МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 2003

УДК 533.72

© 2003 г. Н. В. МАЛАЙ

# К ВОПРОСУ О ТЕРМОФОРЕЗЕ ТВЕРДОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ЖИДКОСТИ

В стоксовском приближении при малых числах Рейнольдса и Пекле проведено теоретическое описание движения нагретой твердой сферической частицы в вязкой жидкости, в которой поддерживается с помощью внешних источников малый постоянный градиент температуры. При решении уравнений гидродинамики использовался экспоненциально-степенной вид зависимости вязкости от температуры. Обсуждается возможность экспериментального наблюдения термофореза в жидкости.

*Ключевые слова*: термофорез, термофорез в жидкости.

Термофоретическое движение возникает во внешнем поле градиента температуры относительно неподвижной вязкой среды. Под действием термофоретической силы и силы вязкого сопротивления среды частица приобретает постоянную скорость называемую термофорезом.

Термофорез встречается в природе, и используется в технике [1, 2]. Рассмотрение термофоретического движения в вязкой неизотермической жидкости достаточно сложная задача. Это связано с тем, что, во-первых, в жидкости движение конкретной частицы определяется как поверхностными явлениями, так и объемными эффектами, возникающими из-за неоднородных распределений гидродинамического и температурного полей; во-вторых, термофорез возникает за счет скольжения жидкости вдоль твердой поверхности. Тепловое скольжение жидкости вдоль твердой поверхности к настоящему времени изучено недостаточно полно. Причина этого в том, что отсутствует строгая математическая теория неоднородных жидкостей.

Достаточно подробно разработана теория термофореза твердых сферических частиц в газе как при малых [3, 4], так и при значительных относительных перепадах температуры [5–8]. В [7] исследуется новая разновидность термофореза в газе – термофорез равномерно нагретой сферической частицы, вызванный действием барнеттовских температурных напряжений (обычное скольжение газа вдоль поверхности сферы в этом случае отсутствует, так как частица равномерно нагрета). Под относительным перепадом температуры понимается разность температур между средней температурой поверхностью частицы $T_s$ и областью вдали от нее $T_\infty$. Относительный перепад температуры считается малым, если $(T_s - T_\infty)/T_\infty \ll 1$ и значительным, если $(T_s - T_\infty)/T_\infty \sim O(1)$. В последнем случае частица считается нагретой и при решении уравнений гидродинамики и тепломассопереноса необходимо учитывать зависимость коэффициентов молекулярного переноса от температуры. Здесь и далее индексы "$e$" и "$i$" будем относить соответственно к вязкой жидкости и частице; индексом "$\infty$" – обозначены параметры жидкости на бесконечности, индексом "$s$" – значения физических величин, взятых при средней температуре поверхности частицы.

При течении газа вблизи твердой поверхности возникает известное явление скольжения, теоретический анализ которого был дан еще Максвеллом. Сила, действующая на твердую частицу, погруженную в газ, в котором поддерживается с помощью внешних источников малый постоянный градиент температуры $\nabla T$, пропорциональна этому градиенту температуры. Касательная составляющая массовой скорости при этом удовлетворяет на поверхности частицы условию скольжения [3, 4]

$$U_\theta = K_{ts}\frac{\nu_e}{RT_e}\frac{\partial T_e}{\partial\theta}$$

Здесь $R$ – радиус частицы, $\nu_e$ – коэффициент кинематической вязкости газа, $T_e$ – температура газа, $K_{ts}$ – коэффициент теплового скольжения, выражение для которого находится методами кинетической теории газа. При коэффициентах аккомодации тангенциального импульса $\alpha_\tau$ и энергии $\alpha_E$, равных единицы, газокинетический коэффициент $K_{ts} = 1.152$ [3, 4].

В случае движения капли жидкости в другой, не смешивающейся с ней вязкой жидкостью, в литературе имеются как теоретические, так и экспериментальные работы, посвященные изучению этого вопроса, например [9, 10]. В частности, для капель ртути, движущихся в воде $K_{ts} = 0.13$ [10]. Впервые задача о скольжении жидкости по поверхности твердой гидрозольной частицы была решена Бассе [9], предположившим, что тангенциальная скорость жидкости относительно твердого тела на его поверхности пропорциональна тангенциальным напряжениям. Постоянную пропорциональности $K_{ts}$, связывающие эти две величины, называют коэффициентом скольжения. Если $K_{ts} \neq 0$, то предполагается, что он зависит только от природы жидкости и твердой поверхности. В случае, если сфера находится в покое, и жидкость обтекает ее, эта гипотеза для осесимметричных течений принимает вид (гипотеза Бассе ) [11]

$$U_\theta = K_{ts}\mu_e\left[\frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial\theta} - \frac{U_\theta}{r}\right]$$

В [12] на основании результатов [13] рассмотрен другой вид термофореза в жидкости, обусловленный флуктуационными поправками к уравнениям гидродинамики. По своей физической природе он аналогичен термофорезу равномерно нагретой твердой сферической частицы в газе [7].

**1. Постановка задачи.** Рассматривается установившееся движение неравномерно нагретой твердой гидрозольной частицы сферической формы радиуса $R$ со скоростью $\mathbf{U}$ в отрицательном направлении оси $Z$ в вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство. На достаточно большом расстоянии от частицы поддерживается с помощью внешних источников малый постоянный градиент температуры $\nabla T (\nabla T \parallel Z)$. Нагрев поверхности сферы происходит за счет неоднородно распределенных в ее объеме внутренних источников тепла плотностью $q_i(r, \theta)$, где $r$ и $\theta$ – сферические координаты $(0 \le \theta \le \pi)$. Действие этих источников может быть обусловлено, например, протеканием объемной химической реакции, процессом радиоактивного распада вещества частицы, поглощением электромагнитного излучения и т.п. Возникающее при этом повышение температуры поверхности частицы оказывает влияние на теплофизические характеристики жидкости и тем самым может существенно повлиять на распределение полей скорости и давления в ее окрестности.

Из всех параметров переноса жидкости только коэффициент вязкости сильно зависит от температуры [14]. Для учета зависимости вязкости от температуры воспользуемся формулой (1.1), которая позволяет описывать изменение вязкости в широком интервале температур с любой необходимой точностью (при $F_n = 0$ эту формулу можно свести к известному соотношению Рейнольдса [14])

$$\mu_e = \mu_\infty\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n\left(\frac{T_e}{T_\infty} - 1\right)^n\right]\exp\left\{-A\left(\frac{T_e}{T_\infty} - 1\right)\right\} \tag{1.1}$$

где $\mu_\infty = \mu_e(T_\infty)$, $F_n = \text{const}$

Таблица 1

| $T$, °C | $\mu_e$, Па · с | $\mu_e^*$, Па · с | $\frac{\lvert\mu_e - \mu_e^*\rvert}{\mu_e^*} \cdot 100\%$ |
|---|---|---|---|
| 30 | 0.600 | 0.600 | 0.00 |
| 40 | 0.328 | 0.330 | 0.61 |
| 50 | 0.182 | 0.180 | 1.11 |
| 60 | 0.103 | 0.102 | 0.60 |
| 70 | 0.059 | 0.059 | 0.00 |
| 80 | 0.034 | 0.035 | 2.25 |
| 90 | 0.020 | 0.021 | 3.86 |

Таблица 2

| $T$, °C | $\mu_e$, Па · с | $\mu_e^*$, Па · с | $\frac{\lvert\mu_e - \mu_e^*\rvert}{\mu_e^*} \cdot 100\%$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.0017525 | 0.0017525 | 0.00 |
| 10 | 0.0013151 | 0.0012992 | 1.22 |
| 20 | 0.0010089 | 0.0010015 | 0.74 |
| 30 | 0.0007943 | 0.0007971 | 0.35 |
| 40 | 0.0006433 | 0.0006513 | 1.22 |
| 50 | 0.0005359 | 0.0005441 | 1.51 |
| 60 | 0.0004581 | 0.0004630 | 1.06 |
| 70 | 0.0004002 | 0.0004005 | 0.07 |
| 80 | 0.0003556 | 0.0003509 | 1.35 |
| 90 | 0.0003199 | 0.0003113 | 2.76 |

Известно, что вязкость жидкости уменьшается с температурой по экспоненциальному закону [14]. Анализ имеющихся полуэмпирических формул показал, что выражение (1.1) позволяет наилучшим образом описать изменение вязкости в широком интервале температур. Без учета коэффициентов $F_n$ относительная погрешность может составить до 40%. Для иллюстрации приведены значения $\mu_e$ и экспериментальные значения $\mu_e^*$ для двух жидкостей – глицерина (табл. 1, $A$ = 17.29, $F_1$ = –1.228, $F_2$ = 7.022, $T_\infty$ = 303 K) и воды (табл. 2, $A$ = 5.779, $F_1$ = –2.318, $F_2$ = 9.118, $T_\infty$ = 273 K). Относительная погрешность не превышает 3%. Коэффициенты $F_n$ рассчитывались с помощью математического пакета Maple V.

При рассмотрении термофоретического движения предполагается, что фазовый переход отсутствует, и учитываются конвективные члены в уравнении теплопроводности, т.е. исследуется движение сферы, при котором несимметрия температурного поля возникает не только за счет внешнего заданного градиента температуры, но и за счет движения самой частицы. Последнее условие необходимо учитывать, поскольку рассматривается термофорез при произвольных перепадах температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее.

Движение частицы описывается в сферической системе координат $r$, $\theta$, $\varphi$ с началом в центре частицы. В рамках сформулированных допущений в сферической системе координат уравнения и граничные условия для скорости $U_e$, давления $P_e$ и температур $T_e$, $T_i$ запишутся в виде [15, 16]

$$\nabla P_e = \mu_e \Delta \mathbf{U}_e + 2(\nabla\mu_e \nabla)\mathbf{U}_e + [\nabla\mu_e \times \mathbf{rot}\mathbf{U}_e], \quad \mathrm{div}\mathbf{U}_e = 0 \tag{1.2}$$

$$\rho_e c_{pe}(\mathbf{U}_e \cdot \nabla)T_e = \lambda_e \Delta T_e \tag{1.3}$$

$$\Delta T_i = -\frac{q_i}{\lambda_i} \tag{1.4}$$

$$\begin{gathered} r = R\colon U_r = -U\cos\theta, \quad U_\theta = U\sin\theta - K_{ts}\frac{\nu_e}{RT_e}\frac{\partial T_e}{\partial\theta} \\ T_e = T_i, \quad \lambda_e\frac{\partial T_e}{\partial r} = \lambda_i\frac{\partial T_i}{\partial r} \end{gathered} \tag{1.5}$$

$$r \to \infty\colon U_e \to 0, \quad P_e \to P_\infty, \quad T_e \to T_\infty + |\nabla T| r\cos\theta \tag{1.6}$$

$$r \to 0\colon T_i \neq \infty \tag{1.7}$$

Определяющие параметры задачи – коэффициенты $\rho_e$, $\mu_\infty$, $\lambda_e$, $c_{pe}$ и сохраняющиеся в процессе движения сферической частицы величины – $R$, $|\nabla T|$, $T_\infty$ и $U$. Из этих параметров можно составить три безразмерные комбинации: $\varepsilon = R|\nabla T|/T_\infty \ll 1$ – параметр, характеризующий перепад температуры на размере частицы, числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_\infty = (\mu_\infty UR)/\rho_e \ll 1$ и Пекле $\mathrm{Pe}_\infty = (c_{pe}UR\rho_e)/\lambda_e \ll 1$.

Обезразмерим уравнения (1.2)–(1.4) и граничные условия (1.5)–(1.7) следующим образом: $V_e = U_e/U$, $t_k = T_k/T_\infty$, $p_e = P_e/P_\infty$, $P_\infty = (\mu_\infty U)/R$, $U \sim \mu_\infty|\nabla T|/(\rho_e T_\infty)$, $k = e, i$.

При $\varepsilon \ll 1$ решение уравнений гидродинамики и теплопереноса ищутся в виде

$$V_e = V_e^{(0)} + \varepsilon V_e^{(1)} + \ldots, \quad p_e = p_e^{(0)} + \varepsilon p_e^{(1)} + \ldots, \quad t = t^{(0)} + \varepsilon t^{(1)} + \ldots \tag{1.8}$$

Вид граничных условий (1.5)–(1.7) указывает на то, что в нулевом приближении для компонент скорости и давления имеем

$$V_r = G(y)\cos\theta, \quad V_\theta = -g(y)\sin\theta, \quad p_e^{(0)} = 1 + h(y)\cos\theta \tag{1.9}$$

где $G(y)$, $h(y)$ и $g(y)$ – произвольные функции, зависящие от обезразмеренной радиальной координаты $y = r/R$.

**2. Распределение температуры в окрестности нагретой частицы во внешнем поле градиента температуры.** При нахождении силы, действующей на нагретую частицу, и скорости ее упорядоченного движения во внешнем заданном поле градиента температуры ограничимся поправками первого порядка малости по $\varepsilon$. Чтобы их найти, нужно знать поля скорости, давления и температур вне и внутри частицы. Найдем распределение температуры в окрестности нагретой частицы. Выражение для $t_e$ в общем случае может быть представлено в виде следующего разложения в ряд по полиномам Лежандра $P_n(\cos\theta)$ [16]

$$t_e(y,\theta) = t_e^{(0)}(y) + t_e^{(U)}(y) + \delta t_e(y,\theta), \quad \delta t_e = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(y)P_n(x), \quad x = \cos\theta \tag{2.1}$$

Появление $\delta t_e \sim \mathrm{Pe}_\infty$ и $t_e^{(U)} \sim \mathrm{Pe}_\infty$ обусловлено движением частицы. Поэтому в рассматриваемом здесь случае движения частицы, когда $\mathrm{Pe}_\infty \ll 1$, выполняются оценки

$$|\delta t_e(y,\theta)| \ll t_e^{(0)}(y), \quad \left|t_e^{(U)}(y)\right| \ll t_e^{(0)}(y) \tag{2.2}$$

Подставляя (1.8) в обезразмеренные уравнения теплопроводности и учитывая (2.1)–(2.2), решаем полученные уравнения методом разделения переменных. Для нулевого приближения ($\varepsilon = 0$) имеем

$$t_e^{(0)}(y) = 1 + \frac{\gamma}{y}$$

$$t_i^{(0)}(y) = B_0 + \frac{1}{4\pi R T_\infty \lambda_i y}\int_V q_i dV + \int_1^y \frac{\psi_0}{y}dy - \frac{1}{y}\int_1^y \psi_0 dy$$

$$\psi_n(y) = -\frac{R^2}{\lambda_i T_\infty}y^2\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^1 q_i P_n(x)dx (n \ge 0), \quad B_0 = 1 + \left(1 - \frac{\lambda_e}{\lambda_i}\right)\gamma$$

Здесь $\gamma = t_s - 1$ – безразмерный параметр, характеризующий нагрев поверхности частицы, $t_s = T_s/T_\infty$, $T_s$ – средняя температура поверхности частицы, определяемая формулой (2.3)

$$\frac{T_s}{T_\infty} = 1 + \frac{1}{4\pi R \lambda_e T_\infty}\int_V q_i dV \tag{2.3}$$

В (2.3) интегрирование ведется по всему объему частицы.

Для первого приближения порядка $\varepsilon$ имеем решения для $t_e^{(1)}$ и $t_i^{(1)}$, удовлетворяющие граничным условиям при $y \to \infty$ и $y \to 0$

$$t_e^{(1)}(y, \theta) = \left\{\frac{\Gamma}{y^2} + y + \omega\sum_{k=1}^{2} A_k\tau_k\right\}\cos\theta$$

$$t_i^{(1)}(y, \theta) = \cos\theta\left[By + \frac{R}{3\lambda_i T_\infty y^2}J + \frac{1}{3}\left\{y\int_1^y \frac{\psi_1}{y^2}dy - \frac{1}{y^2}\int_1^y \psi_1 y dy\right\}\right]$$

$$\tau_1(y) = \frac{1}{y^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta_n^{(1)}}{(n+1)(n+3)(n+4)y^n}, \quad J = \frac{1}{V}\int_V q_i z dV, \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\omega = \mathrm{Pr}_\infty\gamma, \quad z = r\cos\theta, \quad \tau_2(y) = -\frac{1}{y}\left\{-\frac{1}{2} + \frac{\Delta_1^{(2)}}{6y}\ln y - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Delta_n^{(2)}}{(n^2-1)(n+2)y^n} - \right.$$

$$\left. - \frac{\alpha}{y^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+3)(n+4)\ln\frac{1}{y} - (3n^2+16n+19)\right]\frac{\Delta_n^{(1)}}{(n+1)^2(n+3)^2(n+4)^2y^n}\right\}$$

где $J$ – дипольный момент плотности тепловых источников, $\mathrm{Pr}_\infty = \mu_\infty c_{pe}/\lambda_e$ – число Прандтля. Постоянные интегрирования $\Gamma$, $B$ определяются из соответствующих граничных условий на поверхности частицы (равенство температур и потоков тепла), а $A_1$ и $A_2$ – входят в выражения для радиальной и касательной компоненты массовой скорости (3.1).

Заметим, что при выполнении условий (2.2) в коэффициенте динамической вязкости можно пренебречь зависимостью по углу $\theta$ в системе частица – жидкая среда и считать, что $\mu_e(t_e) = \mu_e(t_e^{(0)})$. С учетом этого выражение (1.1) принимает вид

$$\mu_e = \mu_\infty\left(1 + \sum_{n=0}^{\infty}F_n\frac{\gamma^n}{y_n}\right)\exp\left(-A\frac{\gamma}{y}\right) \tag{2.4}$$

Формула (2.4) позволяет рассматривать по отдельности тепловую задачу и гидродинамическую. Сшивка решений происходит с помощью граничных условий на поверхности частицы.

**3. Вывод выражений для термофоретической силы и скорости.** Подставляя (2.4) в уравнения гидродинамики (1.2) с учетом (1.9), разделив переменные, получаем дифференциальное уравнение для функции $G(y)$, решение которого ищем в виде обобщенных степенных рядов (см., например, [5, 6, 17]). В результате получим выражения для компонент массовой скорости и давления, удовлетворяющие краевому условию при $y \to \infty$

$$V_r(y,\theta) = \cos\theta(A_1G_1 + A_2G_2), \quad V_\theta(y,\theta) = -\sin\theta(A_1G_3 + A_2G_4)$$

$$p_e(y,\theta) = 1 + \eta_e\cos\theta(A_1G_5 + A_2G_6), \quad \eta_e = \frac{\mu_e}{\mu_\infty}$$

$$G_1 = -\frac{1}{y^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta_n^{(1)}}{(n+3)y^n}, \quad G_2 = -\frac{1}{y}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta_n^{(2)}}{(n+1)y^n} - \frac{\alpha}{y^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+3)\ln\frac{1}{y} - 1\right]\frac{\Delta_n^{(1)}}{(n+3)^2y^n}$$

$$G_3 = G_1 + \frac{y}{2}G_1^{\mathrm{I}}, \quad G_5 = \frac{y^2}{2}G_1^{\mathrm{III}} + y\left(3 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}s_n\frac{\gamma^n}{y^n}\right)G_1^{\mathrm{II}} + \left(2 + \sum_{n=0}^{\infty}s_n\frac{\gamma^n}{y^n}\right)G_1^{\mathrm{I}}, \tag{3.1}$$

$$G_6 = \frac{y^2}{2}G_2^{\mathrm{III}} + y\left(3 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}s_n\frac{\gamma^n}{y^n}\right)G_2^{\mathrm{II}} + \left(2 + \sum_{n=0}^{\infty}s_n\frac{\gamma^n}{y^n}\right)G_2^{\mathrm{I}},$$

$$G_4 = G_2 + \frac{y}{2}G_2^{\mathrm{I}}, \quad s_n = AF_{n-1} - nF_n - \sum_{k=1}^{n}s_{n-k}F_k$$

$$F_0 = 1, \quad F_n = 0, \quad n < 0$$

В (3.1) $G_k^{\mathrm{I}}$, $G_k^{\mathrm{II}}$ и $G_k^{\mathrm{III}}$ – первая, вторая и третья производные по $y$ от соответствующих функций ($k = 1, 2$). Значения коэффициентов $\Delta_n^{(1)}$ и $\Delta_n^{(2)}$ находятся с помощью рекуррентных соотношений

$$\Delta_n^{(1)} = -\frac{1}{n(n+5)}\sum_{k=1}^{n}[(n+4-k)\{\alpha_k^{(1)}(n+5-k) - \alpha_k^{(2)}\} + \alpha_k^{(3)}]\gamma^k\Delta_{n-k}^{(1)} \quad (n \ge 1)$$

$$\Delta_n^{(2)} = -\frac{1}{(n+3)(n-2)}\left[-6\alpha_n^{(4)}\gamma^n + \sum_{k=1}^{n}\{(n+2-k)[(n+3-k)\alpha_k^{(1)} - \alpha_k^{(2)}] + \alpha_k^{(3)}\}\gamma^k\Delta_{n-k}^{(2)} + \right.$$

$$\left. + \alpha\sum_{k=0}^{n}\{(2n+5-2k)\alpha_k^{(1)} - \alpha_k^{(2)}\}\gamma^k\Delta_{n-k-2}^{(1)}\right] \quad (n \ge 3)$$

При вычислении коэффициентов $\Delta_n^{(1)}$ и $\Delta_n^{(2)}$ по приведенным выше формулам необходимо учитывать, что $\Delta_0^{(1)} = -3$, $\Delta_0^{(2)} = -1$, $\Delta_2^{(2)} = 1$

$$\alpha_0^{(1)} = \alpha_0^{(4)} = 1, \quad \alpha_0^{(3)} = -4, \quad \alpha_n^{(1)} = F_n, \quad \alpha_n^{(2)} = (4-n)F_n + AF_{n-1}, \quad \alpha_0^{(2)} = 4$$

$$\alpha_n^{(4)} = A^n/n!, \quad \alpha_n^{(3)} = 2AF_{n-1} - 2(2+n)F_n, \quad \Delta^{(2)} = -\gamma[6\alpha_1^{(4)} + 2(3\alpha_1^{(1)} - \alpha_1^{(2)}) + \alpha_1^{(3)}]$$

$$\alpha = \frac{\gamma}{15}\{-6\gamma\alpha_2^{(4)} + [3(4\alpha_1^{(1)} - \alpha_1^{(2)}) + \alpha_1^{(3)}]\Delta_1^{(2)} - [2(3\alpha_2^{(1)} - \alpha_2^{(2)}) + \alpha_2^{(3)}]\gamma\}$$

Используя граничные условия на поверхности частицы для компонентов массовой скорости, можно найти постоянные интегрирования $A_1$ и $A_2$, входящие в выражения (3.1). Приведем явный вид коэффициента $A_2$, поскольку, как будет показано ниже, через этот коэффициент выражается общая сила, действующая на твердую сферическую частицу

$$A_2 = -\frac{1}{\Delta}N_2 - \varepsilon K_{ts}\frac{2\nu_e^s G_1}{Rt_s U\Delta}\left[3\frac{\lambda_e^s}{\delta\lambda_i^s} + \frac{RJ}{\delta T_\infty \lambda_i^s} - \frac{\omega\lambda_e^s}{\delta\lambda_i^s}\frac{2\tau_1 + \tau_1^{\mathrm{I}}}{G_1}\right]$$

$$y = 1, \quad \Delta = N_1 + 2K_{ts}\frac{\mu_e^s}{\mu_\infty t_s}\frac{\omega\lambda_e^s}{\delta\lambda_i^s}[G_2(2\tau_1 + \tau_1^{\mathrm{I}}) - G_1(2\tau_2 + \tau_2^{\mathrm{I}})]$$

$$N_2 = -G_1^{\mathrm{I}}, \quad N_1 = G_1G_2^{\mathrm{I}} - G_2G_1^{\mathrm{I}}, \quad \delta = 1 + 2\frac{\lambda_e^s}{\lambda_i^s}$$

где $\tau_1^{\mathrm{I}}$, $\tau_2^{\mathrm{I}}$ – первые производные по $y$.

Сила, действующая на частицу, определяется интегрированием тензора напряжений по ее поверхности [16] и равна

$$F = 4\pi R\mu_\infty U A_2 \exp(-A\gamma)$$

Учитывая явный вид коэффициента $A_2$, получаем общее выражение для силы, действующей на твердую, неравномерно нагретую сферическую частицу на достаточно большом расстоянии, от которой поддерживается с помощью внешних источников малый постоянный градиент температуры. Сила аддитивно складывается из силы вязкого сопротивления $F_\mu$ и $F_{\mathrm{th}}$

$$F = F_\mu + F_{\mathrm{th}}$$

$$F_\mu = -4\pi R\mu_\infty U\frac{N_2}{\Delta}\exp(-A\gamma) \tag{3.2}$$

$$F_{\mathrm{th}} = -4\pi R\mu_\infty K_{ts}\frac{2\nu_e^s G_1}{t_s\Delta\delta}\frac{|\nabla T|}{T_\infty}\left(3\frac{\lambda_e^s}{\lambda_i^s} + \frac{RJ}{T_\infty\lambda_i^s} - \omega\frac{\lambda_e^s}{\lambda_i^s}\frac{2\tau_1 + \tau_1^{\mathrm{I}}}{G_1}\right)\exp(-A\gamma)$$

Приравнивая общую силу $F$ к нулю, получаем общее выражение для скорости упорядоченного движения твердой сферической частицы во внешнем заданном поле градиента температуры

$$U_{\mathrm{th}} = -K_{ts}\frac{2\nu_e^s G_1}{t_s\Delta\delta}\frac{|\nabla T|}{T_\infty}\left(3\frac{\lambda_e^s}{\lambda_i^s} + \frac{RJ}{T_\infty\lambda_i^s} - \omega\frac{\lambda_e^s}{\lambda_i^s}\frac{2\tau_1 + \tau_1^{\mathrm{I}}}{G_1}\right) \tag{3.3}$$

В случае, когда величина нагрева поверхности частицы достаточно мала, т.е. средняя температура поверхности незначительно отличается от температуры окружающей среды на бесконечности ($\gamma \to 0$), зависимостью коэффициента вязкости от температуры можно пренебречь и тогда $G_1 = 1$, $G_1^{\mathrm{I}} = -3$, $G_1^{\mathrm{II}} = 12$, $G_2 = 1$, $G_2^{\mathrm{I}} = -1$, $G_2^{\mathrm{II}} = 2$, $N_1 = 2$, $N_2 = 3$, $\tau_1 = -1/4$, $\tau_1^{\mathrm{I}} = 3/4$, $\tau_2 = 1/2$, $\tau_2^{\mathrm{I}} = -1/2$ и формулы (3.2), (3.3) переходят в известные выражения, например [9] (при $q_i = 0$).

**4. Анализ полученных результатов.** Формулы (3.2), (3.3) позволяют оценить влияние движения среды и нагрева поверхности при экспоненциально-степенном виде зависимости вязкости окружающей жидкости от температуры на величины термофоретической силы и скорости при произвольных перепадах температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее.

В общем случае термофоретическая сила (термофоретическая скорость) складывается из суммы трех слагаемых, появление которых обусловлено соответственно чисто термофоретической силой (скоростью) – первое слагаемое; силой (скоростью), пропорциональной дипольному моменту плотности тепловых источников $J$, неоднородно распределенных в объеме частицы – второе слагаемое; и третье слагаемое учитывает влияние движения среды (т.е. учет конвективных членов в уравнении теплопроводности). Заметим, что последнее слагаемое входит с противоположным знаком. Следовательно, в зависимости от характеристик частицы и вязкой жидкости гидрозольная частица может двигаться как в направлении внешнего заданного градиента температуры, так и в противоположную сторону. В случае газа имеется аналогичная ситуация, получившая название в литературе "положительный" и "отрицательный" термофорез, и она связана со скольжением второго порядка по числу Кнудсена [18].

В случае термофоретической силы, как видно из формулы (3.2), основной вклад в поведение частицы дает учет зависимости коэффициента динамической вязкости от температуры. Поскольку даже небольшое повышение средней относительной температуры над температурой жидкости приводит к значительному уменьшению коэффициента вязкости вблизи частицы.

В случае термофоретической скорости, как видно из формулы (3.3), ситуация выглядит по-другому. Третье слагаемое в (3.3) пропорционально $\omega = \gamma \mathrm{Pr}_\infty$, т.е. произведению числа Прандтля на относительный перепад температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее. Учитывая, что в жидкости число $\mathrm{Pr}_\infty$ в отличие от газа, где оно порядка единицы, может принимать большие значения, например, для глицерина при $T_\infty = 293$ K, $\mathrm{Pr}_\infty = 7250$, для воды при $T_\infty = 293$ K, $\mathrm{Pr}_\infty = 6.75$ и относительный перепад температуры $\gamma$ может быть тоже существенным, то вклад третьего слагаемого по порядку величины, может быть сравним с основным эффектом.

Формулы (3.2), (3.3) показывают также, что на величины и направления силы $F_{\text{th}}$ и скорости $U_{\text{th}}$ будет оказывать влияние величина и направление дипольного момента плотности тепловых источников и теплопроводность частицы. При $\lambda_i \to \infty$ значения $F_{\text{th}}$ и $U_{\text{th}}$, при фиксированной величине дипольного момента плотности тепловых источников стремятся к нулю.

Чтобы оценить какой вклад движение среды оказывает на скорость термофореза твердой сферической частицы, необходимо конкретизировать природу тепловых источников неоднородно распределенных в ее объеме. В качестве примера рассмотрим простой случай, когда частица поглощает излучение как черное тело, т.е. нагрев частицы происходит за счет поглощения электромагнитного излучения. Когда частица поглощает излучение как черное тело, поглощение излучения происходит в тонком слое толщиной $\delta R \ll R$, прилегающем к нагреваемой части поверхности частицы. При этом плотность тепловых источников внутри слоя толщиной $\delta R$ определяется с помощью формулы [19]

$$q_i(r,\theta) = \begin{cases} -\dfrac{I_0}{\delta R}\cos\theta, & \dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \pi, \quad R - \delta R \le r \le R \\ 0, & 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \tag{4.1}$$

где $I_0$ – интенсивность падающего излучения, связанная со средней температурой поверхности частицы $T_s$ соотношением $T_s = T_\infty + RI_0/(4\lambda_e)$.

*Таблица 3*

| $I_0 \cdot 10^6\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ | $\gamma = t_s - 1$ | $\varphi$ | $\varphi^*$ | $f$ | $f^*$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0.94 | 0.04 | 0.66 | 0.70 | 0.69 | 0.72 |
| 1.93 | 0.07 | 0.46 | 0.51 | 0.50 | 0.53 |
| 2.96 | 0.11 | 0.32 | 0.37 | 0.38 | 0.40 |
| 4.03 | 0.15 | 0.23 | 0.29 | 0.30 | 0.32 |
| 5.14 | 0.18 | 0.17 | 0.23 | 0.24 | 0.25 |
| 6.27 | 0.22 | 0.13 | 0.18 | 0.19 | 0.20 |
| 7.42 | 0.26 | 0.09 | 0.15 | 0.16 | 0.17 |
| 8.56 | 0.29 | 0.07 | 0.12 | 0.13 | 0.14 |
| 9.72 | 0.33 | 0.05 | 0.10 | 0.11 | 0.12 |

В выражения для силы и скорости термофореза входят интегралы по объему от плотности тепловых источников $q_i$ и с учетом (4.1) они принимают вид

$$\int_V q_i(r,\theta) z dV = -\frac{2}{3}\pi R^3 I_0, \quad \int_V q_i(r,\theta) dV = \pi R^2 I_0$$

В результате получаем выражения для силы и скорости термофоретического движения абсолютно черных твердых частиц сферической формы с учетом влияния движения среды

$$F_{\text{th}}^* = -6\pi R\mu_\infty K_{ts} f_{\text{th}}^* \frac{|\nabla T|}{T_\infty}, \quad U_{\text{th}}^* = -K_{ts} h_{\text{th}}^* \frac{|\nabla T|}{T_\infty} \tag{4.2}$$

$$f_{\text{th}}^* = \frac{4G_1}{\delta\Delta}\frac{\nu_e^s}{t_s}\frac{\lambda_e^s}{\lambda_i^s}\left[1 - \frac{R}{6\lambda_e^s T_\infty} I_0\left(1 + \frac{\text{Pr}_\infty}{2}\frac{2\tau_1 + \tau_1^{\text{I}}}{G_1}\right)\right]\exp(-A\gamma)$$

$$h_{\text{th}}^* = 2\frac{G_1}{\delta N_2}\frac{\nu_e^s}{t_s}\frac{\lambda_e^s}{\lambda_i^s}\left[1 - \frac{R}{6\lambda_e^s T_\infty} I_0\left(1 + \frac{\text{Pr}_\infty}{2}\frac{2\tau_1 + \tau_1^{\text{I}}}{G_1}\right)\right.$$

$$y = 1, \quad \Delta = N_1 + 2K_{ts}\frac{\mu_e^s}{\mu_\infty t_s}\frac{\text{Pr}_\infty}{\delta}(t_s - 1)\frac{\lambda_e^s}{\lambda_i^s}[G_2(2\tau_1 + \tau_1^{\text{I}}) - G_1(2\tau_2 + \tau_2^{\text{I}})]$$

Для иллюстрации вклада нагрева поверхности и движения среды в скорость термофореза твердой гидрозольной частицы в табл. 3 приведены значения функций $\varphi$ ($\varphi = h_{\text{th}}^* / h_{\text{th}}^*|_{T_s = 273\text{ K}}$) от $I_0$. Численные оценки проводились для частиц борированного графита, взвешенных в воде при $T_\infty = 273$K, $R = 25$ мкм ($\lambda_i^s = 55$ Вт/м · град, $\text{Pr}_\infty = 12.99$). Значения $\varphi^*$ оценивались по формуле (4.2) без учета движения среды ($\omega = 0$), а $f$ и $f^*$ соответственно при малых относительных перепадах температуры ($\gamma \to 0$), но коэффициенты молекулярного переноса брались при средней температуре поверхности частицы $T_s$. Расчеты показали, что учет нагрева поверхности и конвективных членов в уравнении теплопроводности оказывает существенное влияние на скорость термофореза и может привести к смене знака скорости.

**Заключение.** Получены выражения для термофоретической силы и скорости при произвольных перепадах температуры между поверхностью нагретой гидрозольной частицы и жидкостью вдали от нее, при нагреве поверхности частицы за счет внутренних источников тепла, неоднородно распределенных в ее объеме. Результаты работы могут быть использованы при проектировании экспериментальных установок, в которых необходимо обеспечить направленное движение гидрозольных частиц; при разработке методов тонкой очистки жидкостей от гидрозольных частиц; при анализе процессов переноса гидрозольных частиц в зоне протекания химических реакций; при оценке скорости осаждения гидрозольных частиц в каналах и т.д. Количественное исследование обсуждаемого явления для твердых нагретых частиц представляет собой вполне реальную экспериментальную задачу.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фукс Н.А.* Механика аэрозолей. М.: Изв. АН СССР, 1955. 352 с.
2. *Ужов В.Н., Вальдберг А.Ю.* Подготовка промышленных газов к очистке. М.: Химия, 1975. 216 с.
3. *Баканов С.П., Ролдугин В.И.* О двух методах построения теории термофореза крупных аэрозольных частиц // Коллоид. ж. 1977. Т. 39. № 6. С. 1027–1038.
4. *Поддоскин А.Б., Юшканов А.А., Яламов Ю.И.* Теория термофореза умеренно крупных аэрозольных частиц // Ж. техн. физики. 1982. Т. 82. Вып. 11. С. 2253–2261.
5. *Щукин Е.Р., Малай Н.В.* Фотофоретическое и термодиффузиофоретическое движение нагретых нелетучих аэрозольных частиц // Инж.-физ. ж. 1988. Т. 54. № 4. С. 628–635.
6. *Щукин Е.Р., Малай Н.В., Яламов Ю.И.* Движение нагреваемых внутренними источниками тепла капель в бинарных газовых смесях // Теплофизика высоких температур. 1988. Т. 25. № 5. С. 1020–1024.
7. *Борис А.Ю.* Термофорез и взаимодействие равномерно нагретых сферических частиц в газе // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 324–327.
8. *Галкин В.С., Фридлендер О.Г.* О силах на тела в газе, обусловленных барнеттовскими напряжениями // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 2. С. 271–283.
9. *Яламов Ю.И., Санасарян В.С.* Движение капель и пузырьков в вязких средах в режиме со скольжением // Ж. физ. химии. 1974. Т. 48. Вып. 11. С. 2693–2696.
10. *McNab G.S., Meisen A.* Termophoresis in liquids //J. Colloid. and Interface Sci. 1973. V. 44. № 2. P. 339–346.
11. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
12. *Андреев А.Ф.* Термофорез в жидкостях // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. Вып. 1. С. 210–216.
13. *Андреев А.Ф.* Поправки к гидродинамике жидкостей // ЖЭТФ. 1978. Т. 75. Вып. 3. С. 1132–1139.
14. *Бретшнайдер Ст.* Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета М.; Л.: Химия, 1966. 535 с.
15. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А.* Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 319 с.
16. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика М.: Наука, 1986. 736 с.
17. *Малай Н.В.* Обтекание неравномерно нагретой капли потоком жидкости при произвольных перепадах температуры в ее окрестности // Инж.-физ. ж. 2000. Т. 73. № 4. С. 728–738.
18. *Sone Y.* Flow induced by thermal stress in rarefied gas //Phys. Fluids. 1972. V. 15. № 8. P. 1418–1423.
19. *Борен К.Ф., Хафмен Д.Р.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 660 с.

Белгород
E-mail: malay @ bsu.edu.ru

Поступила в редакцию
27.V.2002