[\gamma_i(y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, y_3^{(k)}, y_4^{(k)})] < 10^{-10}$, то расчет считается законченным. В противном случае ($k > 35$) расчет прекращается, что означает – в данной точке области параметров решения не существует.

2. Результаты расчетов. Некоторые результаты численного интегрирования полных уравнений реодинамики показаны на фиг. 2–5. С уменьшением индекса течения n величина безразмерной радиальной скорости на поверхности пленки уменьшается (фиг. 2). Этот факт объясняется эффектом “разжижения” степенной жидкости при сложном сдвиге. С уменьшением n эффективная вязкость жидкости уменьшается, увеличивается область точки смыкания пространственного пограничного слоя с поверхностью пленки, и как следствие, вся подаваемая на вращающийся диск жидкость разгоняется медленнее.

Этот факт наглядно подтверждается изменением толщины пленки жидкости по радиусу при различных n (фиг. 3). При $r = 0.9$, $n = 0.85$ и 1 толщина пленки жидкости (вязкая жидкость) различается в 2 раза. По мере увеличения радиуса r , когда интен-

сивность скоростей деформации максимальна, влияние индекса течения на толщину пленки жидкости не столь заметно.

Из распределения безразмерного давления по толщине пленки при различных значениях n на фиг. 4 видно, что чем больше индекс течения n , тем больше безразмерное давление. Это хорошо коррелирует с распределением безразмерной радиальной скорости по толщине пленки жидкости.

С увеличением индекса течения n максимальное значение безразмерной осевой скорости возрастает (фиг. 5), так как в этом случае идет наиболее быстрое уменьшение толщины пленки. При $n = 0.55$ наблюдается ярко выраженный циркуляционный характер процесса течения нелинейно-вязкой жидкости по поверхности вращающегося диска.

Заключение. Полученные результаты позволили определить основные гидродинамические параметры процесса тонкопленочного течения нелинейно вязкой жидкости по поверхности вращающегося плоского диска. Эти параметры позволяют рассмотреть многие технологические процессы, реализуемые в центробежном поле, такие как нагревание, конденсация, кипение, абсорбция, дегазация и другие.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cochran W.G.* The flow due to a rotating disk// Proc. Gambidge Phil. Soc. 1934.V. 30. Pt 3. P. 365–375.
2. *Mitschka P., Ulbrecht J.* Non-Newtonian fluids V. Frictional resistance of disks and cones rotating in power-law non-Newtonian fluids // Appl. Scient. Res. Ser. A. 1965. V. 15 № 4–5. P. 345–358.
3. *Просвилов А.Э., Рябчук Г.В.* Течение вязкой несжимаемой жидкости по поверхности вращающегося диска // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 6. С. 39–43.
4. *Зиннатуллин Н.Х., Вачагин К.Д., Тябин Н.В.* Двумерное течение неньютоновской жидкости по открытой поверхности быстро вращающегося плоского диска // Инж.-физ.ж. 1968. Т. 15. № 2. С. 234–240.

Волгоград
E-mail: pahp@vstu.ru

Поступила в редакцию
26.XI.2002