

УДК 532.59:537.2

© 2003 г. Д. Ф. БЕЛОНОЖКО, А. И. ГРИГОРЬЕВ

## О НЕЛИНЕЙНЫХ КАПИЛЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛНАХ НА ЗАРЯЖЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В асимптотических расчетах второго порядка малости получено аналитическое выражение для профиля бегущей капиллярно-гравитационной волны на заряженной поверхности идеальной несжимаемой жидкости. Обнаружены два типа стационарных профилей нелинейных периодических капиллярно-гравитационных волн. При некоторой фиксированной величине безразмерного поверхностного заряда форма вершин профилей нелинейных волн изменяется с притупленной на заостренную для коротких волн и с заостренной на притупленную для длинных волн.

*Ключевые слова:* гравитационно-капиллярные волны, нелинейные волны, идеальная жидкость, электрическое поле, заряженная поверхность.

Нелинейные периодические волны на поверхности заряженной идеальной жидкости в теоретическом отношении изучены весьма слабо. Аналитические исследования по этой теме в основном представлены работами, в которых фактически выполняется формальный подбор физических параметров задачи таким образом, чтобы получить разрешаемые уравнения [1–4]. В нижеследующем изложении в отличие от [1–4] физические параметры задачи не фиксируются в окрестности “удобных” для получения аналитического решения значений, а могут изменяться в широких пределах.

Цель настоящей работы – теоретический анализ влияния поверхностного электрического заряда на профиль нелинейных периодических волн на поверхности глубокой несжимаемой идеальной жидкости. Исследование проведено при значениях поверхностной плотности заряда меньше критической, выше которой отрицательное давление электрического поля на свободной поверхности жидкости является причиной неустойчивости Тонкса – Френкеля, проявляющейся в формировании на свободной поверхности эмиссионных выступов, с которых происходит сброс избыточного заряда в виде большого числа маленьких сильнозаряженных капелек [5–7].

**1. Математическая формулировка задачи.** Пусть несжимаемая идеальная жидкость с плотностью  $\rho$  заполняет в поле тяжести  $g \parallel -n_z$  полупространство  $z \leq 0$  в декартовой системе координат  $xyz$  ( $n_z$  – орт оси  $z$ ). По ее свободной поверхности распространяется бегущая волна неизменной формы, профиль которой в первом приближении по амплитуде волны синусоидален. Внешняя среда – вакуум. Жидкость считается идеальным проводником, несущим однородно распределенный с поверхностной плотностью  $k$  электрический заряд, такой, что электрическое поле над искаженной волновым движением поверхностью в пределе  $z \rightarrow \infty$  стремится к однородному с напряженностью  $E_0 = 4\pi k n_z$ .

Будем искать профиль волны с точностью до величин второго порядка малости по амплитуде волны. Примем, что горизонтальная и вертикальная компоненты поля скоростей волнового движения жидкости не зависят от координаты  $y$ . Тогда отклонение свободной поверхности жидкости  $\xi = \xi(x, t)$  от равновесной формы  $z = 0$ , потенциал по-

ля скоростей внутри жидкости  $\varphi$  и электрический потенциал  $\Phi$  над жидкостью удовлетворяют краевой задаче

$$z < \xi: p = -\rho g z - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\rho}{2} (\nabla \varphi)^2; \quad \Delta \varphi = 0 \quad (1.1)$$

$$z > \xi: \Delta \Phi = 0 \quad (1.2)$$

$$z = \xi: \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad p + \frac{(\nabla \Phi)^2}{8\pi} = -\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \left( 1 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right)^{-3/2}; \quad \Phi = 0 \quad (1.3)$$

$$z \rightarrow \infty: -\nabla \Phi = E_0 \mathbf{n}_z; \quad z \rightarrow -\infty: \nabla \varphi = 0$$

Вместо рассмотрения начальной задачи, следуя классическим работам по теории нелинейных периодических волн [8], будем искать решение задачи в виде суперпозиции бегущих волн с амплитудными коэффициентами различных порядков малости. Конечная цель – получение неизменного во времени профиля нелинейной волны.

В рамках общего асимптотического подхода для решения сформулированной задачи неизвестные величины представляются асимптотическими разложениями

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + O(\varepsilon^3); \quad \Phi = -E_0 z + \Phi_1 + \Phi_2 + O(\varepsilon^3); \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + O(\varepsilon^3)$$

$$\xi_n \sim O(\varepsilon^n); \quad \Phi_n \sim O(\varepsilon^n); \quad \varphi_n \sim O(\varepsilon^n)$$

Значения величин, входящих в граничные условия на свободной поверхности, с необходимой степенью точности выражаются через значения этих величин и пространственные производные от них на равновесной свободной поверхности жидкости

$$z = 0: \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial t} \right)_{z=0} + O(\varepsilon^3)$$

$$(\nabla \varphi)^2 = (\nabla \varphi_1)_{z=0}^2 + O(\varepsilon^3); \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)_{z=0} + O(\varepsilon^3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \xi_1 \frac{\partial \varphi_1^2}{\partial z^2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right)_{z=0} + O(\varepsilon^3); \quad \Phi = \left( \Phi_1 + \Phi_2 - E_0 \xi_1 - E_0 \xi_2 + \xi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)_{z=0} + O(\varepsilon^3)$$

$$(\nabla \Phi)^2 = \left( E_0^2 - 2E_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - 2E_0 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 - 2E_0 \xi_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} \right)_{z=0} + O(\varepsilon^3)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \left( 1 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right)^{-3/2} = \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} + O(\varepsilon^3)$$

**2. Решение задачи.** Математическая формулировка задачи первого порядка малости состоит из уравнений Лапласа (1.1) и (1.2) для функций  $\varphi_1$  и  $\Phi_1$ ; кинематического и динамического граничных условий для них и граничного условия на потенциал электрического поля на невозмущенной поверхности жидкости

$$z = 0: \frac{\partial \xi_1}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0; \quad -\rho g \xi_1 - \rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{E_0 \partial \Phi_1}{4\pi \partial z} + \gamma \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} = 0; \quad \Phi_1 - E_0 \xi_1 = 0$$

а также из условия для гидродинамического потенциала  $\varphi_1$  на бесконечной глубине вида (1.3) и условия для потенциала электрического поля на бесконечности вида

$$z \rightarrow \infty: \nabla \Phi_1 = 0$$

Решение такой задачи известно [6]

$$\xi_1 = a \cos \theta; \quad \varphi_1 = -\frac{a\omega}{k} \exp(kz) \sin \theta; \quad \Phi_1 = aE_0 \exp(kz) \cos \theta \quad (2.1)$$

$$\theta = \omega t - kz; \quad \omega^2 = k \left( g + k \frac{2\gamma}{\rho} - kW \sqrt{\frac{g\gamma}{\rho}} \right); \quad W = \frac{E_0^2}{4\pi \sqrt{\rho g \gamma}}$$

Безразмерный параметр  $W$  определяется как отношение электрических и лапласовских сил на свободной поверхности. Он характеризует устойчивость поверхности по отношению к однородно распределенному по ней электрическому заряду и известен под названием параметра Тонкса – Френкеля. Если ввести капиллярную постоянную жидкости  $\alpha = \sqrt{\gamma/(\rho g)}$ , то при выполнении условия  $W < \alpha k + 1/(\alpha k)$  решением задачи в приближении волн малой амплитуды является бегущая синусоидальная волна с волновым числом  $k$  [6]. Если  $W < 2$ , выписанное условие выполняется для всех значений  $k > 0$ . Если  $W = 2$ , то волна  $\alpha = 1$  становится неустойчивой, и ее амплитуда начинает экспоненциально расти. При  $W > 2$  существует непрерывный спектр волн в окрестности  $k = 1/\alpha$ , претерпевающих неустойчивость. Этот случай в настоящей работе не рассматривается, поскольку основное внимание будет уделено бегущим волнам.

Математическая формулировка задачи второго порядка малости состоит из уравнений Лапласа (1.1) и (1.2), относительно функций  $\varphi_2$  и  $\Phi_2$ ; кинематического и динамического граничных условий для них и граничного условия на потенциал электрического поля на невозмущенной поверхности жидкости

$$z = 0: \frac{\partial \xi_2}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \quad (2.2)$$

$$-\rho g \xi_2 - \rho \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \frac{E_0}{4\pi} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \gamma \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} = \rho \xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial t} + \quad (2.3)$$

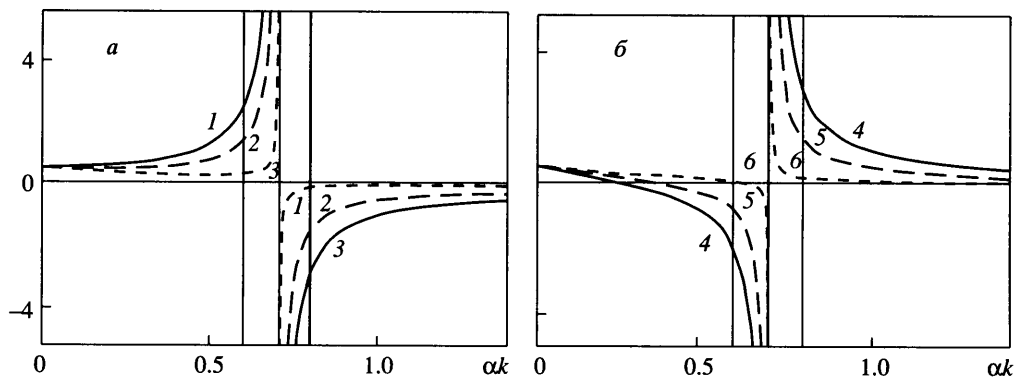
$$+ \frac{\rho}{2} \left( \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right) - \frac{1}{8\pi} \left( \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{E_0 \xi_1}{4\pi} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2}$$

$$\Phi_2 - E_0 \xi_2 = -\xi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \quad (2.4)$$

На бесконечном удалении от свободной поверхности жидкости для  $\varphi_2$  и  $\Phi_2$  используются такие же условия, как для  $\varphi_1$  и  $\Phi_1$  при решении задачи первого порядка малости.

Легко показать с помощью соотношений (2.1) для величин первого порядка малости, что правая часть соотношения (2.2) пропорциональна  $\sin(2\theta)$ , правая часть (2.3) пропорциональна  $\cos(2\theta)$ , а правая часть (2.4) пропорциональна  $(1 + \cos(2\theta))$ . Чтобы функции  $\xi_2$ ,  $\varphi_2$  и  $\Phi_2$ , разрешающие задачу второго порядка малости, удовлетворяли (2.4)–(2.2), а также уравнениям Лапласа для  $\varphi_2$ ,  $\Phi_2$  и условиям на бесконечности, их нужно искать в виде

$$\xi_2 = A \cos(2\theta); \quad \varphi_2 = B \sin(2\theta) \exp(kz); \quad \Phi_2 = C + D \sin(2\theta) \exp(-kz)$$



Фиг. 1. Зависимости  $\Lambda = \Lambda(\alpha k)$  при  $W = 0; 0.5; 1$  (а, линии 1–3);  $W = 1.1; 1.5; 1.9$  (б, линии 4–6). Тонкие вертикальные линии ограничивают область непригодности модели идеальной жидкости

Здесь  $A, B, C, D$  – константы, для определения которых необходимо выписанные выражения для  $\xi_2, \Phi_2, \Phi_2$  вместе с (2.1) подставить в соотношения (2.2)–(2.4). В итоге, приравнявая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, приходим к линейной неоднородной системе алгебраических уравнений для определения  $A, B, C, D$ , из которой находится следующее решение задачи второго порядка малости

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= -\frac{1}{4} a^2 k^2 \frac{\omega(3k\gamma - 2kW\sqrt{\rho g \gamma})}{k\rho g(0.5 - \alpha^2 k)} \sin(2\theta) \exp(2kz) \\ \Phi_2 &= \frac{1}{2} a^2 k E_0 + \frac{1}{4} a^2 k^2 \frac{E_0(2\rho g - k^2\gamma - 2kW\sqrt{\rho g \gamma})}{k\rho g(0.5 - \alpha^2 k)} \cos(2\theta) \exp(-2kz) \\ \xi_2 &= \frac{1}{4} a^2 k^2 \frac{(\rho g + k^2\gamma - 2kW\sqrt{\rho g \gamma})}{k\rho g(0.5 - \alpha^2 k)} \cos(2\theta) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Суммируя (2.1) и (2.5), несложно получить профиль волны во втором приближении по ее амплитуде

$$\xi = a \cos(\theta) + a^2 k \Lambda \cos(2\theta); \quad \Lambda = \frac{1(1 + \alpha^2 k^2 - 2\alpha k W)}{4(0.5 - \alpha^2 k^2)} \quad (2.6)$$

При  $k = k_* = (\alpha\sqrt{2})^{-1}$  знаменатель выражения для амплитуды второго порядка малости обращается в ноль, а сама добавка стремится к бесконечности.

На фиг. 1 показаны рассчитанные с помощью (2.6) зависимости безразмерного множителя  $\Lambda$ , определяющего амплитуду добавки второго порядка малости, от  $\alpha k$  при различных значениях поверхностной плотности заряда, характеризуемой значением  $W$ .

Независимо от величины  $W$  при приближении  $\alpha k$  к значению  $1/\sqrt{2} \approx 0.7$  разложение (2.6) становится непригодным для представления решения, так как величина последнего сохраненного в нем слагаемого становится значительно больше первых членов разложения. Волновое число  $k_*$  такое, что  $\alpha k_* = 1/\sqrt{2}$  называется резонансным [9] (вертикальная асимптота на фиг. 1 соответствует  $\alpha k = \alpha k_*$ ).

Если поверхность жидкости незаряжена ( $W = 0$ ), то зависимость  $\Lambda$  от  $\alpha k$  имеет вид, представленный сплошной линией на фиг. 1, а [9, 11]. При этом, профиль волны с волновым числом близким к резонансному сильно искажен четко выраженными складками [9]. При увеличении  $\alpha k$  переход через значение  $\alpha k = 1/\sqrt{2}$  сопровождается изменением знака добавки второго порядка малости с положительного на отрицательный.

В малой окрестности резонансного волнового числа для незаряженной поверхности идеальной жидкости полученный профиль волны (2.6) неверен (см. [10, 11]).

**3. Анализ решения задачи.** Проиллюстрируем полученные результаты на примере воды. Для воды ( $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ ,  $\gamma = 72 \text{ дин/см}$ ) с помощью соотношений, приведенных в [10, 11], несложно убедиться, что влияние вязкости  $\nu = 0.01 \text{ см}^2/\text{с}$  на профиль волны существенно на интервале  $\alpha k \in D = (0.6; 0.7)$ . На концах этого интервала амплитуда добавки второго порядка малости, оцененная без учета вязкости воды, оказывается завышенной на несколько процентов своей величины, а при  $\alpha k \rightarrow 1/\sqrt{2}$  это завышение становится бесконечным. Вне указанного интервала модели вязкой и невязкой воды дают хорошо согласующиеся результаты.

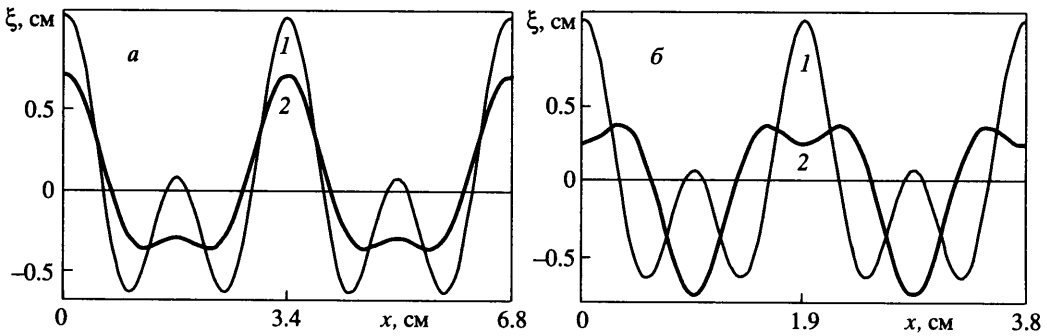
В некоторых работах по моделированию движения поверхности идеальной жидкости волнам с  $\alpha k = 1/\sqrt{2}$  приписываются различные свойства, которые не имеют физического смысла, потому что при таких значениях  $k$  модель, не учитывающая вязкости, недостоверна, например, резонансное поведение волн, описанное в [9], и “мягкий режим неустойчивости” для волн с  $\alpha k = 1/\sqrt{2}$  из [1].

Развивая модель [10, 11], можно показать, что при  $W < 2$  внешность интервала  $D$  (интервала непригодности модели идеальной жидкости) является областью, в которой моделирование волн на заряженной поверхности воды уравнениями идеальной жидкости остается хорошим приближением.

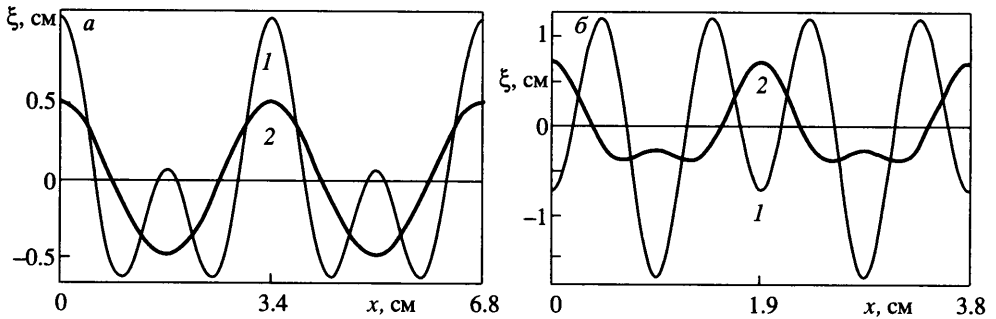
Каждая из зависимостей  $\Lambda = \Lambda(k)$  (фиг. 1) состоит из двух физически достоверных частей: ветвь при значениях  $\alpha k$ , расположенных слева от  $D$ , назовем левой физически достоверной частью, а справа от  $D$  – правой физически достоверной частью. Части ветвей, определенные на  $D$ , будем называть физически недостоверными.

При  $W \leq 1$  левая физически достоверная часть (длинные волны) положительна, а правая (короткие волны) – отрицательна (фиг. 1, а). В соответствии с [9] отвечающее этому случаю волновое движение естественно назвать гравитационно-капиллярным. Для такого волнового движения, как и при отсутствии заряда на свободной поверхности, характерны профили с заостренной вершиной для длинных волн с  $\alpha k < 1/\sqrt{2}$  и с притупленной вершиной для коротких волн с  $\alpha k > 1/\sqrt{2}$  (см. фиг. 2, а также [9]).

При  $1.1 \leq W < 2$  правая часть зависимости  $\Lambda = \Lambda(k)$  положительна, а левая может быть как положительной, так и отрицательной (фиг. 1, б). Нелинейные волны, отвечающие этим зависимостям – новый тип периодического волнового движения на поверхности идеальной жидкости (фиг. 3). Главное их отличие от классического гравитационно-капиллярного волнового движения на поверхности идеальной жидкости – заостренные вершины у коротких волн с  $\alpha k > 1/\sqrt{2}$  (фиг. 3, б). Волны с  $\alpha k < 1/\sqrt{2}$  в зависимости от значения  $W$  могут иметь как заостренную, так и притупленную вершину. Рассчитанный по формуле (2.6) профиль волны с  $\alpha k = 0.5$  при  $W = 1.2$  с точностью до толщины линии совпадает с синусоидой (фиг. 3, а). Таким образом, при наличии на поверхности воды электрического заряда возможно получить почти синусоидальные волны с длиной волны  $\lambda \approx 3.4 \text{ см}$  и амплитудой  $\lambda \approx 0.5 \text{ см}$ . До сих пор считалось, что синусоидальная форма волны гарантирована только для волн бесконечно малой амплитуды.



Фиг. 2. Профили волн на воде, рассчитанные по формуле (2.6), при  $W = 0; 0.8$ ; (линии 1, 2) для  $\alpha k = 0.5$  (а) и  $\alpha k = 0.9$  (б)



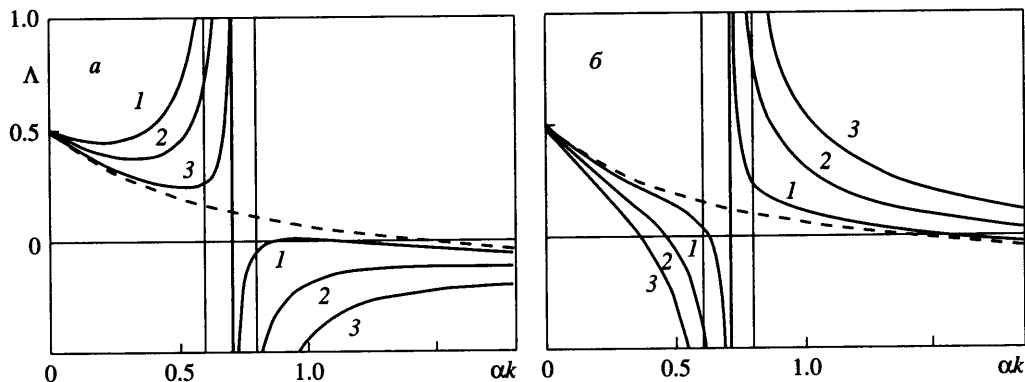
Фиг. 3. Профили волн на воде, рассчитанные по формуле (2.6), при  $W = 0; 1.2$  (линии 1, 2) для  $\alpha k = 0.5$  (а);  $\alpha k = 0.9$  (б)

Волновые решения, которые в области коротких волн  $\alpha k > 1/\sqrt{2}$  имеют заостренные вершины, – новый тип волн, качественно отличный по форме профиля от гравитационно-капиллярных. Их появление обусловлено наличием электрического заряда, и их естественно назвать электрокапиллярными.

При  $W = 1$  (вблизи этого значения происходит смена режима распространения волн) величина квадрата поверхностной плотности заряда составляет половину от своего критического значения, выше которого заряженная свободная поверхность неустойчива по отношению к поверхностному заряду.

Переключение одного волнового режима ( $0 \leq W \leq 1$ ) на другой ( $1.1 \leq W < 2$ ) происходит при значениях  $W$  из диапазона  $1 < W < 1.1$ . Можно установить точное значение  $W$  из указанного интервала, при котором зависимость  $\Lambda = \Lambda(k\alpha)$ , определенная по формуле (2.6), становится непрерывной линией. Таким значением является  $W = W_* = 3/(2/\sqrt{2}) \approx 1.06$ . Непрерывность  $\Lambda = \Lambda(k\alpha)$  при  $\alpha k \rightarrow 1/\sqrt{2}$  устанавливается, если раскрыть возникающую в выражении для  $\Lambda$  (см. (2.6)) неопределенность  $0/0$  по правилу Лопиталья.

Из фиг. 4 видно, что физически достоверные части зависимостей  $\Lambda = \Lambda(\alpha k)$ , относящиеся к разным семействам, при  $W \rightarrow W_*$  стремятся к зависимости  $\Lambda = \Lambda_*(\alpha k)$  (фиг. 4). Значение  $W = W_*$  естественно принять за критерий разделения выделенных волновых движений.



Фиг. 4. Зависимости, аналогичные приведенным на фиг. 1. Пунктирная линия соответствует  $W = W_* = 3/(2\sqrt{2})$ :  $W - W_* = -0.05; -0.25; -0.5$  (кривые 1–3) (а),  $W - W_* = 0.05; 0.25; 0.5$  (кривые 1–3) (б)

В итоге получилось, что на свободной поверхности жидкости волновые движения с волновыми числами  $k$ , удовлетворяющими условию  $\alpha k \notin (0.6; 0.7)$ , в зависимости от величины поверхностного заряда разделяются на два класса: гравитационно-капиллярные при  $0 < W < W_*$  и электрокапиллярные при  $W_* < W < 2$ .

Из (2.6) следует, что и для гравитационно-капиллярных волн и для электрокапиллярных волн с  $k \neq k_*$  квадратичное по амплитуде  $a$  слагаемое в (2.6) стремится к нулю при  $W \rightarrow W_*$ . Отсюда следует, в докритической в смысле реализации неустойчивости Тонкса – Френкеля области значений  $W$ :  $0 \leq W \leq 2$  имеется значение  $W = W_*$ , при приближении к которому электрический заряд оказывается фактором, уменьшающим эффективность нелинейного взаимодействия волн на свободной поверхности (напомним, что добавка второго порядка малости связана с нелинейностью). На практике это должно проявиться в том, что на поверхности жидкости капиллярные волны с тупой вершиной при наложении поверхностного электрического заряда с  $W \approx 1$  должны превратиться в синусоидальные.

Хотя представленный результат получается после несложных легко проверяемых расчетов, физический механизм влияния поверхностного заряда на степень эффективности нелинейного взаимодействия не очевиден. Его выяснение требует проведения отдельного исследования.

**Заключение.** На заряженной поверхности электропроводной жидкости в зависимости от величины поверхностной плотности заряда выделяются два класса нелинейных периодических волновых движений.

При величине квадрата поверхностной плотности заряда меньшей примерно половины критического (в смысле устойчивости свободной поверхности к давлению электрического поля) значения волновое движение представляет собой гравитационно-капиллярную волну, которая имеет заостренную вершину в области длинных волн и притупленную вершину в области коротких волн.

Если величина квадрата поверхностной плотности заряда больше примерно половины критической, но меньше критической, то на поверхности воды распространяются волны, названные электрокапиллярными. В области длинных волн они имеют притупленную вершину, а в области коротких – заостренную.

Нелинейные капиллярно-гравитационные волны на однородно заряженной поверхности идеальной жидкости могут иметь почти синусоидальный профиль.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ МК-929.2003.01 и гранта РФФИ (№ 03-01-00-760).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жакин А.И.* Нелинейные волны на поверхности заряженной жидкости. Неустойчивость, ветвление и нелинейные равновесные формы заряженной поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 3. С. 94–102.
2. *Gonzalez A., Castellanos A.* Kortweg – de Vries – Burgers equation for surface waves in nonideal conducting liquids // Phys. Rev. E. 1994. V. 49. № 4. Pt. A. P. 2935–2940.
3. *Зубарев Н.М.* Точное решение задачи о равновесной конфигурации заряженной поверхности жидкого металла // ЖЭТФ. 1999. Т. 116. Вып. 6(12). С. 1990–2005.
4. *Зубарев Н.М.* Развитие неустойчивости заряженной поверхности жидкого гелия: точные решения // Письма в ЖЭТФ. 2000. Т. 71. Вып. 9–10. С. 534–538.
5. *Tonks L.* Theory of liquid surface rupture by a uniform electric field // Phys. Rev. 1935. V. 48. № 6. P. 562–568.
6. *Френкель Я.И.* К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 347–350.
7. *Габович М.Д.* Жидкометаллические эмиттеры ионов (обзор) // Успехи физ. наук. 1983. Т. 140. № 1. С. 137–151.
8. *Стокер Дж.* Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 617 с.
9. *Naufeh A.H.* Third-harmonic resonance in the interaction of capillary and gravity waves // J. Fluid Mech. 1971. V. 48. Pt. 2. P. 385–395.
10. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* Асимптотическое решение задачи о нелинейных волнах в вязкой жидкости // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. Вып. 19. С. 1–9.
11. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* Нелинейные движения вязкой жидкости со свободной поверхностью // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 2. С. 184–192.

Ярославль

Поступила в редакцию  
22.I.2003