

УДК 532.516.5:537.21

© 2003 г. А. А. ШУТОВ

## ТЕЧЕНИЕ НАКЛОННОГО ПОВЕРХНОСТНО ЗАРЯЖЕННОГО СЛОЯ В ПРОДОЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Теоретически и экспериментально исследовано движение наклонного слоя под влиянием электрической силы, действующей против силы тяжести. Движение слоя вызывается касательным к свободной границе натяжением, обусловленным взаимодействием поверхностного заряда с продольным электрическим полем. Определено условие подъема жидкости по наклонной диэлектрической плоскости. Рассчитаны области устойчивости движения слоя.

*Ключевые слова:* наклонный слой, течение, устойчивость, сила тяжести, поверхностный заряд, продольное электрическое поле.

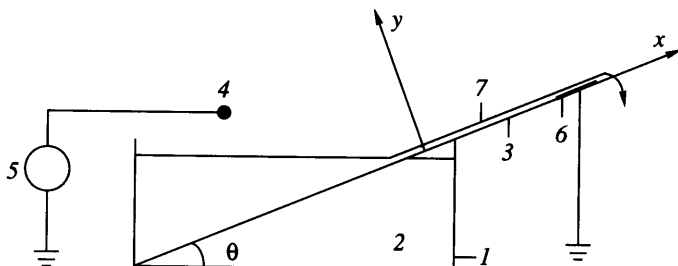
1. Экспериментальное исследование движения и устойчивости слоя жидкости в электрическом поле проводилось на наклонной диэлектрической пластине, погруженной в открытую кювету с жидкостью. Электрическое поле создается проводом диаметром 0.1 мм, который устанавливался параллельно как свободной поверхности жидкости в кювете, так и плоскости текстолитовой пластины (фиг. 1). Прямоугольная ячейка сечением  $4 \times 4$  см имела высоту 2 см, длина пластины составляла 6 см. Противоположный электрод представляет собой металлическую полосу, расположенную на верхнем краю пластины параллельно проводу 4. Расположение электродов приблизительно соответствует масштабу фиг. 1.

При напряжениях проволочного электрода, превышающих потенциал возникновения короны, начинается движение слоя жидкости вверх по пластине. Чем выше напряжение, тем выше поднимается слой.

В таблице приведены как измеренные в опытах свойства жидкостей, так и табличные данные (\*) из [1, 2]. В последней колонке *eff* знаком “-” отмечены жидкости, не поднимающиеся по пластине ни при каких условиях эксперимента. Противоположный знак означает возможность такого движения. Из этих данных видно, что подъем возможен только для слабопроводящих жидкостей с проводимостью  $\lambda \approx 10^{-8} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ . Во всех случаях толщина слоя составляла ~1 мм. Движение слоя наблюдается при всех углах наклона  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , причем подъем начинается при напряжениях  $U \sim 8-9$  кВ, а при  $U \sim 10-12$  кВ жидкость достигает верхнего края пластины.

Отличительной особенностью рассмотренных экспериментов на диэлектрической наклонной плоскости является безволновой характер течения слоя. Диапазон вязкости рабочих жидкостей охватывает три десятичных порядка, однако на устойчивости течения это никак не сказывается, и в рассмотренных условиях волны на поверхности слоя не наблюдались ни при каких углах  $\theta$ .

Полной противоположностью рассмотренному случаю является течение по проводящей наклонной поверхности, которое сопровождается волновым возмущением слоя ячеистого типа [3]. Замена диэлектрической пластины на проводящую в рассмотренных выше экспериментах приводит к тому, что одновременно с подъемом слоя для всех жидкостей и при всех углах наклона  $\theta$  происходит возбуждение поверхностных волн. Длина волны этого возмущения значительно превосходит толщину слоя.



Фиг. 1. Схема эксперимента. 1 – кювета с исследуемой жидкостью, 2, 3 – наклонные текстолитовые пластины, 4 – проволочный электрод, 5 – источник постоянного напряжения, 6 – противозлектрод, 7 – поднимающийся слой жидкости

Пороговый характер возникновения движения слоя по напряжению и проводимости позволяет построить следующую модель течения на диэлектрической пластине. Коронирующий электрод является источником ионов, которые заряжают свободную поверхность жидкости. Поскольку жидкость слабопроводящая, то мала скорость релаксации заряда. Кроме того, диэлектрическая подложка слоя препятствует утечкам заряда в глубь жидкости, вследствие чего заряд аккумулируется преимущественно на границе. В результате взаимодействия поверхностного заряда с полем возникает тангенциальное электрическое натяжение на свободной поверхности. Граница вовлекает в движение жидкость под поверхностью, приводя к подъему слоя по наклонной пластине.

Целью дальнейших исследований является определение условий подъема жидкости и расчет областей устойчивости.

2. Постановка задачи аналогична постановке для горизонтального слоя [4]. Рассмотрим течение слоя толщиной  $h$  по наклонной плоскости в декартовой системе координат  $xu$  (фиг.1). Слой заряжен поверхностно с плотностью  $\sigma$ , значение которой в начальный момент времени равно  $\sigma_0 = \text{const}$ . Внешнее электрическое поле постоянной напряженности  $E_0$  направлено вдоль оси  $x$ . В качестве характерных параметров задачи выбраны плотность  $\rho$ , вязкость жидкости  $\mu$ , ускорение свободного падения  $g$  и невозмущенная толщина слоя  $h_0$ . Тогда характерные масштабы длины, времени, скорости и давления равны соответственно  $h_0$ ,  $\mu/\rho gh_0$ ,  $\rho gh_0^2/\mu$  и  $\rho gh_0$ . Обезразмеривающие

Жидкость	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	$\lambda$ , Ом <sup>-1</sup> м <sup>-1</sup>	$\mu$ , Пз	$\epsilon$	$T$ дин/см	$eff$
Вода	1.0	$2 \cdot 10^{-5}$	0.01	81	73	–
Глицерин	1.26	$1.6 \cdot 10^{-7}$	10	42*	62	–
Диоктилфталат	1.1	$10^{-8}$	0.4	5.2	43	+
Олеиновая кислота	0.9	$5 \cdot 10^{-9}$ *	11	2.4*	33	+
Касторовое масло	0.96	$2.1 \cdot 10^{-10}$	14	5.1	30	+
Силиконовое масло	1.1	$1.4 \cdot 10^{-12}$	12	2.7	20	+
Толуол	0.87	$10^{-12}$ *	0.006	2.4*	29	+
Бензол	0.88	$10^{-16}$ *	0.006	2.3	29	+

масштабы электрических величин потенциала, напряженности и поверхностной плотности заряда равны соответственно  $(\rho g h_0^3 / \epsilon_0)^{1/2}$ ,  $(\rho g h_0 / \epsilon_0)^{1/2}$  и  $(\rho g h_0 \epsilon_0)^{1/2}$ , где  $\epsilon_0$  – диэлектрическая постоянная. Безразмерная система уравнений включает уравнения Навье–Стокса, уравнение Лапласа для электрического потенциала  $\phi$

$$\text{Re} \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \Delta \mathbf{V} + \mathbf{F}_g, \quad \text{Re} = \frac{\rho^2 g h_0^3}{\mu^2} \quad (2.1)$$

$$\text{div } \mathbf{V} = 0, \quad \Delta \phi = 0$$

где  $x$  и  $y$  – компоненты скорости и силы тяжести – равны соответственно  $\mathbf{V} = (u, v)$  и  $\mathbf{F}_g = (-\sin \theta, -\cos \theta)$ . На свободной поверхности  $y = h(x, t)$  должны выполняться условия непроницаемости и сохранения поверхностного заряда

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = v \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sigma \sqrt{1 + h'^2}) + \frac{\partial}{\partial x} \sigma u = 0, \quad h' = \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.3)$$

Для уравнения переноса заряда (2.3) использована модель простого слоя зарядов [5–7]. В этом соотношении опущено омическое слагаемое в соответствии с предположением о малости скорости релаксации заряда. Начальные и граничные условия имеют вид

$$t = 0: \quad \sigma = \sigma_0, \quad E_x = E_0$$

$$y = h: \quad p_{\mathbf{n}} - \mathbf{p}_n = -\frac{1}{\text{We}} \frac{h'' \mathbf{n}}{(1 + h'^2)^{3/2}} - \left( E_{ne} \mathbf{E}_e - \epsilon E_{ni} \mathbf{E}_i - (E_e^2 - \epsilon E_i^2) \frac{\mathbf{n}}{2} \right) \quad (2.4)$$

$$\phi_e = \phi_i, \quad E_{ne} - \epsilon E_{ni} = \sigma, \quad \text{We} = \rho g h_0^2 / T, \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi$$

$$y = 0: \quad u = 0, \quad v = 0, \quad E_{ni} = 0$$

где проекции вектора  $\mathbf{p}_n$  на направления внешней нормали к поверхности жидкости  $\mathbf{n}$  и касательной  $\boldsymbol{\tau}$  равны

$$p_{nn} = 2 \left( h'' \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - h' \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \frac{1}{1 + h'^2}$$

$$p_{n\tau} = \left( (1 - h'^2) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2h' \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \frac{1}{1 + h'^2}$$

Индексы  $i$  и  $e$  относятся к величинам внутри и вне жидкости соответственно,  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость жидкости,  $T$  – коэффициент поверхностного натяжения. Граничное условие  $E_{ni}(x, y = 0, t) = 0$  ставится в связи с предположением об отсутствии омических утечек на диэлектрической подложке слоя. Система (2.1)–(2.4) имеет следующее стационарное решение для слоя постоянной безразмерной толщины  $h = 1$

$$u^{(0)} = y \sqrt{\alpha \beta} - \left( y - \frac{y^2}{2} \right) \sin \theta, \quad v^{(0)} = 0$$

$$p^{(0)} = (1 - y) \cos \theta - \alpha / 2 - (\epsilon - 1) \beta / 2$$

$$\phi_e^{(0)} = -x \sqrt{\alpha} - y \sqrt{\beta}, \quad \phi_i^{(0)} = -x \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} \quad (2.5)$$

$$\alpha = E_0^2, \quad \beta = \sigma_0^2$$

$$Q = \int_0^1 u^{(0)} dy = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2} - \frac{1}{3} \sin \theta$$

где  $Q$  – расход жидкости через сечение слоя.

Из условия  $Q > 1$  находим, что подъем по наклонной плоскости возможен при условии

$$\sqrt{\alpha\beta} > 2/3 \sin \theta \quad (2.6)$$

которое не содержит зависимости от вязкости.

Рассмотрим устойчивость решения (2.5) по отношению к малым возмущениям вида:

$$\begin{aligned} u &= u^{(0)} + u^{(1)}, \quad v = v^{(1)}, \quad p = p^{(0)} + p^{(1)}, \quad \varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} \\ \sigma &= \sigma_0 + \sigma^{(1)}, \quad h = 1 + h^{(1)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Тогда система (2.1)–(2.4) в линейном приближении приобретает вид

$$\text{Re} \frac{\partial \mathbf{V}^{(1)}}{\partial t} = -\nabla p + \Delta \mathbf{V}^{(1)}, \quad \text{div} \mathbf{V}^{(1)} = 0, \quad \Delta \varphi^{(1)} = 0$$

$$h = 1: \quad \frac{\partial \sigma^{(1)}}{\partial t} + \sigma_0 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + u_0 \frac{\partial \sigma^{(1)}}{\partial x} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial h^{(1)}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial h^{(1)}}{\partial x} = v^{(1)}, \quad u_0 = u^{(0)}(1)$$

$$p^{(1)} - 2 \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y} = h^{(1)} \cos \theta - 2h^{(1)} \sqrt{\alpha\beta} - \frac{h^{(1)}}{\text{We}} - \sqrt{\beta} E_{ne}^{(1)} + (\varepsilon - 1) \sqrt{\alpha} E_{\tau}^{(1)} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} = -h^{(1)} \cos \theta + \sqrt{\beta} E_{\tau}^{(1)} + \sqrt{\alpha} \sigma^{(1)} \quad (2.10)$$

$$\varphi_e^{(1)} + \varphi_i^{(1)} = h^{(1)} \sqrt{\beta}$$

$$\varepsilon \frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_e^{(1)}}{\partial y} = \sigma^{(1)} + h^{(1)} (\varepsilon - 1) \sqrt{\alpha}$$

$$y = 0: \quad u^{(1)} = 0, \quad v^{(1)} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial y} = 0$$

Решение возмущенной системы ищем в виде  $a^{(1)}(x, y, t) = a(y)e^{i\omega t + ikx}$ , где  $a^{(1)}$  – любая из величин в (2.7). Тогда функции  $a(y)$  для соответствующей величины в решении возмущенной системы равны

$$p = \frac{\omega \text{Re}}{k} (A \text{sh} ky + B \text{ch} ky)$$

$$u = \frac{A}{k} (\kappa \text{sh} ky - k \text{sh} ky) + B (\text{ch} ky - \text{ch} ky) \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}
 v &= -iA(\operatorname{sh}ky - \operatorname{ch}ky) - \frac{iB}{\kappa}(k \operatorname{sh}ky - \kappa \operatorname{sh}ky) \\
 \varphi_i &= -\frac{\operatorname{ch}ky}{\operatorname{ch}k + \varepsilon \operatorname{sh}k} \left( (\sqrt{\beta} - i(\varepsilon - 1)\sqrt{\alpha})h + \frac{\sqrt{\beta}}{\Omega}u \right) \\
 \varphi_e &= \frac{\exp k(1-y)}{\operatorname{ch}k + \varepsilon \operatorname{sh}k} \left( (\sqrt{\beta}\varepsilon \operatorname{sh}k + i(\varepsilon - 1)\sqrt{\alpha}\operatorname{ch}k)h - \frac{\sqrt{\beta}\operatorname{ch}k}{\Omega}u \right) \\
 \sigma &= -\sqrt{\beta}\frac{k}{\Omega}u, \quad \kappa = \sqrt{k^2 + i\omega\operatorname{Re}}, \quad \Omega = \omega + ku_0
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Индекс "1" в возмущенных решениях (2.11) и (2.12) опущен. Рассмотрим случай  $|\omega\operatorname{Re}/k^2| \ll 1$ , когда инерцией жидкости можно пренебречь. Разлагая  $\kappa$  и переобозначая константы в (2.11) имеем следующие выражения для давления и скоростей

$$\frac{i\omega\operatorname{Re}}{2k}A \rightarrow A, \quad \frac{i\omega\operatorname{Re}}{2k}B \rightarrow B$$

$$p = -2iA\operatorname{sh}ky - 2iB\operatorname{ch}ky \tag{2.13}$$

$$u = A\left(\frac{\operatorname{sh}ky}{k} + y\operatorname{ch}ky\right) + By\operatorname{sh}ky, \quad v = -iAy\operatorname{sh}ky - iB\left(y\operatorname{ch}ky - \frac{\operatorname{sh}ky}{k}\right)$$

Подставляя (2.12), (2.13) в (2.8)–(2.10) получаем дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned}
 4\Omega^2(k^2d + 1) + 2\Omega\left(D\frac{kd - \operatorname{th}k}{k} - F(kd + \operatorname{th}k) + (2kCE - \sin\theta)kd\right) + \\
 + \frac{\operatorname{th}^2k - k^2d}{k}(DF + CE(\sin\theta - kCE)) = 0
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

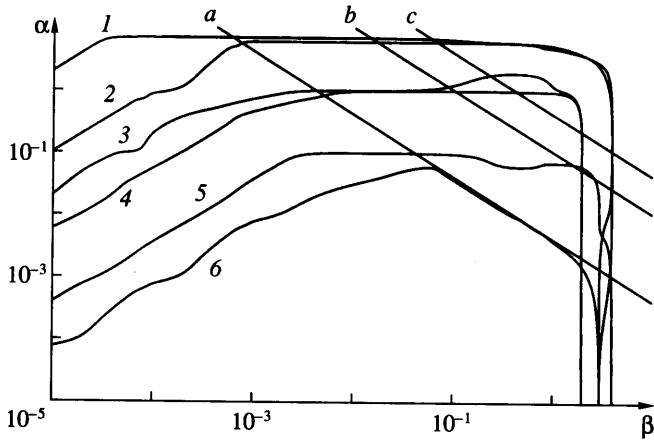
$$E = i\beta + (\varepsilon - 1)\sqrt{\alpha\beta}, \quad F = i\beta C - \sqrt{\alpha\beta}, \quad C = (1 + \varepsilon\operatorname{th}k)^{-1}$$

$$D = k\sqrt{\alpha\beta}(2 + C(2\varepsilon - 3 - \varepsilon\operatorname{th}k)) + i\left(\cos\theta + \frac{k^2}{\operatorname{We}} - kC(\beta\varepsilon\operatorname{th}k + (\varepsilon - 1)^2\alpha)\right), \quad d = 1 - \operatorname{th}^2k$$

Решение (2.5) устойчиво, если оба корня уравнения (2.14) имеют неотрицательную мнимую часть. Области устойчивости (2.14) рассчитывались в переменных  $\alpha - \beta$  при различных параметрах  $\varepsilon$ ,  $\operatorname{We}$ ,  $\theta$ . Характерные величины поверхностного натяжения жидкостей на воздухе составляют 20–40 дин/см. Для слоя толщиной  $h_0 \sim 1$  мм параметр  $\operatorname{We} \sim 0.25$ –0.5. Типичное значение диэлектрической проницаемости  $\varepsilon \sim 2$ –5.

На фиг. 2 представлены результаты расчета областей устойчивости в переменных  $\alpha - \beta$ . Область устойчивости расположена под соответствующей кривой. Из фиг. 2 видно, что область устойчивости сужается с увеличением угла наклона  $\theta$  (кривые 1–3) и ростом числа  $\operatorname{We}$  (кривые 3–4). С ростом  $\varepsilon$  также уменьшается размер области устойчивости (кривые 2 и 5, 3 и 6).

Области над прямыми  $a$ ,  $b$ ,  $c$  соответствуют областям существования решения (2.6) при значениях  $\sin\theta$ , равных 0.1, 0.5 и 1 соответственно. Таким образом, область устойчивого течения вверх по плоскости с углом наклона  $30^\circ$  является область между прямой  $b$  и кривой 2 (или 5). В то же время такой области не существует между кривой 6 и прямой  $c$ . В данном случае течение вверх по вертикальной стенке должно сопровождаться волновым возмущением слоя.



Фиг. 2. Области устойчивости течения слоя. Кривые 1–3:  $\epsilon = 2$ ,  $We = 0.25$ ; кривая 4:  $\epsilon = 2$ ,  $We = 0.5$ ; кривые 5–6:  $\epsilon = 10$ ,  $We = 0.25$ ;  $\sin \theta = 0.1$  (1), 0.5 (2, 5) и 1 (3, 4, 6)

В приведенных выше экспериментах в соответствии с расчетами были подобраны условия, при которых происходит безволновое течение слоя. Анализ возможности подъема жидкости необходимо проводить с учетом следующего обстоятельства. Заряды короны аккумулируются не только слабопроводящей жидкостью, но и диэлектрической пластиной. При углах  $\theta \sim \pi/2$  пластина и жидкость приобретают приблизительно одинаковый заряд. Вследствие этого при углах, близких к прямому, подъем жидкости блокируется силами кулоновского отталкивания зарядов пластины и свободной поверхности. Однако если пластина смочена, то подъем возможен и по вертикальной пластине. В то же время на металлической подложке подъем возможен и при тупых углах  $\theta$ . При  $\theta = 100^\circ$  пленка бензола поднимается на полную высоту в поле с разностью потенциалов  $U = 15$  кВ, однако уже для  $\theta = 120^\circ$  подъем не превышает 1 см.

Возможности рассматриваемого метода демонстрирует следующий эксперимент. Ячейка устройства, изображенного на фиг. 1, заполнялась на  $3/4$  водой, а сверху на  $1/4$  наливался толуол, угол  $\theta = 30^\circ$ . Если пластина диэлектрическая, то при  $U = 8$  кВ начинается подъем слоя толуола, а при  $U = 12$  кВ жидкость переливается через край пластины. В результате откачивается почти весь толуол за исключением отдельных капель.

В случае проводящей пластины жидкость из ячейки не откачивается. В водном слое, контактирующим с заземленным электродом, развивается интенсивная конвекция. В это движение вовлекается толуол, который в результате перемешивания теряет поверхностный заряд.

**Заключение.** Рассматриваемое движение вызывается касательным электрическим натяжением к свободной поверхности. Условием подъема жидкости является превышение электрической сдвиговой силой порога в  $2/3$  от скатывающей гравитационной силы. В рамках линейной теории определены условия безволнового течения слоя. Размеры области устойчивости в координатах поверхностный заряд – поле увеличиваются при увеличении коэффициента поверхностного натяжения, а также при уменьшении толщины слоя, угла наклона плоскости и диэлектрической проницаемости жидкости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Администрации Калужской области, проекты 02-01-96035 и 00-01-00645.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Физические величины: Справ. / Под. ред. И.С. Григорьева и Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
2. Таблицы физических величин: Справ. / Под. ред. И.К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976. 1005 с.
3. *Ohyama R., Watson A., Chang J.S.* Electrical current conduction and electricalhydrodynamically induced fluid flow in a AW type EHD pump // 2-nd Intern. Workshop on Electrical Conduction, Convection, and Breakdown in Fluids / Eds P. Atten, A. Denat. Grenoble, France, 2000. P. 174–177.
4. *Шутов А.А.* Генерация электрогидродинамических волн на границе раздела жидкость – вакуум // Журн. техн. физики. 2002. Т. 72. Вып. 8. С. 126–129.
5. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.
6. *Gogosov V.V., Shaposhnikova G.A.* Electrohydrodynamics of surface phenomena // Intern. J. Appl. Electromagnetics Materials. 1990. V. 1. № 1. P. 45–58.
7. *Шутов А.А.* Форма капли в постоянном электрическом поле // Журн. техн. физики. 2002. Т. 72. Вып. 12. С. 15–22.

Обнинск

E-mail: shutov@iate.obninsk.ru

Поступило в редакцию  
30.X.2002